



О τ -КОМПАКТНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ τ -ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

© 2017 г. А. М. БИКЧЕНТАЕВ

Аннотация. Пусть \mathcal{M} — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ — точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} . Получены неравенства для перестановок произведений τ -измеримых операторов. Эти неравенства применены для получения новых субмажоризаций (по Харди—Литтлвуду—Полюа) произведений τ -измеримых операторов и вывода достаточного условия ортогональности некоторых неотрицательных τ -измеримых операторов. Установлены достаточные условия τ -компактности произведений самосопряженных τ -измеримых операторов. Получен критерий τ -компактности произведения неотрицательного τ -измеримого оператора с произвольным τ -измеримым оператором. Приведен пример, показывающий существенность неотрицательности одного из сомножителей. Установлен критерий элементарности произведения неотрицательных операторов из \mathcal{M} . Результаты являются новыми и для $*$ -алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в \mathcal{H} , снабженной каноническим следом $\tau = \text{tr}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный полуконечный след, τ -измеримый оператор, τ -компактный оператор, элементарный оператор, нильпотент, перестановка, субмажоризация.

AMS Subject Classification: 47C15, 46L51

Введение. Пусть \mathcal{M} — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ — точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} . Произведения τ -измеримых операторов возникают в различных задачах теории некоммутативного интегрирования (например, в [24] при определении дуального по Кёте пространства; в неравенствах Голдена—Томпсона [3] и Паейрлса—Боголюбова [16] и др.). Достаточные условия интегрируемости произведений τ -измеримых операторов были найдены в [18]. Настоящая работа продолжает исследования автора (см. [2, 5]), в которых были установлены критерии τ -компактности произведений неотрицательных τ -измеримых операторов. Близкие вопросы изучались в [4, 12, 14, 31]. Компактные произведения операторов были исследованы в [20, 21, 23, 27–29, 32]. Приложения компактных (соответственно, τ -компактных) произведений операторов см., например, в [26] (соответственно, в [15]).

В разделе 3 получены неравенства для перестановок произведений τ -измеримых операторов. Эти неравенства применены для получения новых субмажоризаций (по Харди—Литтлвуду—Полюа) произведений τ -измеримых операторов и вывода достаточного условия ортогональности некоторых неотрицательных τ -измеримых операторов. В разделе 4 установлены достаточные условия τ -компактности произведений самосопряженных τ -измеримых операторов. Получен критерий τ -компактности произведения неотрицательного τ -измеримого оператора с произвольным τ -измеримым оператором. Приведен пример, показывающий существенность неотрицательности одного из сомножителей. Из известного свойства перестановок (см. п. (6) леммы 2.1) имеем: неотрицательный оператор $A \in \mathcal{M}$ элементарен тогда и только тогда, когда элементарен A^p для всех $p > 0$. В теореме 4.2 показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \mathcal{M}$: элементарность оператора AB эквивалентна элементарности операторов $A^p B^r$ для всех $p, r > 0$. Получены приложения полученных результатов к симметричным пространствам на (\mathcal{M}, τ) . Результаты являются новыми и для $*$ -алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в \mathcal{H} , снабженной каноническим следом $\tau = \text{tr}$.