УДК: 517.98

Паранормальные элементы в нормированной алгебре

А.М. Бикчентаев, С.А. Абед

1) Airat.Bikchentaev@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

2) samialbarkish@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Аннотация

Для нормированной алгебры $\mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$ введены и исследованы $\|\cdot\|$-замкнутые классы

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \ \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \ \text{ для всех } \ A \in \mathcal{A} \ \text{ с } \ \|A\| = 1\}.$$

Показано, что $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\mathcal{A}$ унитальна, $U, V \in \mathcal{A}$ такие, что $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В частности, если $\mathcal{A}$ унитальная C^*-алгебра и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех изометрий $U \in \mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{A}$ унитальна, тогда 1) если элемент $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$; 2) при $\|I\| = 1$ класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ состоит из нормалоидных элементов; 3) если спектр элемента $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ лежит на единичной окружности, то $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, C*-алгебра, паранормальный оператор, квазинильпотеный оператор, изометрия, гипонормальный оператор, нормалоидный оператор, нормированная алгебра, унитальная алгебра.

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – *-алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *паранормальным*, если $\|T^2x\|_{\mathcal{H}} \geq \|Tx\|^2_{\mathcal{H}}$ для всех $x \in \mathcal{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{H}} = 1$, см. [1]–[3]; *изометрией*, если $T^*T = I$; *гипонормальным*, если $T^*T \geq TT^*$. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра такая, что $\|X^*X\| = \|X\|^2$ для всех $X \in \mathcal{A}$. По теореме Гельфанда–Наймарка любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная алгебра над полем Λ, $\mathcal{A}_1 = \{X \in \mathcal{A} : \ \|X\| = 1\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что $T \in \mathcal{A}$ *квазинильпотент*, если $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$; *нормалоидный*, если $\|T^n\| = \|T\|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Введем класс

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \ \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \ \text{ для всех } \ A \in \mathcal{A}_1\}.$$

Очевидно, $0 \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \lambda T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ $\|\cdot\|$-замкнут в $\mathcal{A}$.*

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – плотная подалгебра нормированной алгебры $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{B})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ – нормированные алгебры. Тогда $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1) \times \cdots \times \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 4. *Имеем $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная унитальная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то T нормалоидный.*

Следствие 6. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная унитальная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $(0 \neq)T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то T не может быть квазинильпотентом.*

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная алгебра.*
(i) *Если $T \in \mathcal{A}$ с $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$, то $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$.*
(ii) *Если $T \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{A})$ и $T^k \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{A})$, то $T \in \mathcal{P}_{kn-1}(\mathcal{A})$ для всех $k, n \geq 2$.*

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная алгебра, $X \in \mathcal{A}_1$ и $T \in \mathcal{A}$ такие, что $XTX = T$. Если $k \in \mathbb{N}$ нечетно и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $XT \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$.*

Предложение 9. *Пусть нормированная алгебра $\mathcal{A}$ унитальна. Тогда $\lambda I \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и справедливы утверждения:*
(i) *если $T \in \mathcal{A}_1$ с $T^{k+1} = I$, то $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$;*
(ii) *если $T = T^{k+1} \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $\|I\| = 1$, то $\|T\| \in \{0, 1\}$.*

Предложение 10. *Если $\mathcal{A}$ – коммутативная нормированная алгебра и $\|T^2\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная унитальная алгебра и $U, V \in \mathcal{A}_1$ такие, что $VU = I$. Если $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Следствие 12. *Если $\mathcal{A}$ унитальная C^*-алгебра и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех изометрий $U \in \mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$.*

Следствие 12 при $k = 1$ обобщает п. (ii) теоремы 2 [4].

Теорема 13. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная унитальная алгебра. Если элемент $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$.*

Следствие 14. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная унитальная алгебра над полем $\mathbb{C}$ и $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ такой, что спектр $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности. Тогда $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$.*

Теорема 15. *Пусть $\mathcal{A}$ – нормированная алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Замечание 16. Из теоремы 15 можно получить второе доказательство следствия 5.

Из теоремы 2.1 [4] (см. также теорему 1 [5]) имеем

Следствие 17. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в $\mathcal{H}$.*

Поскольку операция произведения секвенциально совместно непрерывна в сильной операторной топологии в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ [6, задача 93], из следствия 17 вытекает

Следствие 18. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ секвенциально замкнут в сильной операторной топологии.*

Следствие 19. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то в $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ существует не гипонормальный оператор.*

Замечание 20. Если $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ есть множество всех нормальных матриц из $\mathcal{A}$ (теорема 2.32 [5]). Для $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ теорема 4 установлена в [7] и [8], теорема 13 (для обратимого T) и следствие 14 доказаны в [7], а теорема 15 – в [2].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и правительством Республики Татарстан, проект 15-41-02433, и выделенными Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности субсидиями 1.1515.2017/ПЧ, 1.9773.2017/8.9.

Список литературы

[1] Istrăţescu V. *On some hyponormal operators* // Pacific J. Math. – 1967. – V. 22. –No. 3. – P. 413–417.

[2] Furuta T. *On the class of paranormal operators* // Proc. Japan Acad. – 1967. – V. 43. – No. 7. – P. 594–598.

[3] Kubrusly C.S. *Hilbert space operators. A problem solving approach.* – Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2003. –xvi+149 pp.

[4] Бикчентаев А.М. *Два класса τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 1. – С. 86–91.

[5] Бикчентаев А.М. *Паранормальные τ-измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана* // Матем. заметки (в печати).

[6] Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах.* – М.: Мир, 1970. – 352 с.

[7] Istrăţescu V., Saito T., Yoshino T. *On a class of operators* // Tôhoku Math. J.– 1966. – V. 18. – No. 4. – P. 410–413.

[8] Furuta T., Horie M., Nakamoto R. *A remark on a class of operators* // Proc. Japan Acad. – 1967. – V. 43. – No. 7. – P. 607–609.

Paranormal elements in normed algebra

A.M. Bikchentaev, S.A. Abed

Abstract

For a normed algebra $\mathcal{A}$ and $k \in \mathbb{N}$ we introduce and investigate the $\|\cdot\|$-closed classes

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \ \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \ \text{ for all } \ A \in \mathcal{A} \ \text{ with } \ \|A\| = 1\}.$$

We show that $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ for all $k \in \mathbb{N}$. If $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ then $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ for all $n \in \mathbb{N}$. If $\mathcal{A}$ is unital, $U, V \in \mathcal{A}$ are such that $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ and $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ then $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ for all $k \in \mathbb{N}$. In particular, if $\mathcal{A}$ is a unital C^*-algebra and $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ then $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ for all isometries $U \in \mathcal{A}$ and $k \in \mathbb{N}$. Let $\mathcal{A}$ be unital, then 1) if an element $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ is right invertible then the right inverse element $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$; 2) for $\|I\| = 1$ the class $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ consists of normaloid elements; 3) if the spectrum of an element $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ lies on unit circle then $\|TX\| = \|X\|$ for all $X \in \mathcal{A}$. If $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ then the class $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ coincides with the set of all paranormal operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$.

Keywords: Hilbert space, C*-algebra, paranormal operator, quasinilpotent operator, isometry, hyponormal operator, normaloid operator, normed algebra, unital algebra.