КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



На правах рукописи

Белова Наталия Евгеньевна

# РАССЛОЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ АССОЦИАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ

01.01.04. – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2001

Работа выполнена на кафедре геометрии
Казанского государственного университета.

**Научный руководитель:**
доктор физико-математических наук,
профессор Б.Н.Шапуков

**Официальные оппоненты:**
доктор физико-математических наук,
профессор А.В.Аминова
кандидат физико-математических наук,
доцент С.Ю.Петропавловская

Ведущая организация — Московский педагогический государственный университет.

Защита состоится "29" ноября 2001 г. в 15 часов 30 минут на заседании Диссертационного Совета по математике Д 212.081.10 Казанского государственного университета по адресу: 420008, Казань, ул.Кремлёвская 18, конференц-зал библиотеки.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета / Казань, ул.Кремлёвская, 18 /.

Автореферат разослан "28" октября 2001 г.

Учёный секретарь
Диссертационного Совета,
доцент /М.А.Малахальцев/

## Общая характеристика работы.

**Актуальность темы.** Геометрия пространств над алгебрами является одной из традиционных тем казанской геометрической школы. Еще П.А.Широков в 1925 году ввел важный класс А-пространств, впоследствии получивший название келеровых. Он же вслед за А.П.Котельниковым рассматривал вопрос о применении винтового исчисления к задачам дифференциальной геометрии.

В послевоенные годы исследования по применению алгебр в геометрии в Казанском университете были продолжены А.П.Норденом. Он и его ученики изучали геометрию биаксиальных пространств, биаффинных пространств, разнообразные применения простейших алгебр к вопросам линейчатой геометрии.

А.П.Широков построил теорию бипланарных пространств — многомерных обобщений биаксиальных пространств. За этим последовало изучение пространств со структурами, определяемыми алгебрами весьма общего вида в его докторской диссертации.

Таким образом, в работах А.П.Нордена, а затем А.П.Широкова и их учеников теория пространств над алгебрами сформировалась в новое направление, которое стало основным в исследованиях на кафедре геометрии Казанского университета.

В настоящее время представляют интерес изучение алгебраических структур на расслоенных многообразиях в связи с тем, что такого типа структуры находят многочисленные применения в механике и теоретической физике.

В частности, широко известное расслоение Хопфа тесно связано с алгеброй кватернионов. Аналогичным образом, как оказалось, можно получить расслоения исходя из других ассоциативных унитальных алгебр.

Из всего сказанного следует, что изучение расслоений, порожденных ассоциативными алгебрами, является актуальной задачей.

**Цель работы:** с помощью факторизации групп Ли обратимых элементов алгебр размерностей 3 и 4 по их подгруппам получить все возможные расслоения — аналоги расслоения Хопфа и исследовать геометрические свойства наиболее интересных.

**Научная новизна.** В диссертации рассмотрен новый подход к понятию расслоения Хопфа $p: \ S^3 \longrightarrow P(i)$ и на этой основе получены его аналоги. Установлена связь между указанными аналогами и теорией биаксиальных пространств различных типов.

**Методика исследования.** В работе используется классический аппарат тензорного исчисления, методы теории расслоенных пространств, а также методы теории ассоциативных алгебр и их представлений.

**Практическая и теоретическая значимость.** Работа имеет теоретическое значение.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на геометрическом семинаре Казанского университета (научный руководитель проф. Б.Н.Шапуков). Они были доложены на Международном геометрическом семинаре им. Н.И.Лобачевского (г. Казань, 1997 г.), на XII Международной школе-семинаре по теоретической и математической физике (г. Казань, 2000 г.) и на геометрическом семинаре Московского педагогического государственного университета (научный руководитель проф. В.Ф.Кириченко) в 2001 г.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано девять работ.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, раздела "Основные понятия и обозначения", двух глав, разбитых на параграфы и пункты, и списка литературы. Формулы обозначаются двумя цифрами, где первая означает номер главы, а вторая — номер формулы. Параграфы обозначаются двумя цифрами, а пункты — тремя, где первая означает номер главы, вторая — номер параграфа, а третья — номер пункта. Объем работы - 128 страниц, библиография содержит 71 наименование.

**Краткое содержание диссертации.**

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная унитальная алгебра размерности $n$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ — множество ее обратимых элементов. Это группа Ли по умножению. Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ — множество обратимых элементов $\mathfrak{B}$. $\tilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа Ли группы $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathfrak{A}}\,/\tilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Тогда расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \tilde{\mathfrak{A}}\,/\tilde{\mathfrak{B}})$, где $\pi$ — каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой $\tilde{\mathfrak{B}}$. Доказано, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра кватернионов, это главное расслоение изоморфно расслоению Хопфа. Исходя из такого подхода, в *первой главе* получены соответствующие расслоения для всех алгебр размерностей 3 и 4. Большинство получающихся расслоений тривиально. Показано, что только в в одном случае для алгебр размерности 3 и в 12 случаях для алгебр размерности 4 расслоения локально тривиальны, но не тривиальны. Для алгебр размерности 3 мы имеем локально тривиальное расслоение в случае алгебры $\mathfrak{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(i)$ при факторизации группы Ли $\tilde{\mathfrak{A}}$ ее обратимых элементов по подгруппе Ли обратимых двойных чисел. Базой этого расслоения является вещественная проективная прямая.

Для алгебр размерности 4 мы имеем локально тривиальные расслоения в случаях кватернионов, антикватернионов, полукватернионов, 4-алгебры типа XI и прямых сумм $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(i)$, $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}(\varepsilon)$. Данные об этих расслоениях приведены в таблице

| | | | |
|---|---|---|---|
| $IV_a\ \mathbb{H}$ | $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{H}_0$ | $\mathbb{R}(e_1) \cong \mathbb{C}$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_1) \cong P(i)$ |
| $IV_b\ \mathbb{H}'$ | $\tilde{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 \neq 0\}$ | $\mathbb{R}(e_1) \cong \mathbb{R}(e)$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_1) \subset P(e)$ |
| | | $\mathbb{R}(e_1 + e_3) \cong \mathbb{R}(\varepsilon)$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_1 + e_3) \subset P(\varepsilon)$ |
| $VII_a\ \mathbb{H}^0$ | $\tilde{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid (x^0)^2 + (x^1)^2 \neq 0\}$ | $\mathbb{R}(e_2) \cong \mathbb{R}(\varepsilon)$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_2) \cong P(\varepsilon)$ |
| | | $\mathbb{R}(e_2, e_3) \cong \mathfrak{B}_3$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_2, e_3) \cong P^1$ |
| XI | $\tilde{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid (x^0)^2 + (x^1)^2 \neq 0\}$ | $\mathbb{R}(e_2) \cong \mathbb{R}(\varepsilon)$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_2) \cong P(\varepsilon)$ |
| | | $\mathbb{R}(e_2, e_3) \cong \mathfrak{B}_3$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_2, e_3) \cong P^1$ |
| XIII $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}$ | $\tilde{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid x^0 \neq 0,\ x^0 + x^1 \neq 0,\ (x^0 + x^2)^2 + (x^3)^2 \neq 0\}$ | $\mathbb{R}(e_1, e_2) \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_1, e_2) \cong P^1$ |
| XV $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ | $\tilde{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid (x^0 + x^1)^2 + (x^2 + x^3)^2 \neq 0,\ (x^0 - x^1)^2 + (x^2 - x^3)^2 \neq 0\}$ | $\mathbb{R}(e_1, e_2 + e_3) \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{C}$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_1, e_2 + e_3) \cong P^1$ |
| XVI $\mathbb{C}\oplus\mathbb{R}(\varepsilon)$ | $\tilde{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid (x^0 + x^1)^2 + (x^2)^2 \neq 0,\ x^0 \neq 0\}$ | $\mathbb{R}(e_1) \cong \mathbb{R}(e)$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_1) \cong P^1 \times \mathbb{R}$ |
| | | $\mathbb{R}(e_1, e_3) \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}(\varepsilon)$ | $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(e_1, e_3) \cong P^1$ |

В первой колонке приведены типы алгебр, во второй — группы Ли их обратимых элементов, в третьей — подалгебры, факторизация по подгруппам Ли обратимых элементов которых дает нетривиальные расслоения, в четвертой указаны базы этих расслоений.

Во *второй главе* более подробно изучены расслоения, соответствующие алгебрам кватернионов и антикватернионов, и проективизация этих расслоений.

В §1 рассматривается расслоение ненулевых кватернионов по подгруппе ненулевых комплексных чисел над двумерной сферой $S^2$, изоморфное расслоению Хопфа. Построено горизонтальное распределение, ортогональное слоям. Получены коэффициенты связности, определяемой этим распределением, и вычислены компоненты тензора кривизны этой связности в адаптированном репере. Далее рассматривается проективизация этого расслоения $(B_3, p, S^2)$. Его тотальное пространство $B_3$ является биаксиальным пространством эллиптического типа и одновременно эллиптическим пространством, метрика $G_{AB}$ которого порождается нормой на алгебре кватернионов. Слоями расслоения являются прямые абсолютной линейной конгруэнции.

Получена нелинейная связность $H$ расслоения $(B_3, p, S^2)$, порождаемая указанной выше связностью и вычислена существенная компонента тензора кривизны этой связности. Доказана следующая

**Теорема.** *Метрический тензор $G_{AB}$ $H$-проектируем в смысле Егиазаряна в стандартную метрику $g_{ij}$ на сфере. Соответствующая риманова связность также $H$-проектируема в связность на сфере.*

Исследованы деривационные уравнения адаптированного репера проективного расслоения, выяснен смысл их коэффициентов и получены условия интегрируемости.

Исследованы аффиноры $f_1$, $f_2$, $f_3$ регулярного представления алгебры кватернионов. Показана их проектируемость в смысле Егиазаряна на биаксиальное пространство $B_3$ в аффиноры $\check{f}_1$, $\check{f}_2$, $\check{f}_3$. Доказана следующая

**Теорема.** *Тензор $\check{f}_1$ $H$-проектируется в аффинор комплексной структуры на $P(i)$, а тензоры $\check{f}_2$, $\check{f}_3$ $H$-проектируются в нулевой аффинор.*

В §2 аналогичным образом рассмотрено расслоение группы Ли обратимых антикватернионов по подгруппе Ли обратимых двойных чисел над двумерной сферой $S^2_1$ псевдоевклидова пространства. Это расслоение является гиперболическим аналогом расслоения Хопфа. Построено горизонтальное распределение, ортогональное слоям. Получены коэффициенты связности, определяемой горизонтальным распределением, и вычислены компоненты тензора кривизны этой связности в адаптированном репере. Затем рассмотрена проективизация этого расслоения $(\tilde{B}_3, p, \tilde{\mathbb{H}}'/\tilde{\mathbb{R}}(e_1))$. Здесь тотальное пространство $\tilde{B}_3$ является биаксиальным пространством гиперболического типа без линейчатой гиперквадрики $Q$ : $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$. В то же время это гиперболическое пространство, метрика $G_{AB}$ которого порождается нормой на алгебре антикватернионов. Слоями расслоения являются прямые абсолютной линейной конгруэнции.

Вычислены коэффициенты нелинейной связности $H$ расслоения $(\tilde{B}_3, p, \tilde{\mathbb{H}}'/\tilde{\mathbb{R}}(e_1))$, порождаемой связностью расслоения алгебры антикватернионов, и подсчитана существенная компонента тензора кривизны этой связности. Доказана следующая

**Теорема.** *Метрический тензор $G_{AB}$ является $H$-проектируемым в смысле Егиазаряна в стандартную метрику $g_{ij}$ на сфере $S_1^2$. Соответствующая риманова связность также $H$-проектируема.*

Получены деривационные уравнения адаптированного репера проективного расслоения, выяснен смысл их коэффициентов и найдены условия интегрируемости.

Показана проектируемость на биаксиальное пространство аффиноров $f_1$, $f_2$, $f_3$ регулярного представления алгебры антикватернионов в аффиноры $\check{f}_1$, $\check{f}_2$, $\check{f}_3$ биаксиального пространства. Доказана следующая

**Теорема.** *Тензор $\check{f}_1$ $H$-проектируется в аффинор двойной структуры на базе, а тензоры $\check{f}_2$, $\check{f}_3$ $H$-проектируются в нулевой аффинор.*

В §3 рассматривается расслоение группы Ли обратимых антикватернионов по подгруппе Ли обратимых дуальных чисел над двумерной сферой полуевклидова пространства. Этот случай отличается от двух предыдущих тем, что подалгебра касается изотропного конуса, поэтому нельзя выбрать горизонтальное распределение ортогонально слоям. Построена связность, определяемая горизонтальным распределением, натянутым на векторы $\{e_2 x,\ e_3 x\}$, где $e_2$, $e_3$ — элементы базиса. Вычислены коэффициенты этой связности. Далее рассматривается проективизация этого расслоения $(\tilde{B}_3, p, \tilde{\mathbb{H}}'/\tilde{\mathbb{R}}(e_1 + e_3))$. Тотальное пространство $\tilde{B}_3$ является биаксиальным пространством параболического типа без линейчатой гиперквадрики $Q$ : $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$. Одновременно это гиперболическое пространство, метрика $G_{AB}$

которого порождается нормой на алгебре антикватернионов. Слоями расслоения являются прямые абсолютной линейной конгруэнции.

Найдены нелинейная связность $H$, порождаемая связностью расслоения алгебры антикватернионов, и тензор кривизны этой связности. Доказана следующая

**Теорема.** *Ни при каком выборе инфинитезимальной связности в расслоении* $(\tilde{B}_3, p, \tilde{\mathbb{H}}'/\tilde{\mathbb{R}}(e_1+e_3))$ *метрика* $G$ *не проектируется на базу.*

Исследованы деривационные уравнения адаптированного репера проективного расслоения, выяснен смысл их коэффициентов и получены условия интегрируемости.

Показано, что проекция $\tilde{\Omega}$ на биаксиальное пространство структурного аффинора $\Omega$ подалгебры дуальных чисел проектируется в аффинор дуальной структуры на 2-сфере полуевклидова пространства.

## Основные результаты, выносимые на защиту.

**1.** Получены все расслоения групп Ли обратимых элементов алгебр размерности 3 и 4 по подгруппам Ли обратимых элементов их унитальных подалгебр размерности 2 и 3.

**2.** Построены и исследованы проективизации: расслоения группы Ли ненулевых кватернионов по подгруппе Ли ненулевых комплексных чисел над двумерной сферой $S^2$, расслоения группы Ли обратимых антикватернионов по подгруппе Ли обратимых двойных чисел над двумерной сферой $S^2_1$ псевдоевклидова пространства и расслоения группы Ли обратимых антикватернионов по подгруппе Ли обратимых дуальных чисел над двумерной сферой полуевклидова пространства.

**3.** В каждом случае найдена нелинейная проективная связность. Для всех проективных расслоений получены деривационные уравнения адаптированного репера и условия их интегрируемости, выяснен геометрический смысл коэффициентов.

**4.** Доказана проектируемость метрики, определяемой нормой на соответствующей алгебре, в смысле Егиазаряна. Доказана также проектируемость аффиноров регулярного представления.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность научному руководителю профессору Б.Н.Шапукову за постановку задачи и за постоянную помощь при выполнении работы, а также благодарность участникам Казанского геометрического семинара за внимание, критику и советы.

## Публикации автора по теме исследования.

[1] Белова Н. Е. *Вращения псевдоевклидова пространства*/ Междун. геом. семинар им. Н. И. Лобачевского. "Соврем. геом. и теория физич. полей". Тезисы докл.— Казань, 1997. — С. 17.

[2] Белова Н. Е. *Аналоги расслоения Хопфа*// Материалы всероссийской молодежной научной школы-конференции по математическому моделированию, геометрии и алгебре.— Казань: Изд. Казанск. матем. об-ва.— 1998.— С. 169-174.

[3] Белова Н. Е. *Расслоения алгебр размерностей 3 и 4*/ Междун. летняя школа-семинар по совр. пробл. теоретич. и математич. физики "XI Петровские чтения 1999". Тезисы докл.— Казань, 1999.— С. 16.

[4] Белова Н. Е. *Расслоения алгебр размерности 3*/ Казанск. ун-т.— Казань, 1999.— 9 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.10.99, N 3036—В99.

[5] Белова Н. Е. *Расслоения алгебр размерности 4*/ Казанск. ун-т.— Казань, 1999.— 44 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.10.99, N 3037—В99.

[6] Белова Н. Е. *Расслоение биаксиального пространства, порожденное алгеброй кватернионов*/ XII Междун. летняя школа-семинар по теоретич. и математич. физики "Петровские чтения". Тезисы докл.— Казань, 2000, С. 17.

[7] Белова Н. Е. *Расслоение биаксиального пространства, порожденное алгеброй кватернионов*// Новейшие проблемы теории поля. 1999-2000.— Казань, 2000.— С. 439-445.

[8] Белова Н. Е. *Расслоения биаксиальных пространств, порожденные алгебрами кватернионов и антикватернионов*/ Ка-

занск. ун-т.— Казань, 2000.— 22 с.— Деп. в ВИНИТИ 23.10.00, N 2680—В00.

[9] Белова Н. Е. *Расслоения биаксиальных пространств, порожденные алгеброй антикватернионов*// Движения в обобщенных пространствах. Межвузовский сборник научных трудов.— Пенза: Изд. Пензенск. гос. педагогич. ун-та.— 2000.— С. 17-30.

2 -

Лиц. на изд. деятельность № 0311 от 03.08.2000
Подписано в печать 23.10.2001
Формат 60x84 1/16
Тираж 100 экз. Заказ 137.
ООО «Издательство РегентЪ»