А. Н. Абызов, А. А. Туганбаев, Формальные матрицы и кольца, близкие к регулярным, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2016, том 21, выпуск 1, 5–21

Формальные матрицы и кольца, близкие к регулярным*

А. Н. АБЫЗОВ
Казанский государственный (федеральный) университет
e-mail: Adel.Abyzov@ksu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, регулярное кольцо, полуартиново кольцо, V-кольцо, чистое кольцо.

Аннотация

Работа содержит как новые, так и известные результаты о кольцах формальных матриц, близких к регулярным. Основные результаты приведены с доказательствами.

Abstract

A. N. Abyzov, A. A. Tuganbaev, Formal matrices and rings close to regular, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 5—21.

This paper contains new and known results on formal matrix rings close to regular. The main results are given with proofs.

1. Предварительные сведения

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — кольца, M_{ij} — (R_i, R_j)-бимодули для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, причём $M_{ii} = R_i$. Пусть также $\varphi_{ijk}\colon M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$ — такие (R_i, R_k)-бимодульные гомоморфизмы, что φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Обозначим $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. Через K обозначим множество всех $(n \times n)$-матриц (m_{ij}) с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения K будет кольцом в точности тогда, когда $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \leqslant i, k, l, j \leqslant n$.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10013).

Полученное кольцо K называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается $K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$. Если

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \text{ —}$$

кольцо формальных матриц второго порядка, то упорядоченный набор $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ называется *контекстом Мориты* или *ситуацией предэквивалентности*.

Кольцо формальных матриц $K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, в котором $M_{ij} = R$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, называется *кольцом формальных матриц над R порядка n* и обозначается $K_n(R)$ или $K_n(R\colon \{\varphi_{ikj}\})$. Для кольца формальных матриц над R порядка n $K_n(R\colon \{\varphi_{ijk}\})$ положим $\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$ для всех $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. Тогда $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$. Для любого $a \in R$ имеем $a\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(a \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes a) = \eta_{ijk}a$. Таким образом, $\eta_{ijk} \in C(R)$ и выполняются следующие соотношения:

1) $\eta_{iij} = \eta_{ijj} = 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$,
2) $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}$, $\leqslant i, j, k, l \leqslant n$.

Первое соотношение выполняется, поскольку φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы. В силу ассоциативности операции $\circ$ имеем $\eta_{ijk}\,\eta_{ikl}\,abc = \eta_{ijl}\,\eta_{jkl}\,abc$ для всех $a, b, c \in R$. Положив $a = b = c = 1$, получаем второе соотношение. Для любого набора $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ центральных элементов R, удовлетворяющих первому и второму соотношениям, можно положить $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$. Непосредственная проверка показывает, что $K_n(R\colon \{\varphi_{ikj}\})$ — кольцо формальных матриц над R порядка n. Таким образом, кольцо формальных матриц $K_n(R\colon \{\varphi_{ikj}\})$ однозначно определяется набором центральных элементов $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$. В этом случае кольцо формальных матриц $K_n(R\colon \{\varphi_{ikj}\})$ мы будем обозначать через $K_n(R\colon \{\eta_{ikj}\})$.

Пусть R — кольцо, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C(R)$, $n \geqslant 2$. Определим η_{ijk} для всех $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$ по формуле

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ \beta_j, & \text{если } i,\ j,\ k \text{ различны}, \\ \beta_i\beta_j, & \text{если } i = k \neq j. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что набор $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ обладает свойствами 1) и 2) и, следовательно, определяет кольцо формальных матриц над R порядка n. Кольцо формальных матриц $K_n(R\colon \{\varphi_{ijk}\})$, определяемое множеством $\{\eta_{ijk}\}$ обозначается через $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. Таким образом, $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ — это множество всех матриц порядка n над R с обычной операцией сложения и операцией умножения, определённой следующим образом: для двух матриц (a_{ij}) и (b_{ij}) порядка n над R

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}), \quad \text{где} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta_i^{\delta_{ij} - \delta_{ik}} \beta_k^{1 - \delta_{jk}} a_{ik} b_{kj}.$$

В последнее время кольца формальных матриц и модули над ними активно изучаются. Модули над кольцом формальных матриц рассматривались в [7, 15—18]. Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц изучаются в [9]. Различные кольцевые свойства колец формальных матриц изучались в [17, 20, 21]. Проблеме изоморфизма для колец формальных матриц посвящены работы [6, 21]. Решётка идеалов в таких кольцах изучалась в [5].

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

X — правый R-модуль, Y — правый S-модуль и определены R-модульный гомоморфизм $f\colon Y \otimes_S N \to X$ и S-модульный гомоморфизм $g\colon X \otimes_R M \to Y$. Положим $yn := f(y \otimes n)$, $xm := g(x \otimes m)$ и потребуем выполнение равенств $(yn)m = y(nm)$ и $(xm)n = x(mn)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, $m \in M$, $n \in N$. В этом случае группа вектор-строк (X, Y) естественным образом наделяется структурой правого K-модуля. Несложно показать что любой правый K-модуль можно представить в виде модуля вектор-строк. Гомоморфизмы K-модулей можно представить в виде пары, состоящей из R-гомоморфизма и S-гомоморфизма. А именно, если $\Gamma\colon (X, Y) \to (X', Y')$ — гомоморфизм, то найдутся R-гомоморфизм $\alpha\colon X \to X'$ и S-гомоморфизм $\beta\colon Y \to Y'$, такие что $\Gamma(x, y) = \big(\alpha(x), \beta(y)\big)$. При этом выполняются соотношения $\alpha(yn) = \beta(y)n$ и $\beta(xm) = \alpha(x)m$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, $m \in M$, $n \in N$.

Напомним некоторые конструкции из [7]. Пусть A — ненулевой правый R-модуль. Через $H(A)$ будем обозначать правый K-модуль $\big(A, \mathrm{Hom}_R(N, A)\big)$, у которого гомоморфизмами модульного умножения являются отображение

$$A \otimes M \to \mathrm{Hom}_R(N, A), \quad a \otimes m \mapsto \big(n \mapsto a(mn)\big),$$

и отображение

$$\mathrm{Hom}_R(N, A) \otimes N \to A, \quad f \otimes n \mapsto f(n).$$

Через $T(A)$ будем обозначать правый K-модуль $(A, A \otimes M)$, у которого гомоморфизмами модульного умножения являются тождественный автоморфизм $A \otimes M \to A \otimes M$ и отображение

$$(A \otimes M) \otimes N \to A, \quad (a \otimes m)n = amn.$$

Радикал Джекобсона и наибольший регулярный идеал кольца R обозначаются через $J(R)$ и $\mathrm{Reg}(R)$ соответственно. Радикал Джекобсона правого R-модуля M обозначается через $J(M)$.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} —$$

кольцо формальных матриц. Бимодуль M называется *N-регулярным* (*N-вполне идемпотентным справа*), если для каждого $m \in M$ выполнено условие $m \in mNm$ (соответственно $m \in mNmS$). Аналогично определяются понятия M-регулярности и M-вполне идемпотентности справа бимодуля N.

2. Кольца формальных матриц, близкие к регулярным

Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n и для каждых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ через $\mathrm{Reg}(M_{ij})$ обозначим множество вида $\{m \in M_{ij} \mid m \in mM_{ji}m\}$.

Теорема 2.1 [25]. *Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n имеет место равенство*

$$\mathrm{Reg}(K) = \{r \in K \mid M_{ti}r_{ij}M_{js} \subset \mathrm{Reg}(M_{ts})\}.$$

Следствие 2.2. *Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n следующие условия равносильны:*

1) *K — регулярное кольцо;*
2) *для каждой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и каждого элемента $m \in M_{ij}$ выполнено условие $m \in mM_{ji}m$.*

Кольцо R называется I_0-кольцом, если для каждого элемента $r \in R \setminus J(R)$ существует элемент $s \in R \setminus \{0\}$, такой что $s = srs$.

Теорема 2.3 [25]. *Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n следующие условия равносильны:*

1) *K — I_0-кольцо;*
2) *для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ кольцо R_i является I_0-кольцом.*

Кольцо R называется *вполне идемпотентным справа* (*слева*), если $I^2 = I$ для каждого правого (левого) идеала I кольца R. Если в кольце R равенство $I^2 = I$ выполняется для каждого идеала I кольца R, то кольцо R называется *вполне идемпотентным*. Элемент r кольца R называется *вполне идемпотентным справа*, если $rR = rRrR$. Идеал I кольца R называется *вполне идемпотентным справа*, если каждый его элемент вполне идемпотентен справа. Согласно [10, 12.17] каждое кольцо R обладает наибольшим вполне идемпотентным справа идеалом, который обозначается через $I(R)$.

Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n и для каждых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ через $I(M_{ij})$ обозначим множество вида $\{m \in M_{ij} \mid m \in mM_{ji}mR_j\}$. Элемент кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$, у которого компонента, находящаяся на пересечении i-й строки и j-го столбца равна r, а остальные компоненты равны нулю, будем обозначать через re_{ij}.

Теорема 2.4. *Для произвольного кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n имеет место равенство*

$$I(K) = \{r \in K \mid M_{ti}r_{ij}M_{js} \subset I(M_{ts})\}.$$

Доказательство. Обозначим множество $\{r \in K \mid M_{ti}r_{ij}M_{js} \subset I(M_{ts})\}$ через I'. Из доказательства теоремы 5.3 из [4] следует, что I' — идеал кольца K. Покажем, что $I(K) \subset I'$. Так как $e_{ii}Ke_{kj}I(K)e_{ss}Ke_{tt} \subset I(K)$, то достаточно показать, что у каждого элемента идеала $I(K)$ все компоненты вполне идемпотентны справа. Пусть $a \in I(K)$. Тогда для каждой пары индексов i, j имеют место равенства

$$e_{ii}ae_{jj} = e_{ii}ae_{jj}\left(\sum_{k=1}^{m} b_k e_{ii}ae_{jj}c_k\right) = e_{ii}ae_{jj}\left(\sum_{k=1}^{m} b_k e_{ii}ae_{jj}c_k e_{jj}\right),$$

$$a_{ij} = a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}(b_k)_{ji}a_{ij}(c_k)_{jj}\right).$$

Покажем, что $I' \subset I(K)$. Предположим, что идеал I' содержит элемент, который не является вполне идемпотентным справа. Выберем в I' не вполне идемпотентный элемент r, у которого строка $r_{11}, \ldots, r_{1n}, \ldots, r_{n1}, \ldots, r_{nn}$ имеет наибольшее количество первых нулей. Пусть $r_{i_0j_0}$ — первый ненулевой элемент в этой строке. Имеет место равенство

$$r_{i_0j_0} = r_{i_0j_0}\sum_k a_k r_{i_0j_0} b_k,$$

где $a_k \in M_{j_0i_0}$, $b_k \in R_{j_0j_0}$ для каждого k. Тогда

$$r - r\sum_k a_k e_{j_0i_0} r b_k e_{j_0j_0} =$$
$$= \sum_{i,j} r_{ij}e_{ij} - \left(\sum_{i,j} r_{ij}e_{ij}\right)\left(\sum_k a_k e_{j_0i_0}\left(\sum_{i,j} r_{ij}e_{ij}\right) b_k e_{j_0j_0}\right) = \sum_{i,j} g_{ij}e_{ij},$$

где $g_{ij} = r_{ij}$, если $j \neq j_0$, и

$$g_{ij_0} = r_{ij_0} - \sum_k r_{ij_0}a_k r_{i_0j_0} b_k.$$

Ясно, что $g_{ij} = 0$, если либо $i < i_0$, либо $i = i_0$, $j < j_0$, либо $i = i_0$, $j = j_0$. Следовательно, в силу выбора элемента r элемент

$$r - r\sum_k a_k e_{j_0i_0} r b_k e_{j_0j_0}$$

является вполне идемпотентным справа. Тогда из [4, лемма 5.2] следует вполне идемпотентность элемента r, что противоречит нашим исходным предположениям. □

Следствие 2.5. *Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n следующие условия равносильны:*

1) *K — вполне идемпотентное справа кольцо;*
2) *для каждой пары индексов $1 \leqslant i,j \leqslant n$ и каждого элемента $m \in M_{ij}$ выполнено условие $m \in mM_{ji}mR_j$.*

Следующее утверждение вытекает из следствий 2.2 и 2.5.

Следствие 2.6. *Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, у которого для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ кольцо R_i коммутативно, следующие условия равносильны*:

1) K — *вполне идемпотентное справа кольцо*;
2) K — *вполне идемпотентное слева кольцо*;
3) K — *регулярное кольцо.*

Следствие 2.7. *Пусть $K = K_n(R\colon \{\eta_{ikj}\})$ — кольцо формальных матриц над R порядка n.*

1. *Если никакой элемент из множества $\{\eta_{ikj}\}$ не является делителем нуля, то имеют место следующие равенства*:

   а) $I(K) = \begin{pmatrix} I(R) & I(R) & \dots & I(R) \\ I(R) & I(R) & \dots & I(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I(R) & I(R) & \dots & I(R) \end{pmatrix}$;

   б) $\mathrm{Reg}(K) = \begin{pmatrix} \mathrm{Reg}(R) & \mathrm{Reg}(R) & \dots & \mathrm{Reg}(R) \\ \mathrm{Reg}(R) & \mathrm{Reg}(R) & \dots & \mathrm{Reg}(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Reg}(R) & \mathrm{Reg}(R) & \dots & \mathrm{Reg}(R) \end{pmatrix}$.

2. *K вполне идемпотентно справа, если и только если R вполне идемпотентно справа и $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$.*
3. *K регулярно, если и только если R регулярно и $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$.*

Доказательство. Для произвольных элементов $r_1, r_2 \in R$ через $r_1 *_{ijk} r_2$ будем обозначать выражение $\phi_{ijk}(r_1 \otimes r_2)$.

Докажем утверждение 1. Покажем, что выполняется равенство из пункта а). Обозначим правую часть пункта а) через I'. Включение $I(K) \subset I'$ непосредственно следует из теоремы 2.4. Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть $r \in I'$. Тогда для произвольных $1 \leqslant i, j, s, t \leqslant n$ и $a, b \in R$ имеют место равенства

$$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst} \sum_{1\leqslant l\leqslant k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l,$$

$$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij} \sum_{1\leqslant l\leqslant k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l,$$

$$(a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b = \big((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b\big) \sum_{1\leqslant l\leqslant k} \Big(c_l *_{tst} \big((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b\big)\Big) d_l.$$

Тогда согласно теореме 2.4 $r \in I(K)$. Равенство из пункта б) доказывается аналогично.

Перейдём к доказательству утверждения 2. Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Из следствия 2.5 для произвольных $1 \leqslant i, j \leqslant n$ следует равенство

$$1 = \sum_{1\leqslant t\leqslant k} r_t *_{iji} s_t = \eta_{iji} \sum_{1\leqslant t\leqslant k} r_t s_t.$$

Таким образом, элементы вида η_{iji} обратимы в R. Поскольку для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место равенство $\eta_{iji} = \eta_{ijk}\eta_{jik}$, то $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$.

Импликация $\Longleftarrow$ непосредственно следует из первого пункта исходной теоремы.

Доказательство утверждения 3 аналогично доказательству утверждения 2. $\square$

3. Полуартиновы и max-кольца формальных матриц

Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если каждый ненулевой правый R-модуль содержит простой подмодуль. Если над кольцом R каждый ненулевой правый модуль содержит максимальный подмодуль, то кольцо R называется *правым* max-*кольцом*.

Теорема 3.1 [2, теорема 4.2]. *Для кольца формальных матриц*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

следующие условия равносильны:

1) *K — полуартиново справа кольцо*;
2) *R и S — полуартиновы справа кольца.*

Доказательство. Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 2)$. Пусть A — ненулевой правый R-модуль. По условию правый K-модуль $H(A) = \big(A, \mathrm{Hom}_R(N, A)\big)$ содержит простой подмодуль (X, Y). Если $X = 0$, то для каждого $f \in Y$ имеем $f(N) = fN = 0$. Следовательно, $Y = 0$, что невозможно. Таким образом, $X \neq 0$, и из простоты модуля (X, Y) следует, что X — простой подмодуль R-модуля A. Из приведённых выше рассуждений следует, что каждый ненулевой правый R-модуль содержит простой подмодуль, и следовательно, R — полуартиново справа кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать, что S — полуартиново справа кольцо.

Докажем импликацию $2) \Longrightarrow 1)$. Пусть (A, B) — правый K-модуль и (A_0, B_0) — его ненулевой подмодуль. Без ограничения общности можно считать, что $A_0 \neq 0$. Так как R и S — полуартиновы справа кольца, то $\mathrm{Soc}(A)$ существен в A и $\mathrm{Soc}(B)$ существен в B. Тогда модуль A_0 содержит простой подмодуль aR, где $a \in A_0$.

Если $aRM = aM = 0$, то $(aR, 0)$ — простой подмодуль K-модуля (A_0, B_0). Если $aM \neq 0$, то из существенности подмодуля $\mathrm{Soc}(B)$ в модуле B следует, что S-модуль aM содержит простой подмодуль bS, где $b \in B_0$. Ясно, что элемент b имеет вид $b = am$, где $m \in M$. Если $bN = 0$, то $(0, bS)$ — простой подмодуль K-модуля (A_0, B_0). Если $bN \neq 0$, то $bN = amN \subset aMN$ — ненулевой подмодуль простого модуля aR. Следовательно, $bN = aR$. Из равенства $aRM = bNM$

и простоты модуля bS следует, что $aRM = bS$. Так как aR — простой R-модуль, bS — простой S-модуль и $aRM = bS$, $bSN = aR$, то (aR, bS) — простой подмодуль K-модуля (A_0, B_0). $\square$

Теорема 3.2 [2, теорема 4.3]. *Для кольца формальных матриц*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

следующие условия равносильны:

1) K — *правое* $\max$-*кольцо*;
2) R *и* S — *правые* $\max$-*кольца.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть A — ненулевой правый R-модуль. По условию правый K-модуль $T(A) = (A, A \otimes M)$ содержит максимальный подмодуль (X, Y). Если $X = A$, то $Y = A \otimes M$, что невозможно. Таким образом, $X \neq A$, и из максимальности подмодуля (X, Y) следует, что X — максимальный подмодуль R-модуля A. Из приведённых выше рассуждений следует, что каждый ненулевой правый R-модуль содержит максимальный подмодуль, и следовательно, R — правое $\max$-кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать, S — правое $\max$-кольцо.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть (A, B) — ненулевой правый K-модуль и (X, Y) — собственный подмодуль модуля (A, B). Так как R, S — правые $\max$-кольца, то ненулевые фактор-модули модулей A, B содержат максимальные подмодули. Если $(A/X)M \neq B/Y$, то B обладает максимальным подмодулем Y', таким что $(A/X)M \subset Y'/Y$. В этом случае несложно заметить, что модуль $(A/X, Y'/Y)$ является максимальным подмодулем модуля $(A/X, B/Y)$. Если $(B/Y)M \neq A/X$, то аналогичными рассуждениями можно показать, что модуль $(A/X, B/Y)$ содержит максимальный подмодуль. Предположим, что $(A/X)M = B/Y$ и $(B/Y)N = A/X$. Модуль A обладает максимальным подмодулем A_0, таким что $X \subset A_0$. В модуле B рассмотрим подмодуль B_0, для которого выполнено равенство

$$B_0/Y = \{\bar{b} \in B/Y \mid \bar{b}N \subset A_0/X\}.$$

Ясно, что $B_0/Y \neq B/Y$ и $(A_0/X)M \subset B_0/Y$. Покажем, что B_0 — максимальный подмодуль S-модуля B. Пусть $\bar{b} \notin B_0/Y$. Тогда $\bar{b}N \not\subseteq A_0/X$, и следовательно,

$$\bar{b}N + A_0/X = A/X, \quad \bar{b}NM + (A_0/X)M = (A/X)M = B/Y.$$

Таким образом, равенство $\bar{b}S + B_0/Y = B/Y$ выполнено для любого элемента $\bar{b} \in (B/Y) \setminus (B_0/Y)$, и следовательно, $(B/Y)/(B_0/Y)$ — простой S-модуль. Поскольку

$$(A_0/X)M \subset B_0/Y, \quad (B_0/Y)N \subset A_0/X,$$

то $(A_0/X, B_0/Y)$ — подмодуль T-модуля $(A/X, B/Y)$. Несложно заметить, что правый K-модуль $\big((A/X)/(A_0/X), (B/Y)/(B_0/Y)\big)$ имеет длину не больше двух. Следовательно, подмодуль (X, Y) содержится в максимальном подмодуле модуля (A, B). $\square$

Описание совершенных справа колец формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

было получено в [7] в случае, когда $MN = 0$, $NM = 0$, и в [20] в случае, когда правые модули M_S, N_R являются конечно порождёнными.

Следствие 3.3. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Кольцо формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n является полуартиновым справа (правым $\max$-кольцом) в точности тогда, когда R_i является полуартиновым справа кольцом (правым $\max$-кольцом) для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$.*
2. *Кольцо формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n является совершенным справа в точности тогда, когда R_i является совершенным справа кольцом для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из теорем 3.1 и 3.2. Утверждение 2 следует из [10, 6.48] и теоремы 3.1. □

4. V-кольца и SV-кольца формальных матриц

Кольцо, над которым каждый простой правый модуль является инъективным, называется *правым V-кольцом*. Полуартиново справа правое V-кольцо называется *правым SV-кольцом*.

Лемма 4.1. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц, модуль M N-вполне идемпотентен справа и модуль N M-вполне идемпотентен справа.

1. *Если (A_0, B_0) — подмодуль K-модуля (A, B), то следующие условия равносильны:*
   а) *(A_0, B_0) — существенный подмодуль K-модуля (A, B);*
   б) *подмодуль A_0 существен в R-модуле A и подмодуль B_0 существен в S-модуле B.*
2. *Если A — простой правый R-модуль, то правый K-модуль $T(A)$ также является простым.*
3. *Если A — простой правый R-модуль и $T(A)$ — инъективный правый K-модуль, то модуль A инъективен.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Докажем импликацию а) $\Longrightarrow$ б). Пусть a — ненулевой элемент модуля A. Так как (A_0, B_0) — существенный подмодуль K-модуля (A, B), то для некоторого элемента

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

из K имеем

$$(a,0)\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in (A_0,B_0)\setminus\{(0,0)\}.$$

Тогда $ar\in A_0$, $am\in B_0$. Если $ar\neq 0$, то $aR\cap A_0\neq 0$. Предположим, что $ar=0$. Тогда $am\neq 0$. Так как по условию $m\in mNmS$, то $amN\neq 0$. Поскольку $B_0N\subset A_0$, то $amN\subset A_0\cap aR$. Из приведённых выше рассуждений следует, что $aR\cap A_0\neq 0$. Таким образом, подмодуль A_0 существен в модуле A. Аналогично показывается существенность подмодуля B_0 в модуле B.

Импликация б) $\Longrightarrow$ а) проверяется непосредственно.

Докажем утверждение 2. Пусть $A=aR$. Покажем, что $T(aR)$ — простой правый K-модуль. Если $aR\otimes M=0$, то простота модуля $T(aR)$ очевидна. Предположим, что $aR\otimes M\neq 0$. Покажем, что $aR\otimes M=a\otimes M$ — простой правый S-модуль. Пусть $a\otimes m$ — произвольный ненулевой элемент из $a\otimes M$. Если $(a\otimes m)N=0$, то $amN=0$. Так как M N-вполне идемпотентен справа, то имеет место равенство вида

$$m=m\sum_{i=1}^{k} n_i m s_i,$$

где $s_i\in S$, $n_i\in N$ для каждого $1\leqslant i\leqslant k$. Тогда

$$a\otimes m=a\otimes\left(m\sum_{i=1}^{k} n_i m s_i\right)=\sum_{i=1}^{k}(amn_i\otimes ms_i)=0,$$

что противоречит выбору элемента $a\otimes m$. Таким образом, $(a\otimes m)N\neq 0$, и в силу простоты модуля aR имеем

$$aR=(a\otimes m)N=amN,\quad aR\otimes M=amN\otimes M=a\otimes mNM\subset a\otimes mS.$$

Тогда для произвольного ненулевого элемента $a\otimes m$ из правого S-модуля $a\otimes M$ имеет место равенство $a\otimes M=a\otimes mS$, следовательно, модуль $a\otimes M$ прост. Так как $(a\otimes M)N=aR$, $(aR)M=aR\otimes M$, то $T(aR)$ — простой правый K-модуль.

Докажем утверждение 3. Пусть B — правый R-модуль, являющийся существенным расширением модуля A. Вложение $\varepsilon\colon A\to B$ модуля A в модуль B индуцирует гомоморфизм K-модулей $T(\varepsilon)\colon T(A)\to T(B)$. Так как согласно утверждению 2 $T(A)$ — простой модуль и $T(\varepsilon)\neq 0$, то $T(\varepsilon)$ — мономорфизм. Поскольку по условию $T(A)$ — инъективный правый K-модуль, то $T(A)$ — прямое слагаемое модуля $T(B)$. Тогда A — прямое слагаемое модуля B, и следовательно, $A=B$. Таким образом, A — инъективный модуль. □

Теорема 4.2. *Пусть*

$$K=\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:

1) K — *правое V-кольцо*;

2) *R и S — правые V-кольца, модуль M N-вполне идемпотентен справа и модуль N M-вполне идемпотентен справа.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Тот факт, что модуль M N-вполне идемпотентен справа и модуль N M-вполне идемпотентен справа следует из [4, следствия 6.9, 7.8].

Пусть A — простой правый R-модуль. Из леммы 4.1 следует, что правый K-модуль $T(A)$ является простым. Так как K — правое V-кольцо, то $T(A)$ — инъективный модуль. Тогда из леммы 4.1 следует инъективность R-модуля A. Таким образом R — V-кольцо.

Аналогично показывается, что S — V-кольцо.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть (B_1, B_2) — K-модуль и (A_1, A_2) — его простой существенный подмодуль. Тогда из леммы 4.1 следует, что A_i — существенный подмодуль модуля B_i и A_i — либо простой, либо нулевой модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant 2$. Тогда из условия следуют равенства $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$. Таким образом, K — правое V-кольцо. □

Следствие 4.3. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Если R, S — коммутативные кольца, то следующие условия равносильны:

1) *K — правое V-кольцо;*
2) *K — регулярное кольцо.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Из теоремы 4.2 и [23, 22.4] следует, что R, S — регулярные кольца, модуль M N-вполне идемпотентен справа и модуль N M-вполне идемпотентен справа. Тогда для произвольного элемента $m \in M$ имеют место равенства

$$m = m\sum_{i=1}^{k} n_i m s_i = m\sum_{i=1}^{k} s_i n_i m = m(\sum_{i=1}^{k} s_i n_i)m,$$

где $s_i \in S$, $n_i \in N$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, модуль M N-регулярен. Аналогично можно показать, что модуль N M-регулярен. Тогда из следствия 2.2 следует, что K — регулярное кольцо.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 4.2 и [23, 22.4]. □

Теорема 4.4. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:

1) *K — правое SV-кольцо;*
2) *R и S — правые SV-кольца, модуль M N-регулярен и модуль N M-регулярен;*

3) *R и S — правые SV-кольца, модуль M N-вполне идемпотентен справа и модуль N M-вполне идемпотентен справа.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Из теорем 3.1 и 4.2 следует, что R и S — правые SV-кольца. Согласно [11, теорема 2.7] K — регулярное кольцо. Следовательно, модуль M N-регулярен и модуль N M-регулярен.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) проверяется непосредственно.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) следует из теорем 3.1 и 4.2. □

Замечание. Теоремы 4.2 и 4.4 впервые были опубликованы в [1].

Следствие 4.5. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Если K — регулярное кольцо, то следующие условия равносильны:

1) *K — правое SV-кольцо;*
2) *R и S — правые SV-кольца.*

Следствие 4.6. *Пусть P — конечно порождённый проективный правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(P)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Если R — правое V-кольцо, то S — правое V-кольцо.*
2. *Если R — правое $\max$-кольцо, то S — правое $\max$-кольцо.*
3. *Если R — правое SV-кольцо, то S — правое SV-кольцо.*
4. *Если R — правое полуартиново кольцо, то S — правое полуартиново кольцо.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Существует проективный правый R-модуль P', такой что для некоторого натурального числа n имеет место изоморфизм $R^n \cong P \oplus P'$. Тогда для некоторого идемпотента $e \in \mathrm{M}_n(R)$ имеет место изоморфизм колец $e\mathrm{M}_n(R)e \cong S$. Так как свойство быть правым V-кольцом инвариантно в смысле Мориты, то $\mathrm{M}_n(R)$ — правое V-кольцо. Тогда из теоремы 4.2 следует, что S — правое V-кольцо.

Утверждения пунктов 2), 3), 4) доказываются аналогично с помощью теорем 3.2, 4.4 и 3.1 соответственно. □

Следствие 4.7. *Пусть $K = K_n(R\colon \{\eta_{ikj}\})$ — кольцо формальных матриц над R порядка n.*

1. *K — правое V-кольцо тогда и только тогда, когда R — правое V-кольцо и $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$.*
2. *K — полуартиново справа кольцо тогда и только тогда, когда R — полуартиново справа кольцо.*
3. *K — правое $\max$-кольцо тогда и только тогда, когда R — правое $\max$-кольцо.*

4. *K — правое SV-кольцо тогда и только тогда, когда R — правое SV-кольцо и $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$.*

Если M — правый R-модуль, то через

$$\begin{pmatrix} R & \mathrm{Hom}_R(M,R) \\ M & \mathrm{End}_R(M) \end{pmatrix}$$

мы будем обозначать кольцо формальных матриц, у которого бимодульные гомоморфизмы

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_{\mathrm{End}_R(M)} M \to R, \quad \psi\colon M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,R) \to \mathrm{End}_R(M)$$

задаются соответственно согласно следующим правилам:

$$m \otimes f \mapsto \big(m' \mapsto mf(m')\big), \quad f \otimes m \mapsto f(m).$$

Следствие 4.8. *Пусть R — правое SV-кольцо и M — конечно порождённый правый модуль над ним. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $K = \begin{pmatrix} R & \mathrm{Hom}_R(M,R) \\ M & \mathrm{End}_R(M) \end{pmatrix}$ *— правое SV-кольцо;*
2) *M — проективный правый R-модуль.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Из теоремы 4.4 следует, что модуль M является $\mathrm{Hom}_R(M,R)$-регулярным. Тогда из [24, следствие 1.7] следует, что M — проективный модуль.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Согласно [11, теорема 2.7] R — регулярное кольцо. Из конечной порождённости модуля M и условия пункта 2) следует, что $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ — проективный левый R-модуль. Следовательно, согласно [24, теорема 2.8] правый R-модуль M и левый R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ являются регулярными. Из канонического изоморфизма правых R-модулей $M \cong \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$ следует, что модуль M $\mathrm{Hom}_R(M,R)$-регулярен и модуль $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ M-регулярен. Тогда из следствия 4.6 и теоремы 4.4 следует, что K — правое SV-кольцо. $\square$

5. Чистые кольца и проблема изоморфизма для колец формальных матриц

Кольцо называется *чистым*, если любой его элемент является суммой обратимого элемента и идемпотента. Кольцо R называется *строго чистым* (*однозначно строго чистым*), если каждый его элемент r представим (соответственно однозначно представим) в виде $r = e + u$, где $e = e^2$, $u \in U(R)$, $eu = ue$. Кольцо R называется *строго ниль-чистым*, если каждый его элемент r представим в виде $r = e + n$, где $e = e^2$, n — нильпотентный элемент и $en = ne$. Из [14, предложения 2.5, 2.6, следствия 3.11, 3.26] следует, что всякое строго ниль-чистое кольцо является однозначно строго чистым.

Теорема 5.1. *Пусть F — поле. Тогда кольцо формальных матриц $K = K_n(F\colon \{\eta_{ikj}\})$ является ниль-чистым в точности тогда, когда $F \cong F_2$.*

Доказательство. Несложно показать, что $K/J(K) \cong \mathrm{M}_{n_1}(F)\times\ldots\times\mathrm{M}_{n_k}(F)$, где $n_1 + \ldots + n_k = n$. Тогда утверждение исходной теоремы следует из [12, теорема 3; 14, теорема 3.15]. $\square$

Теорема 5.2. *Пусть R — произвольное кольцо. Тогда кольцо формальных матриц $K = K_n(R\colon \{\eta_{ikj}\})$ является строго ниль-чистым в точности тогда, когда R — строго ниль-чистое кольцо и каждый элемент из множества $\{\eta_{iji} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j\}$ является нильпотентным.*

Доказательство. Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Так как всякое строго ниль-чистое кольцо является однозначно строго чистым кольцом, то из [13, следствие 18] следует, что $K/J(K)$ — булево кольцо, и следовательно, $\{\eta_{iji} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j\} \subset J(R)$. Согласно [14, следствие 3.26] R — строго ниль-чистое кольцо, и из [14, следствие 3.17] следует, что $J(R)$ — ниль-идеал.

Докажем импликацию $\Longleftarrow$. Ясно, что

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & R & \ldots & R \\ R & J(R) & \ldots & R \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R & R & \ldots & J(R) \end{pmatrix}.$$

Так как согласно [14, следствие 3.17] $J(R)$ — ниль-идеал и каждый элемент из множества $\{\eta_{iji} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j\}$ является нильпотентным, то несложно заметить, что всякая матрица из $J(K)$ является нильпотентной. Так как

$$K/J(K) \cong R/J(R) \times \ldots \times R/J(R),$$

то $K/J(K)$ — строго ниль-чистое кольца, и из [14, следствие 3.22] следует, что K — строго ниль-чистое кольцо. $\square$

Следующая гипотеза при $n = 2$ была доказана в [22].

Гипотеза. Пусть R — коммутативное локальное кольцо. Если каждый элемент из множества $\{\eta_{iji} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j\}$ нильпотентный, то кольцо формальных матриц $K = K_n(R\colon \{\eta_{ikj}\})$ строго чистое.

В последнее время активно изучается проблема изоморфизма для колец формальных матриц, которая имеет следующую формулировку: для двух данных наборов $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ элементов коммутативного кольца R определить условия, при которых имеет место изоморфизм

$$\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}(R).$$

Изучение проблемы изоморфизма была инициировано в [6].

Теорема 5.3 [6]. *Пусть R — коммутативное кольцо, s и t — некоторые его элементы, причём хотя бы один из них не является делителем нуля. Кольца K_s и K_t изоморфны в точности тогда, когда существуют обратимый элемент $v \in R$ и автоморфизм α кольца R, такие что $t = v\alpha(s)$.*

Проблема изоморфизма изучалась в [2,3,8,20—22]. Ниже приведены результаты для колец формальных матриц вида $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}(R)$, полученные в [2].

Теорема 5.4. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$, $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$ и $\mathrm{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$. Тогда*

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, 0, \ldots, 0}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}(R),$$

если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i a_i$ для всех $i = \overline{1,n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v_i \in U(R)$ и $1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов a_i.

Следствие 5.5. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$, $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$ и*

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, 0, \ldots, 0}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}(R).$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Если β не является делителем нуля в кольце R, то найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v_1, \ldots, v_n \in U(R)$ и разложение единицы $1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, такие что $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i a_i$, $i = \overline{1,n}$.*
2. *Если R — область, то найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v \in U(R)$, такие что для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнены условия $\gamma_i = \alpha(\beta)v$ и $\gamma_j = 0$, если $i \neq j$.*

Теорема 5.6. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$, $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$ и $\mathrm{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$. Тогда*

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}(R),$$

если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i$ для всех $i = \overline{1,n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $v_i \in U(R)$.

Теорема 5.7. *Пусть R — коммутативное кольцо, такое что $Z(R) \subseteq J(R)$, $n \geqslant 3$ и $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$. Тогда*

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}(R),$$

если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i$ для всех $i = \overline{1,n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $v_i \in U(R)$.

Следствие 5.8 [21, теорема 18]. *Пусть R — коммутативное кольцо, такое что $Z(R) \subseteq J(R)$ и $n \geqslant 3$. Тогда*

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma,\gamma,\ldots,\gamma}(R),$$

если и только если $\gamma = \alpha(\beta)v$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $v \in U(R)$.

Гипотеза. Пусть R — тело и $K = K_n(R\colon \{\eta_{ikj}\})$ — произвольное кольцо формальных матриц над R. Тогда имеет место изоморфизм $K \cong K_n(R\colon \{\theta_{ikj}\})$, где $\{\theta_{ikj}\} \subset \{0,1\}$.

Литература

[1] Абызов А. Н. Кольца формальных матриц, близкие к регулярным // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2015. — Вып. 10. — С. 57—60.

[2] Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1199—1214.

[3] Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2015. — Вып. 3. — С. 3—14.

[4] Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 3—38.

[5] Буданов А. В. Об идеалах колец обобщённых матриц // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 1. — С. 3—10.

[6] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщённых матриц // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, № 4. — С. 456—463.

[7] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 145—211

[8] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Формальные матрицы и их определители // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 1. — С. 65—119

[9] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 169—198

[10] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[11] Baccella G. Semi-Artinian V-rings and semi-Artinian Von Neumann regular rings // J. Algebra. — 1995. — Vol. 173. — P. 587—612.

[12] Breaz S., Calugareanu G., Danchev P., Micu T. Nil-clean matrix rings // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 439. — P. 3115—3119.

[13] Chen J., Wang Z., Zhou Y. Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit that commute // J. Pure Appl. Algebra. — 2009. — Vol. 213, no. 2. — P. 215—223.

[14] Diesl A. J. Nil-clean rings // J. Algebra. — 2013. — Vol. 383. — P. 197—211.

[15] Haghany A. Injectivity conditions over a formal triangular matrix ring // Arch. Math. — 2002. — Vol. 78. — P. 268—274.

[16] Haghany A., Mazrooei M., Vedadi M. R. Pure projectivity and pure injectivity over formal triangular matrix rings // J. Algebra Its Appl. — 2012. — Vol. 11, no. 6. — 1250107.

[17] Haghany A., Varadarajan K. Study of formal triangular matrix rings // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 11. — P. 5507—5525.

[18] Haghany A., Varadarajan K. Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2000. — Vol. 147, no. 1. — P. 41—58.

[19] Keskin-Tütüncü D., Kalebogaz B. A study on semi-projective covers, semi-projective modules and formal triangular matrix rings // Palestine J. Math. — 2014. — Vol. 3 (Spec. 1). — P. 374—382.

[20] Tang G., Li C., Zhou Y. Study of Morita contexts // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42. — P. 1668—1681.

[21] Tang G., Zhou Y. A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438. — P. 4672—4688.

[22] Tang G., Zhou Y. Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // Linear Algebra Its Appl. — 2012. — Vol. 437. — P. 2546—2559.

[23] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[24] Zelmanowitz J. Regular modules // Trans. Amer. Math. Soc . — 1972. — Vol. 163. — P. 341—355.

[25] Zhou Y. On (semi)regularity and the total of rings and modules // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322. — P. 562—578.