С. Н. Тронин

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Краткий конспект лекций для аспирантов-математиков

Казань - 2017

УДК 519.51

Печатается по решению учебно-методической комиссии

Института математики и механики (ИММ) им. Н.И. Лобачевского КФУ

Протокол № 7 от 13 апреля 2017 г.

заседания кафедры алгебры и математической логики

Протокол № 8 от 13 апреля 2017 г.

Автор-составитель

доктор физ.-мат. наук, доц. С.Н. Тронин

Научный редактор

доктор физ.-мат. наук, профессор А.М. Елизаров

Рецензент

кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ. Краткий конспект лекций для аспирантов-математиков: учеб.-метод. пособие / С.Н. Тронин. – Казань: Казан. ун-т, 2017. – 59 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для аспирантов-математиков, готовящихся к сдаче кандидатского экзамена по философии науки. Оно представляет собой краткий конспект лекций, неоднократно читавшихся автором, а также содержит другую информацию, которая может оказаться полезной при подготовке к экзамену. Содержание пособия соответствует программе курса по выбору «Философские проблемы математики» для аспирантов-математиков, действующей в Казанском (Приволжском) федеральном университете.

Содержание

Введение

Курс «Философские проблемы математики» для аспирантов математических специальностей следует за курсом, где излагается общая философия науки, и является его второй частью. Аспиранты сдают единый кандидатский экзамен по обеим частям курса Экзаменационные билеты состоят из двух вопросов, из которых первый относится к общей философии науки, а второй – к материалу курса «Философские проблемы математики». Программа этого курса приводится ниже. Для допуска к экзамену аспирант должен в установленные сроки подготовить и сдать реферат по истории науки (в данном случае – математики). Реферат проверяет лектор, читающий соответствующий курс, и пишет отзыв на стандартном бланке. Отзыв должен в установленный срок (перед экзаменом) поступить в отдел аспирантуры. Темы рефератов и правила написания реферата приводятся ниже. Допуск к экзамену возможен только в случае положительного отзыва.

Пособие организовано следующим образом. Сначала автор кратко излагает своё видение истории математики, делая упор на события, наиболее значимые, с его точки зрения. Затем приведены вопросы программы курса, снабженные краткими указаниями по содержанию материала каждого вопроса, комментариями лектора и кратким списком литературы, которую можно использовать для самостоятельного изучения вопроса. Этот список обычно не является исчерпывающим. Общий большой список литературы приводится в конце данного пособия. Впрочем, его тоже нельзя считать полностью исчерпывающим. Лектор (автор данного пособия) выдает слушателям курса DVD-диск с литературой в электронном виде. Значительная часть книг и статей из списка литературы, приводимого в конце пособия, есть на этом диске. Но, к сожалению, не всё. Кое-что можно найти в библиотеке КФУ, но некоторые источники отсутствуют и там (но имеются у лектора). Однако основная часть литературы из кратких списков к каждому пункту программы на диске есть. Источники, существующие где-то в природе, но отсутствующие и у лектора, и в библиотеке, в списки не включены. Не включены в списки также некоторые старые книги, а также книги, которые лектор счел несущественными или избыточными. Разумеется, нельзя исключать, что еще есть книги, о которых автор не знает или про которые он не вспомнил. Автор только надеется, что таких книг немного. Что касается содержания ряда пунктов, то оно может показаться излишне кратким. В свое оправдание автор (лектор) должен сказать следующее.

Во-первых, данное пособие не предназначено для полной замены лекций: на лекциях всё рассказывается так, как положено. Пособие только помогает слушателям и содержит справочную информацию, которую трудно полностью сообщить на лекциях. Во-вторых, имеется достаточное количество книг и статей, которые позволяют получить адекватное представление о большей части вопросов программы курса. Возможно, что позиции авторов этих книг и статей не во всём совпадают с позицией автора данного пособия, но он признает право слушателей курса на альтернативные точки зрения.

Далее, прописывание всех подробностей увеличило бы объем данного пособия в несколько раз и существенно отдалило бы срок его завершения. Наконец, автор не хочет связывать себе руки полностью прописанными подробностями по некоторым принципиальным вопросам. Позиция автора существенно менялась на протяжении тех уже довольно многих лет, в течение которых читался данный курс. Ежегодно открываются какие-то новые повороты и новые моменты, которые меняют точку зрения автора (лектора). Пока этот процесс не стабилизировался, нет смысла закреплять промежуточные итоги в виде опубликованного текста. Необходимо еще отметить следующее. В программе есть несколько пунктов, содержание которых достаточно хорошо отражено в имеющейся литературе. Этот материал на лекциях будет излагаться в самом кратком виде. С другой стороны, есть и такие вопросы, содержание которых, по мнению лектора, в доступной литературе отражено крайне недостаточно. Материал таких вопросов излагается на лекциях подробно, и лектор рекомендует его прослушать. Что это за вопросы – сказано ниже в комментариях лектора. После программы курса приводятся список из 150 тем рефератов и краткая информация о том, каким, по мнению лектора, должен быть качественный (и некачественный) реферат.

Наконец, в конце приводится достаточно большой (но не исчерпывающий) список книг и статей, которые можно использовать для подготовки к экзамену и написания рефератов.

Краткий очерк истории математики (версия автора)

Перефразируя известное высказывание И. Канта, Имре Лакатос писал: «Философия науки без истории науки пуста; история науки без философии науки слепа» (И. Лакатос, «История науки и ее рациональные реконструкции»). Эта мысль стала теперь практически общепринятой истиной. Поэтому, прежде чем пойдет речь о философии математики, полезно хотя бы в самых общих чертах познакомиться с историей математики, одной из самых древних наук. В отечественной литературе принято различать четыре основных этапа (периода) эволюции (истории) математики (см., например, статью А. Н. Колмогорова «Математика» в его книге «Математика в её историческом развитии»).

Начальный период (глубокая древность) – период *донаучной математики*. Сюда относят, в частности, математику древнего Египта, Вавилона, Китая, Индии.

Затем следует период *элементарной математики*. Математика становится наукой, и ее научность связана с возникновением понятия доказательства. Математическое доказательство возникло в Древней Греции, и человеком, с чьим именем связывают первые известные доказательства теорем, был Фалес Милетский (ок. 625–548 до н.э.). В некотором смысле его можно даже считать первым математиком (или первым, чье имя мы знаем). Период элементарной математики продолжался до середины XVII века.

Греческая (античная) математика заслуживает отдельного рассказа, так как она в конечном счете послужила источником и основой для большей части всей современной математики. Приблизительно с 600 г. до н. э. по 300 г. до н.э. длился период, называемый сейчас периодом *древне*греческой математики, с 300 г. до н. э. до VI в. н.э – период эллинистической математики. Среди многих известных греческих математиков отметим прежде всего Пифагора (ок. 580–500 до н.э.), Евдокса (ок. 408 –ок. 355 до н.э.), Евклида (ок. 356 – ок. 300 до н.э.), Архимеда (ок. 287 – 212 до н.э.), Аполлония (ок. 262 – ок. 190 до н.э.), Диофанта (возможно, III в. н.э.). Трактат Евклида «Начала» оказал ни с чем не сравнимое воздействие не только на математические исследования и математическое образование, но, пожалуй, и на всю человеческую культуру. Еще относительно недавно эта книга занимала в Европе второе место по количеству печатных изданий (после Библии). Как учебник, трактат Евклида во многих отношениях (например, в той своей части, которая относится к геометрии) фактически не имел достойных конкурентов вплоть до конца XVIII века, и окончательно был превзойдён только в XIX или даже в XXвеке. Большое влияние на развитие математики (особенно философии математики) оказали также величайшие мыслители Греции Платон (427 –347 до н.э.) и Аристотель (384 – 322 до н.э.). Аристотель, в частности, создал логику как науку. Период эллинистической математики закончился в конце первой трети VI в. н.э., когда император Юстиниан сделал невозможной на территории Византии (Восточной Римской империи) деятельность ученых, сохранявших античные традиции (эдикт «О злодеях и математиках»). Следует отметить, что на протяжении всей истории Рима (а в дальнейшем и Византии) не известно ни одного действительно крупного математика, который был бы не греком, а римлянином. Разумеется, потребности практики постоянно требовали определенных математических знаний у достаточно большого количества людей, но в основном всё ограничивалось использованием небольшой части того, что было ранее создано греками. Теоретическая математика, математика как наука, не развивалась, принципиально новые идеи отсутствовали. В этой связи можно отметить, что *античные* греки (как впоследствии и римляне) довольно пренебрежительно относились к тому, что сейчас называется прикладной математикой (называя этот род человеческой деятельности не математикой, а «логистикой»).

Таким образом, в раннем средневековье развитие математики в Европе практически прекратилось. Однако традиции античной математики не только сохранились, но и получили дальнейшее развитие в мусульманских странах. Одним из крупнейших математиков этого времени был, например, Омар Хайям (1048–1131), более известный как поэт (а также астроном, философ, богослов ...). Приблизительно до XVI–XVII вв. уровень математики стран Востока (прежде всего мусульманских) был сначала намного выше, а потом в целом сопоставимым с уровнем европейской математики. Некоторые сочинения древнегреческих математиков стали известны в Европе только в обратном переводе с арабского, т. к. оригиналы были утрачены.

Возрождение математики в Европе начинается с конца XII века. К XVI-му веку европейская математика достигает весьма высокого уровня и в ряде отношений уже обгоняет древнегреческую. То принципиально новое, что внесли в математику европейские ученые XV–XVI веков, касается прежде всего развития понятия числа, но особенно – изобретения и широкого использования символьных обозначений. Символьные обозначения почти полностью отсутствовали у греков (исключением являлся лишь Диофант, но его сочинения не пользовались, по-видимому, большой известностью) и полностью отсутствовали на Востоке. Даже алгебраические задачи (уравнения) решались либо в полностью словесном виде, либо с помощью геометрических построений, которые для каждой задачи приходилось выдумывать особым образом. Между тем нельзя представить себе современную математику, не использующую самых разнообразных символьных обозначений. В какой-то период (XVII–XIX века) доказательства математических, по сути, фактов, выраженные в словесной форме, даже стали считаться чем-то недопустимым и не относящимся к математике. Некий баланс между словесным и формульным способами выражения математических фактов и суждений был установлен лишь к концу XIX века. Так или иначе, можно смело утверждать, что именно использование символьных обозначений привело математику к ее нынешнему состоянию, когда она считается даже чем-то вроде универсального языка всей науки. Математиком, в чьих трудах уже можно найти систему символьных (алгебраических) обозначений в виде, близком к современному, был Франсуа Виет (1540–1603). Благодаря символьным обозначениям он впервые смог выразить свойства алгебраических уравнения 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней и их корней в виде общих формул, а сами алгебраические выражения превратились в объекты, над которыми можно производить действия.

С середины XVII века начинается период математики переменных величин. Его истоки связаны с именами Р. Декарта (1596–1650), И. Ньютона (1643–1727), Г.-В. Лейбница (1646–1716). Метод координат Рене Декарта (независимо открытый также Пьером Ферма (1601–1665)) не только установил тесную связь между алгеброй и геометрией, считавшимися ранее весьма различными дисциплинами, но и содержал в своей основе понятие функциональной зависимости, быстро ставшее едва ли не центральным понятием всей математики. Без этого понятия оказалось бы невозможным создание Ньютоном и Лейбницем основ математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений). Математический анализ (называемый еще «высшей математикой») быстро сделался главным разделом всего математического знания и основным направлением исследований большинства ведущих математиков всего мира (фактически, по обстоятельствам того времени – Западной Европы). В немалой степени это было связано и с тем, что с самого момента его создания была ясно видна перспектива приложений математического анализа к изучению физических (прежде всего, механических) процессов, связанных с различными формами движения и изменения.

Начало периода современной математики отечественные историки математики (следуя А.Н. Колмогорову) связывают с открытием Николаем Ивановичем Лобачевским (1792–1856) первого примера неевклидовой геометрии (1826, опубликовано в 1829–1830). Несколькими годами позднее ту же геометрию (ее принято также называть гиперболической) открыл венгерский математик Янош Больяи (Бояи, Бойаи, 1802–1860), а после смерти К. Ф. Гаусса (1677–1755; это один из величайших математиков всех времён и народов), когда были опубликованы его письма, выяснилось, что и он думал в том же направлении, хотя ничего не опубликовал, и не найдено даже никаких черновиков. Реальность неевклидовых геометрий была признана на рубеже 1863 года, после того, как итальянский математик Эудженио Бельтрами (1835–1900; в 1898–1900 возглавлял Академию наук Италии) выяснил, что все свойства, которыми должна обладать геометрия Лобачевского, выполняются на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, т. е. на вполне конкретных поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве, которые можно наглядно представить и изобразить. Но при этом надо условиться, что «прямая линия» – это не та прямая линия, которая знакома нам по школьной математике, а линия, обладающая некими определенными свойствами (подробности надо искать в специальной литературе). В дальнейшем Анри Пуанкаре (1854–1912) и Феликс Клейн (1849–1925) нашли еще более наглядные модели геометрии Лобачевского. Один из крупнейших математиков XIX века Г.Ф.Б. Риман (1826–1866) открыл (в 1854 году) другой класс неевклидовых геометрий (ныне – так называемые римановы пространства). Кроме создания неевклидовых геометрий, крупнейшие математические события XIX века таковы: строгое логическое обоснование математического анализа (прежде всего, в работах Огюстена Луи Коши (1789–1857) и Карла Вейерштрасса (1815–1897)), создание символической логики (Джордж Буль (1815–1864), Огастес де Морган (1806–1871), Готлоб Фреге (1848–1925)), создание теории множеств (Георг Кантор, 1845–1918). В 1860-х годах было осуществлено строгое построение иррациональных (действительных) чисел (Р. Дедекинд, Г. Кантор и другие). Вероятно, главным разделом математики XIX века была теория функций. А в целом, это был век бурного развития всех прежних направлений математики и появления многих принципиально новых понятий и направлений. Описание (притом достаточно краткое) того, что было сделано математиками XIX века, данное коллективом авторитетных специалистов под руководством А.П. Юшкевича и А.Н. Колмогорова, занимает три толстых тома, и примерно такой же объем занимает описание всего, что был сделано в математике с древнейших времен до конца XVIII века. Это описание было дано несколько ранее коллективом авторов под руководством Юшкевича (см. ниже литературу по истории математики).

Особо надо отметить создание Георгом Кантором в 1870-х – 1890-х годах теории множеств. Речь идет об актуально бесконечных множествах, существование, а тем более использование которых со времен Аристотеля считалось недопустимым (признавалась допустимой только потенциальная бесконечность). Несмотря на противодействие ряда крупных математиков, уже в 1897-м году на первом международном математическом конгрессе в Цюрихе теория множеств получила широкое признание. Очень скоро выяснилось, что она может служить фундаментом всей (известной в то время) математики в том смысле, что все известные математические понятия, объекты и факты могли быть выражены на языке этой теории. Более того, строгое обоснование математического анализа оказалось невозможным без использования актуально бесконечных множеств.

Вместе с тем, теория множеств в своем первоначальном виде (называемая еще «наивной теорией множеств») содержала серьезные трудности: уже в самом конце XIX века в ней обнаружились логические парадоксы. Впечатление, произведенное одним из них (парадокс Б. Рассела, 1902 г.) на математическое сообщество было настолько сильным, что положение, сложившееся в математике в начале XX века, принято называть кризисом оснований математики (более точно – третьим кризисом). В связи с этим было предложено несколько способов «спасения» математики. В частности, на такое «спасение» были нацелены программы логицизма, интуиционизма и формалистская программа Давида Гильберта (1862–1943). Об этих программах (имеющих важное философское значение) будет более подробно рассказано ниже. Однако достаточно быстро (к началу 1940-х годов) выяснилось, что эти программы не достигают поставленных целей (несмотря на многочисленные полезные и важные результаты побочного характера, полученные в процессе их разработки). В частности, в 1931-м году появилась знаменитая теорема Курта Гёделя (1906–1978), из которой прямо следовало, что основное предположение, на которое опирался Гильберт, является неверным, и, в частности, математика в принципе не может быть полностью формализована. Фактически же в конце концов оказалось, что математика была «спасена» Эрнстом Цермело (1871–1953), предложившим еще в 1907-м году первую систему аксиом для теории множеств. Позднее эта система аксиом была дополнена и усовершенствована А. Френкелем (1891–1965) и с тех пор известна как система аксиом Цермело–Френкеля (сокращенное обозначение ZF). Аксиомы, введенные Цермело и Френкелем, запрещают все те ситуации, которые приводят к известным парадоксам (а новых парадоксов не появилось!). Вместе с тем, эти аксиомы «разрешают» все те построения и операции, которые доказали свою полезность и широко применяются в математике. Время показало, что аксиоматизированная теория множеств стала надежным рабочим инструментом в руках математиков и обеспечила прогресс математики на протяжении как минимум целого столетия, вплоть до наших дней.

Дать краткое описание того, что было сделано в математике в XX-м веке, – задача почти безнадежная. Математика стала весьма объемной и многообразной наукой. Происходил (и продолжается) ее бурный рост, и количественный, и качественный. Развивались и даже радикально трансформировались традиционные направления (например, полностью изменилась и по форме, и по содержанию алгебра). Вместе с тем, возникло огромное количество совершенно новых направлений. Резко, во много раз, выросло количество математиков. Исследовательская работа в области математики стала достаточно массовой профессией (ранее она была, как правило, либо чем-то вроде хобби, либо приложением к преподавательской деятельности). Необычайно расширилась область приложений математики, прикладными стали даже такие ее разделы, как, например, теория чисел, столетиями считавшаяся безнадежно далекой от всего материального и практического (ныне же это теоретическая основа для наук, которые разрабатывают методы обработки и защиты информации). Изобретение компьютеров полностью преобразило прикладную математику, бурный рост которой начался в период Второй мировой войны.

Отметим лишь несколько значительных явлений и событий двадцатого столетия. На протяжении всего XX-го века высшим достижением для математика было решение одной из 23 проблем, поставленных в докладе Давида Гильберта на международном математическом конгрессе в 1900-м году в

Париже. Первой в списке этих проблем была так называемая гипотеза континуума (континуум-гипотеза), которую выдвинул и пытался решить (но потерпел неудачу) еще сам создатель теории множеств Георг Кантор. В случае положительного решения построенная Кантором иерархия различных типов бесконечностей могла бы приобрести особенно изящный и законченный вид. Вопрос решился лишь в 1963-м году, автором решения стал американский математик Пол Коэн. Решение оказалось весьма неожиданным: то, что утверждается в гипотезе континуума, нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из аксиом теории множеств. Гипотеза континуума логически независима от этих аксиом. Неспециалисту довольно трудно понять, почему утверждения такого рода играют для математики столь большую роль и ставятся на первое место в списке важнейших проблем. Отметим лишь, что на самом деле речь идет о вещах принципиальных и фундаментальных, так как континуум – это, по сути, базовая математическая модель окружающей нас физической, пространственно-временной реальности (частью которой являемся и мы сами), а в математике континуум – еще и синоним совокупности всех действительных чисел, также центрального понятия математики и ее рабочего инструмента. Впрочем, есть признаки того, что вопрос еще до конца не закрыт. Некоторые считают даже, что доказанная Коэном теорема является своего рода новым парадоксом, ставящим под сомнение самые основы аксиоматизированной теории множеств. Однако думающие так находятся на данный момент в явном меньшинстве. Подавляющее большинство математиков, использующих в своей исследовательской работе множества, не ощущают никакого дискомфорта и совершенно не беспокоятся за судьбу теории множеств.

Побочным результатом доказательства, данного Коэном, стал существенный прогресс в принципиально новом разделе математики – так называемой теории категорий. Термин «категория» был позаимствован отцами-основателями новой теории – Саундерсом (Сондерсом) Маклейном (1909–2005) и Самюэлем Эйленбергом (1913–1998) – у Аристотеля. Разумеется, никакого прямого внешнего сходства с аристотелевскими (то есть философскими) категориями не осталось, но некоторое глубинное сходство все-таки можно уловить. Математические категории (некоторые философы, например, Г.И. Рузавин, используют слова «алгебраические категории») имеют смысл особым образом формализованных математических теорий (любой разновидности), где в качестве важнейших и определяющих выделены два понятия – объекты и морфизмы (изображаемые в виде стрелок, направленных из одного объекта в другой). Морфизмы допускают суперпозицию наподобие той, которую допускают функции (отображения). Свойства теории, которые «схватывает» ее теоретико-категорное описание, – это самые базовые, фундаментальные и предельно общие структурные и системные свойства. Забегая вперед, отметим, что в некоторых недавних книгах (например, в книге В.А. Канке, см. список литературы) теории категорий уже придается статус фундамента всей современной математики. Напомним, что прежде такой статус имела теория множеств. Теперь же вся теория множеств оказывается частным случаем одной из неисчислимого количества математических категорий. При этом аксиомы, которыми определяются категории, логически не зависят от аксиом теории множеств.

Первая публикация Эйленберга и Маклейна по теории категорий относится к 1945-му году. Первоначально можно было рассматривать новую систему понятий просто как удобный способ формулирования некоторых фактов, открытых (и открываемых) в алгебраической топологии и алгебре. Так продолжалось в течение примерно 10–15 лет, но в конце концов новая теория приобрела все признаки самостоятельной математической дисциплины. Для алгебры, алгебраической топологии и алгебраической геометрии язык теории категорий оказался способом адекватного выражения новых понятий и прозрачной формулировки утверждений, которые было трудно или даже невозможно выразить на старом, теоретико-множественном языке.

В 1970-х – начале 1980-х годов в теории (математических) категорий произошли события, которые можно поставить в один ряд с открытием неевклидовых геометрий. Был открыт класс категорий (названных топосами, или же элементарными топосами), которые обладали свойствами, позволявшими осуществлять внутри этих категорий все основные операции, благодаря которым теория множеств (категория множеств) фактически и стала считаться фундаментом всей математики, известной к концу XIX – началу XX века. Это означает, что внутри каждого топоса возможно построение своей особой «математики», в ряде случаев не менее богатой возможностями, чем математика, основанная на теории множеств. Более того, внутри каждого топоса действует своя собственная логика, в большинстве случаев не являющаяся двузначной. Во внутренних логиках топосов, как правило, не действует закон исключенного третьего и неверно, что двойное отрицание утверждения эквивалентно самому утверждению. Хотя, конечно, есть (и их не так уж мало) топосы с более привычными свойствами. Теория топосов показывает, что существует (в математическом смысле) неисчислимое количество «математик», как аналогичных, так и сильно отличающихся от той, которой до сих пор пользовалось человечество. Слово «математика» пишется здесь в кавычках не случайно. Речь вовсе не идет о том, что математика перестала быть единой. Никто из математиков так не считал и не считает (хотя некоторые философы вслед за О. Шпенглером и утверждают, что каждая цивилизация и каждая культура имеет свою особую математику; заметим, однако, что аргументом теории топосов эти философы не пользуются!). Речь должна идти о том, что в очередной раз выяснилось, что математика шире любых предписываемых ей извне жестких рамок.

Что же касается вклада отдельных личностей в создание теории топосов, то отметим, прежде всего, человека, который обнаружил первый важный класс примеров топосов, резко отличающихся от категории множеств. Это один из крупнейших математиков XX века француз Александр Гротендик (1928–2014). Большой вклад в создание общей теории элементарных топосов внес Уильям Ловер (Lawvere).

В отличие от теории множеств, распространение теории (математических) категорий происходит пока довольно медленно. Хотя некоторые разделы современной математики (топология, алгебра и т. п.) уже в значительной степени полностью перешли на язык теории категорий (не отвергая при этом и язык теории множеств), ряд других разделов, особенно связанных с приложениями математики, пока не испытывает острой необходимости перестраиваться на новый лад (более того, ряд разделов математики до сих пор не испытывает даже особой необходимости в теории актуально бесконечных множеств!). Положение может резко измениться в связи с некоторыми процессами, происходящими в теоретической физике. Так, некоторые физики (в основном, конечно, иностранные) уже заявили, что (математические) категории являются наиболее подходящим математическим аппаратом для выражения фундаментальных понятий квантовой теории. Кроме того, если оправдаются надежды, возлагаемые на теорию струн, и эта физическая теория станет фундаментом всей теоретической физики (и осуществится, тем самым, некий синтез теории относительности и квантовой теории, на данный момент в значительной мере несовместимых), то язык теории категорий, уже сейчас играющий важную роль в математическом аппарате теории струн, окажется в центре внимания не только всех физиков, но и значительного числа математиков (тут можно вспомнить, как повлияли потребности развития и теории относительности, и квантовой физики на математическую «моду» XX века). Пока же этого не случилось, остается некоторая вероятность того, что математика XXI века не пойдет по пути всеобщей «категорификации».

Заслуживает упоминания и еще одно яркое явление в математике XX века: деятельность группы французских математиков, взявших себе псевдоним Николя Бурбаки. Сейчас уже трудно сказать, почему в середине 1930-х годов молодые тогда Анри Картан (1904–2008), Андре Вейль (1906–) (не путать с крупным немецким математиком, физиком и философом Германом Вейлем, 1885–1955; фамилии на самом деле разные: у француза фамилия Weil, а у немца – Weyl), Жан Дьедонне (1906–1992), Клод Шевалле (1909–) и Жан Дельсарт (1903–1968) выбрали для своего совместного предприятия фамилию не слишком удачливого французского генерала времен Второй Империи (карьера генерала Бурбаки бесславно завершилась во время франко-прусской войны). Целью же предприятия было создание трактата, в котором с единой теоретико-множественной и аксиоматической точки зрения излагались бы самые фундаментальные разделы математики. Можно сказать, что была предпринята попытка сделать примерно то же, что сделал в свое время Евклид, но уже на уровне XX века. Попытка в целом удалась. В русском переводе трактат Н. Бурбаки называется «Элементы математики», в нем около 20 томов (французский оригинал выходил выпусками, по одной или нескольким главам, некоторые выпуски переиздавались, так что общее количество книг намного больше двадцати). Считается, что трактат не закончен, так как группа Бурбаки в середине 1980-х годов самораспустилась (причем было объявлено, что Н. Бурбаки «умер», и появился даже «некролог»). «Отцы-основатели» группы Бурбаки завели такой порядок, что любой член обязан покинуть группу по достижению 50 лет. Ввиду этого сменилось несколько поколений бурбакистов. В их числе было несколько блестящих математиков, таких, как лауреаты филдсовской премии (это аналог нобелевской премии для математиков) Лоран Шварц (1915–2002), Жан-Пьер Серр (1926, самый молодой в истории лауреат, получивший премию в возрасте 27 лет), Александр Гротендик (1928–), и достаточно много других, почти столь же известных и вряд ли намного менее талантливых. Заметим, что Жан-Пьера Серра некоторые специалисты сейчас называют лучшим математиком второй половины 20-го века. На русском языке изданы четыре толстых тома его сочинений, и это помимо нескольких переведенных на русский язык монографий. Членом группы Бурбаки был Самюэль Эйленберг, и даже С. Маклейн был близок к принятию в ее ряды, но, как говорят, помешало недостаточно хорошее знание французского языка. Отметим, что А. Картан, А. Вейль, Ж. Дьедонне, К. Шевалле – –и сами по себе математики очень крупного калибра, с огромной международной известностью (например, Анри Картан был в свое время президентом Международного математического союза). О степени их влиятельности можно судить, даже посмотрев на список их книг, переведенных на русский язык.

В заключение следует сказать несколько слов о развитии математики в России. Математика европейского типа появилась в России в XVIII веке, и это было результатом реформ Петра Первого. Была создана Петербургская Академия наук (в те времена мало походившая на нынешнюю Российскую Академию наук). Для работы в Академии в течение XVIII века приглашались большей частью ученые из-за рубежа (М. В. Ломоносов – одно из немногих исключений, но он не математик). Среди приглашенных математиков оказалось несколько крупных ученых. В первую очередь надо отметить уже упоминавшегося Леонарда Эйлера (родом швейцарца), который провел в Санкт-Петербурге значительную часть своей жизни (периоды с 1726 по 1941 годы и с 1776 по 1783 годы, до самой кончины). Эйлер считается крупнейшим математиком XVIII-го века и, кстати, мировым «рекордсменом» всех времен среди математиков по количеству и объему созданных им научных работ (более 865 статей и книг, причем книг довольно много). Другим знаменитым швейцарцем, поработавшим в Российской Академии наук, был Даниил Бернулли (1700–1782), работавший в Петербурге в 1725–1733 годах, а впоследствии избранный почетным членом Академии. К концу XVIII века появляются первые академики-математики – е иностранцы. Но было бы преувеличением сказать, что среди них были математики действительно выдающиеся. В XIX веке картина начинает меняться. Появляются ученые, которых смело можно назвать математиками крупными и даже выдающимися. Конечно, на первое место надо поставить Н.И. Лобачевского. Но математическое творчество Лобачевского при его жизни не получило признания, а известность в России Лобачевский получил только после того, как созданная им неевклидова геометрия стала популярной за рубежом. Так, известный английский математик Уильям Клиффорд (1845–1879) в одной из своих работ даже назвал Лобачевского «Коперником геометрии». Современником Лобачевского был крупный математик Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862). В отличие от Лобачевского, творчество Остроградского быстро получило признание и за рубежом, и в России. В 1830-м году он уже стал академиком Петербургской Академии наук. К сожалению, Остроградский не смог понять сути открытия Лобачевского, и его отношение к Лобачевскому было, мягко говоря, отрицательным. Среди значительных фигур в российской математике XIX-го века особо отметим Пафнутия Львовича Чебышева (устная традиция хранит иное произношение его фамилии: Чебышов, с ударением на букву «о»). Годы жизни – с 1821 по 1894. Математическое творчество Чебышева широко известно во всем мире, и кое-что из сделанного им сохраняет свое значение до наших дней. Отметим еще таких крупных ученых, как А.А. Ляпунов (1857–1918) и А.А. Марков (1856–1922). Наконец, нельзя не вспомнить про замечательного математика и механика Софью Васильевну Ковалевскую (1850–1891), ученицу знаменитого Карла Вейерштрасса. Женщина-математик – явление не столь частое, в XIX веке – крайне редкое, для России тех времен – уникальное. В целом к концу XIX века российская математика и количественно, и качественно вышла на вполне достойный «среднеевропейский» уровень. Это стало основой ее дальнейшего броска (в XX-м веке) на лидирующие позиции.

Возможно, кому-то сейчас может показаться странным, что несмотря на все потрясения, случившиеся в России в первые десятилетия XX-го века, математика (как и ряд других наук) не только не оказалась в упадке, а, напротив, стала бурно развиваться. Но это действительно так. Уже в 1920-х годах появилось множество молодых талантов, которые довольно быстро добились крупных успехов. В целом период между 1917-м и 1991-м годами можно без преувеличения охарактеризовать как «золотой век» отечественной математики (как и механики, физики и т. п.). Перечисление знаменитых имен и самое краткое описание их научных заслуг заняло бы слишком много места, поэтому заинтересованному читателю следует обратиться к специальной, а также к мемуарной и биографической литературе. Отметим только две, вероятно, самые значительные личности того периода. Это, прежде всего, Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987). Колмогорова можно поставить в один ряд с немногими самыми выдающимися математиками не только одного 20-го столетия, а во всей истории российской математики он, вероятнее всего, должен занимать «чистое» первое место. В частности, именно благодаря Колмогорову теория вероятностей и математическая статистика стали строгими математическими дисциплинами. В области прикладной математики нельзя не отметить Мстислава Всеволодовича Келдыша (1911–1978), которого называли «главным теоретиком космонавтики». С 1961-го по 1975-й годы Келдыш был президентом Академии наук СССР. В конечном счете уровень математики, существовавшей в советский период нашей истории, превосходил уровни большинства стран остального мира и был в целом как минимум не ниже уровня передовых в научном отношении держав. Имелись большие разделы математики, где уровень советской математики был существенно выше мирового (по крайней мере, так пишут некоторые специалисты). Особенно это касалось некоторых разделов, имевших прикладное значение. К сожалению, был допущен ряд стратегических управленческих просчетов, которые привели, например, к отставанию в области вычислительной техники. Еще в 1960-е годы это отставание было не слишком значительным, и уж во всяком случае, далеко не критическим. Однако в дальнейшем разрыв стал увеличиваться, что повлекло уже отставание в области прикладных математических исследований, так как современная прикладная математика совершенно неэффективна без компьютерного обеспечения. Впрочем, недооценивались (и, соответственно, слабее развивались) также некоторые разделы «чистой» математики, которые казались кое-кому слишком абстрактными и «оторванными» от потребностей практики. Время показало, что это была недальновидная точка зрения. Ныне многие такие абстрактные разделы математики становятся незаменимыми именно для прикладных целей (например, в информационных технологиях). Мы говорим здесь о стратегических ошибках, имевших отношение к математике, не касаясь других наук. Утверждать, что проблемы, существовавшие в советской математике, сколь-нибудь заметно повлияли на общее положение дел в стране, было бы неправомерным. Более правдоподобным выглядит противоположное утверждение: на развитие математики в СССР оказали влияние процессы, происходившие в стране.

Так или иначе, но в 1991-м году история совершила еще один крутой поворот. История математики в современной России – это сложная тема, обсуждать которую здесь, вероятно, еще преждевременно. По той же причине, по которой преждевременно делать какие-либо категорические выводы об истории всей современной России. Пока ясно только одно: эта история (и России, и математики в России) продолжается.

Краткий список литературы по истории математики

1. Марков С.Н. Курс истории математики. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995. – 248 с.

2. Панов В.Ф. Математика древняя и юная. 2-е изд., испр. – М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 648 с.

3. Панов В.Ф. Современная математика и ее творцы. – М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 646 с.

Вопросы к кандидатскому экзамену

1. Первый период истории математики как науки: элементарная математика

Донаучный период развития математики. Возникновение математики как науки: Фалес Милетский. Парадокс лжеца. Апории Зенона. Период элементарной математики. Пифагор. Первый кризис оснований математики. «Начала» Евклида. Архимед, Платон, Аристотель. Создание системы символьных обозначений.

Литература

Панов В.Ф. Математика древняя и юная. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 648 с.

Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. Выпуск XI. М., 1958. – С. 225–438.

Марков С.Н. Курс истории математики. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995. – 248 с.

Дополнительная литература

Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. Под ред. В.А. Успенского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 224 с.

Замечания и комментарии

Материал стандартный, источников гораздо больше, чем в приведенном коротком списке.

2. Второй период в истории математики как науки: математика переменных величин

Математика переменных величин. Декарт: метод координат и понятие функциональной зависимости. Ньютон, Лейбниц, и создание дифференциального и интегрального исчисления (высшей математики). Второй кризис оснований математики. Математика XVIII века. Коши, Вейерштрасс, и преодоление второго кризиса оснований.

Литература

Панов В.Ф. Математика древняя и юная. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 648 с.

Марков С.Н. Курс истории математики. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995. – 248 с.

Дополнительная литература

Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. Под ред. В.А. Успенского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 224 с.

Замечания и комментарии

Материал стандартный, источников намного больше, чем в приведенном коротком списке.

3. Современный период в истории математики

Н.И. Лобачевский и начало периода современной математики. Математика XIX века, и ее основные направления. Создание символической логики. Создание теории множеств. Георг Кантор. Возникновение современной алгебры. Становление теории вероятностей как строгой математической дисциплины. Обнаружение парадоксов в наивной теории множеств и третий кризис оснований математики. Преодоление этого кризиса. Становление современной математической логики. Теорема Гёделя о неполноте, и близкие к ней результаты. Возникновение теории алгоритмов, и других новых разделов математики. От геометрии к топологии. Геометризация физики. Возникновение теории категорий и топосов. Бурное развитие прикладной математики в период второй мировой войны. Российская математика до 1917-го года. Советская и современная российская математика. Современное состояние мировой математики.

Литература

Панов В.Ф. Математика древняя и юная. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 648 с.

Марков С.Н. Курс истории математики. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995. – 248 с.

Монастырский М.И. Математика на рубеже двух столетий // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2000. – Выпуск 5 (40). – С. 56-70.

Дополнительная литература

Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. Под ред. В.А. Успенского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 224 с.

Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. Издание 3-е. – М.: УРСС, 2007. – 296 с.

Гудков Д.А. Н.И. Лобачевский. Загадки биографии. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. – 242 с.

Замечания и комментарии

Материала очень много, и он лишь частично отражен в имеющихся источниках. О математике 20-го века можно прочитать в книге Панова и статье Монастырского. Впрочем, для качественного ответа на экзамене необходимо перечислить лишь основные вехи развития математики за указанный период.

4. Философия математики и ее основные направления. Фундаменталистское и нефундаменталистское (социокультурное) направления

Краткий перечень основных проблем: что такое математика, каков предмет математики, что такое объекты, изучаемые математикой, в каком смысле они существуют, что такое математическая бесконечность, являются ли абсолютно истинными математические теоремы, гарантирует ли полную достоверность математическое доказательство, почему математика эффективна в физике и некоторых других естественных науках, и т. д. Проблема обоснования математики. Основные направления в философии математики: пифагореизм, платонизм (и его разновидности), априоризм, эмпиризм (и его разновидности). Фундаменталистское и нефундаменталистское (социокультурное) направления в философии математики. Некоторые современные теории. Ален Бадью и его философская система: математика=онтология.

Литература

Целищев В.В. Философия математики. Ч. 1. – Новосибирск: Наука, 2002. – 212 с.

Канке В.А. Философия математики, физики, химии, биологии. – М.: КНОРУС, 2011. – 368 с.

Барабашев А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 160 с.

Дополнительная литература

Ален Бадью. Философия и событие. Беседы с кратким введением в философию Алена Бадью. – Институт Общегуманитарных Исследований, 2013. – 192 с.

Бадью А. Манифест философии. СПб.: Machina, 2003. – 184 с.

Барроу Д. Новые теории всего. – Минск: Попурри, 2012. – 368 с.

Стили в математике: социокультурная философия математики / Под ред. А.Г. Барабашева. – СПб.: РХГИ, 1999. – 552 с.

Целищев В.В. Онтология математики: объекты и структуры. – Новосибирск: Нонпарель, 2003. – 240 с.

Черняков А.Г. Онтология как математика: Бадью, Гуссерль, Плотин // Сущность и слово. Сб. научн. статей к юбилею проф. Н.В. Мотрошиловой. – М.: Феноменология-герменевтика, 2009. – С. 420-441. URL: http://srph.1gb.ru/text.

Замечания и комментарии

Имеется большое количество источников, и много различных точек зрения. Лектор будет излагать свою позицию, но не настаивает, чтобы слушатель на экзамене отвечал строго по лекциям.

5. Различные точки зрения на сущность математики и на природу математического знания

Отметим несколько вариантов определения того, чем является математика, бывших популярными в XX-м веке. Некоторые продолжают пользоваться известностью и сейчас.

Первое определение принадлежит Фридриху Энгельсу («Диалектика природы») и гласит, что математика – это наука о пространственных формах и количественных отношениях реального мира. Упор делается на *реальном* мире и на том, что математические понятия возникают из практики. Это определение вошло в известную статью А. Н. Колмогорова «Математика», написанную в свое время для Большой Советской Энциклопедии, и во времена СССР принималось за основное.

Известный автор Н. Бурбаки (о нем шла речь выше) в статье «Архитектура математики» изложил свое видение того, что такое математика. Согласно Бурбаки, математика – это наука, в основе которой лежит теория множеств, главным методом является аксиоматическим метод, а изучает математика так называемые математические структуры, их точное определение (довольно сложное) дается в четвертой главе книги Н. Бурбаки «Теория множеств». Наиболее важными математическими структурами, по мнению Бурбаки, являются структуры группы, частично упорядоченного множества и топологического пространства. Весь трактат Н. Бурбаки «Элементы математики» демонстрирует важность для современной математики именно этих структур.

Отметим, что некоторые авторы (в частности, В.Я. Перминов), пытаясь дать свое особое определение математики, используют термин «структура» без ссылки на Бурбаки и не объясняя (в отличие от Бурбаки), что именно они понимают под «структурой» в математике.

Общие бурбакистские математические структуры при всей их, казалось бы, важности, в самой математике не прижились. Это связано (в том числе) с появлением теории категорий. Оказалось, что понятие категории перекрывает понятие бурбакистской математической структуры,при этом является значительно более простым и, судя по всему, весьма глубоким.

В связи с этим, уже в 1980-е годы появилось мнение, что в основе всей современной математики, в сущности, лежит теория категорий. Это отражено, например, в книге Г.И. Рузавина (как один из возможных вариантов), а в недавней книге В.А. Канке утверждение о том, что математика изучает различные категории, уже принимается как безальтернативное. И действительно, многое свидетельствует о том, что современная математика переросла теоретико-множественную парадигму и вступила в такой этап своего развития, в котором теория категорий будет являться ее фундаментом и основным языком. Впрочем, проникновение теоретико-категорного языка в различные области математики происходит с разнами скоростью и разной интенсивностью. Окончательной «победы» теории категорий над теорией множеств еще не произошло. Впрочем, не во всех разделах математики на самом деле необходима даже «высокая» теория множеств. Используется лишь простейший теоретико-множественный язык, и не требуется знания каких-то глубоких фактов.

Во введении к учебнику «Философия математики и технических наук» проф. В.А. Лебедев отмечает, что предмет математики постоянно расширяется, старые определения теряют общность, и на этом основании выражает сомнение в том, что можно вообще дать окончательное и всеобъемлющее определение того, чем является математика. Действительно, приведенные выше определения страдают одним существенным недостатком: они определяют *всю* математику через какие-то конкретные математические понятия или объекты, актуальные на каком-то конкретном этапе развития математики. Проходит время, и актуальным становится нечто иное. Хотя, конечно, предыдущие достижения не отменяются, и многое старое продолжает использоваться и изучаться. Но актуальным все-таки становится нечто новое. Так что понятно, что и теория категорий не будет последним словом в математическом прогрессе (хотя понятно также, что она еще даже не достигла пика своего развития).

Если вспомнить, например, что физика определяется как наука о наиболее общих законах природы, а биология – как наука о всевозможных формах проявления жизни, и эти определения фактически не зависят от сиюминутных факторов (не считая того, что меняются представления о том, что такое «природа», что такое «законы» и что такое «жизнь»), то ситуация с определением того, что же такое наука математика, начинает казаться несколько странной.

Возможно, что выход и правильное определение нашел еще в 1980-х годах известный французский философ Ален Бадью (Alain Badiou), создавший всеобъемлющую философскую систему, в рамках которой математика имеет основополагающий статус. Бадью фактически приравнивает математику к онтологии, фундаментальнейшей философской дисциплине. Однако, судя по всему, Бадью понимает онтологию не так, как авторы едва ли не всех учебников на русском языке. Поэтому подробное обсуждение данного вопроса выходит далеко за рамки лекционного курса для аспирантов-математиков. У пишущего эти строки сложилось мнение (возможно, субъективное), что, согласно Бадью, имеется некий первичный «слой» Бытия, находящийся вне физического времени и физического пространства, и математика – это тот язык, на котором с нами говорит именно этот слой бытия. Напомним, что согласно М. Хайдеггеру, язык – это «дом» Бытия. Но «языков» на самом деле много (например, особым языком является музыка), и каждый такой язык, по-видимому, позволяет нам соприкоснуться с каким-то особым слоем того, что принято называть Бытием (а это не Сущее, то есть не то, о чем можно сказать, что оно «есть»). Возможно даже, что нам придется вернуться к формулировке древнегреческого философа Парменида, который говорил, что Бытие – это мышление (или сознание).

А.Г. Черняков (математик, ставший известным философом, умерший в 2010-м году) обнаружил нечто подобное точке зрения Бадью в ранней книге (не переведенной на русский язык) знаменитого немецкого философа Эдмунда Гуссерля (также начинавшего как математик и даже защитившего диссертацию под руководством самого Карла Вейерштрасса). Согласно Гуссерлю, математика – это формальная онтология.

Отметим, что имеется такая интерпретация основ квантовой физики (опирающаяся на знаменитую книгу Дж. Фон Неймана «Математические методы квантовой механики»), согласно которой невозможно локализовать человеческое сознание в обычном физическом пространстве. Эту точку зрения разделяет, например, академик РАН А.Н. Паршин (в его книге «Путь» это сказано на стр. 121, 122).

Лектор излагает свою точку зрения, которая с течением времени эволюционирует. Лектор не будет возражать, если слушатель на экзамене расскажет, что есть в указанных ниже книгах.

Литература

Канке В.А. Философия математики, физики, химии, биологии. – М.: КНОРУС, 2011. – 368 с.

Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. Под ред. В.А. Успенского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 224 с.

Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983. – 300 с.

Философия математики и технических наук / Под общ. ред. проф. С.А. Лебедева: Учебное пособие для вузов. – М.: Академический Проект, 2006. – 779 с.

Дополнительная литература

Бадью А. Манифест философии. СПб.: Machina, 2003. – 184 с.

Паршин А.Н. Путь. Математика и другие миры. – М.: Добросвет, 2002. – 240 с.

Замечания и комментарии

Имеется большое количество источников, и много различных точек зрения. Лектор будет излагать свою позицию, но не настаивает, чтобы слушатель на экзамене отвечал строго по лекциям.

6. Аксиоматический метод в математике. Математическое доказательство

История аксиоматического метода, и три этапа его развития. Важнейшие аксиоматические системы. Понятие математического доказательства и его эволюция. Проблема надежности и достоверности математического доказательства: различные точки зрения.

Литература

Философия математики и технических наук / Под общ. ред. проф. С.А. Лебедева: Учебное пособие для вузов. – М.: Академический Проект, 2006. – 779 с.

Успенский В.А. Что такое аксиоматический метод? – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 96 с.

Перминов В.Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства. Изд. 2-е, стереотипн. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.

Дополнительная литература

Кранц С. Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить. – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 320 с.

Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики/ Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. – М.: Книжный дом «Либроком», 2014 . – 432 с.

Целищев В.В. Эпистемология математического доказательства. – Новосибирск: Параллель, 2006. – 212 с.

Замечания и комментарии

Дополнительная литература, к сожалению, может оказаться недоступной, но в основной можно найти все необходимое. Лектор будет излагать свою точку зрения, но не настаивает, чтобы на экзамене слушатель придерживался именно её.

7. Математика как язык науки. Математизация

История математизации научного знания на примере физики. Понятие математической модели. Причины математизации. Направления математизации. Конкретные примеры. Границы математизации.

Литература

Рузавин Г.И. Математизация научного знания. – М.: «Мысль», 1984. – 206 с.

Дополнительная литература

Ильин В.В. Философия: учебник. В 2 т. Т. 1. – Ростов н/Д.: «Феникс», 2006. – 832 с.

Замечания и комментарии

Для подготовки к экзамену вполне достаточно прочитать первые главы небольшой книжку Г.И. Рузавина. Поэтому на лекциях данный вопрос излагается только в самом общем виде. Однако различные аспекты проблемы математизации встречаются в ряде других тем (вопросов) данного курса.

8. Математическое моделирование и методология прикладной математики (в частности, механики)

Понятие математической модели. Современная точка зрения на прикладную математику. Особенности и отличия прикладной математики от «чистой» математики. Философское осмысление.

Литература

Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. С примерами из механики. 3-е изд. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с.

Дополнительная литература

Дроздов Н.Д. История и методология прикладной математики. – Тверь: Твер. гос. ун-т., 2006. – 303 с.

Русанов Н.В., Росляков Г.С. История и методология прикладной математики. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2004. – 244 с.

Замечания и комментарии

Лектор обычно опирается на книгу Блехмана, Мышкиса и Пановко. Поэтому можно считать материал стандартным. Дополнительная литература также доступна.

9. Существование математических объектов. Платонизм в математике

Проблема существования объектов, изучаемых математикой: различные точки зрения. Макс Тегмарк и его взгляды на математику и физику.

Литература

Михайлова Н.В. Математический платонизм и проблема внутренней непротиворечивости математики // Философия науки. – 2008. – № 1. – С. 80–90.

Пенроуз Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 688 с.

Дополнительная литература

Целищев В.В. Онтология математики: объекты и структуры. – Новосибирск: Нонпарель, 2003. – 240 с.

Тегмарк М. Наша математическая Вселенная. В поисках фундаментальной природы реальности. – М.: Изд-во АСТ: CORPUS, 2017. – 592 с.

Замечания и комментарии

Материал достаточно дискуссионный. Список литературы не исчерпывающий. Лектор излагает свою позицию, но допускает, что ответ на экзамене будет опираться на другие источники.

10. Теория множеств как основания математики. Теоретико-множественное направление в обосновании математики

История создания теории множеств. Георг Кантор. Самое главное открытие Кантора: бесконечное количество разновидностей бесконечностей. Роль теории множеств в современной математике.

Литература

Целищев В.В. Философия математики. Ч. 1. – Новосибирск: Наука, 2002. – 212 с.

Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2006. – 552 с.

Какой-нибудь хороший учебник по теории множеств.

Дополнительная литература

Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 430 с.

Катасонов В.Н. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. – М.: Мартис, 1999. – 207 с.

Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 232 с.

Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

Манин Ю.И. Математика как метафора. 2-е изд., доп. – М.: МЦНМО, 2010. – 424 с.

Замечания и комментарии

Большая часть современной математики всё ещё построена из теоретико-множественного материала. Для качественного ответа на вопрос необходимо знание истории создания теории множеств, и (хотя бы в самых общих чертах) основных ее результатов. Для аспирантов-математиков это не должно быть особо трудным.

11. Проблема бесконечности в математике

Математическая бесконечность в канторовой (аксиоматизированной) теории множеств, и некоторые другие точки зрения.

Литература

Хороший учебник по теории множеств.

Бурова И.Н. Развитие проблемы бесконечности в истории науки – М.: Наука, 1987. – 132 с.

Катасонов В.Н. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. – М.: Мартис, 1999. – 207 с.

Дополнительная литература

Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты / под ред. А.Г. Барабашева. – М.: Янус-К, 1997. – 400 с.

Замечания и комментарии

Данный вопрос фактически является продолжением предыдущего, и даже частично с ним пересекается. Строгая научная теория бесконечности на данный момент – это канторовская теория множеств, ценность всего остального достаточно относительна. Впрочем, лектор будет излагать и некоторые общие соображения.

12. Кризисы в математике

Три кризиса оснований математики и их преодоление.

Литература

Светлов В.А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

Дэвис Б. Куда движется математика? // URL: http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/ 164681/Kuda_dvizhetsya_matematika (Оригинал – в Notices of the Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 52. No 11.)

Дополнительная литература

Литературы очень много

Замечания и комментарии

Материал стандартный, на лекции будет излагаться кратко.

13. Математика и логика. Логицизм

Программа логицизма (Г. Фреге, Б. Рассел, А. Н. Уайтхед). Общие вопросы взаимодействия математики и логики: метаматематика стала частью математики.

Литература

Светлов В.А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. – М.:Наука, 1983. – 300 с.

Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

Дополнительная литература

Рассел Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. – 264 с.

Бирюков Б.В., Тростников В.Н. Жар холодных числ и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 232 с.

Замечания и комментарии

Материал стандартный, на лекции будет излагаться кратко.

14. Интуиционизм и конструктивизм

Программа интуиционизма (Л.Э.Я. Брауэр).

Литература

Светлов В.А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983. – 300 с.

Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

Дополнительная литература

Панов М.И. Методологические проблемы интуиционистской математики. – М.: Наука, 1984. – 224 с.

Гейтинг А. Интуиционизм. – М.: Мир, 1965. – 200 с.

Тростников В.Н. Конструктивные процессы в математике (Философский аспект). – М.: Наука, 1975. – 255 с.

Замечания и комментарии

Материал стандартный, на лекции будет излагаться кратко. Можно отметить, что с появлением теории топосов некоторые идеи интуиционизма сейчас снова стали актуальными.

15. Программа обоснования математики Д. Гильберта (формализм, финитизм)

Программа Д. Гильберта (формализм).

Литература

Светлов В.А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983. – 300 с.

Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

Дополнительная литература

Почти все основные учебники из большого списка.

Замечания и комментарии

Материал стандартный, литературы очень много, на лекции будет излагаться кратко.

16. Ограничительные теоремы (Геделя и др.), их смысл и значение

Курт Гедель, и его знаменитая теорема. Обзор близких результатов. Влияние теоремы Гёделя на математику. Поиск аналогий в других областях знания. Философское осмысление теоремы Гёделя.

Литература

Паршин А.И. Размышления над теоремой Гёделя // Вопросы философии. –2000. – № 6. – С. 92–109.

Паршин А.Н. Путь. Математика и другие миры. – М.: Добросвет, 2002. – 240 с.

Мадер В.В. Введение в методологию математики (Гносеологические, методологические и мировоззренческие аспекты математики. Математика и теория познания). – М.: Интерпракс, 1995. – 494 с.

Дополнительная литература

Светлов В.А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

Замечания и комментарии

Материал по собственно теореме Гёделя (и родственных ей теорем) стандартный, и его можно найти во множестве источников. Лектор сделает упор на философских и мировоззренческих аспектах, и приведет некоторые аналогии с теоремой Гёделя в других науках.

17. Философия и обоснование математики

Частные успехи и конечные неудачи программ обоснования. Кризисные явления в современной математике. Философское осмысление кризисных явлений в математике. Различные точки зрения на проблему обоснования (непротиворечивости) математики.

В.А. Воеводский и его программа унивалентных оснований математики.

Проблема обоснования математики в философской системе Алена Бадью.

Литература

Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

Перминов В.Я. О системном подходе к обоснованию математики // Философия математики: актуальные проблемы. Тезисы Международной научной конференции. М.: Макс-Пресс, 2009.

Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983. – 300 с.

Дополнительная литература

Михайлова Н.В. Системный синтез программ обоснования современной математики. – Мн.: МГВРК, 2008. – 332 с.

Замечания и комментарии

Вопрос многогранный и дискуссионный. Лектор будет излагать в том числе и свою точку зрения.

18. Эволюция понятия числа. Число, функция, предел, группа, кольцо, категория

Понятие числа проделало за многие тысячелетия длинный эволюционный путь. На разных исторических этапах на первый план выходили разные стороны этого понятия, причем его содержание постоянно расширялось. Векторы, матрицы, элементы групп и колец – это, по сути, обобщенные числа. Теория чисел соединилась с алгеброй и, в конечном счете, в начале 20-го века алгебра стала наукой о таких обобщенных числах, где есть бинарные операции сложения и/или умножения. Но процесс обобщения продолжался, и математики поняли, что заслуживают изучения структуры с самыми произвольными операциями, даже не обязательно бинарными. Так возникла область науки, которая называется универсальной (или общей) алгеброй. Универсальная алгебра описывает алгебру в целом, «глобально», с самых общих позиций. Объекты изучения – всевозможные алгебраические структуры (в том числе еще не «открытые»), и их самые общие свойства. В соединении с теорией категорий это дает возможность как бы с высоты посмотреть если не на всю математику, то на ее довольно большую и существенную часть, и уловить некоторые тенденции дальнейшего развития.

Вкратце об истории вопроса. Эволюция понятия числа. От величин и натуральных чисел к числам действительным (вещественным) и комплексным. Пределы и функции. Понятие функциональной зависимости и его роль в современном естествознании как математической основы понятия «закона природы». Кватернионы, векторы, матрицы, тензоры. Группы как математическая модель понятия симметрии. Симметрийный характер «законов природы» нового поколения. p-адические числа и моделирование процессов мышления (А.Ю. Хренников). Нестандартный анализ. Многообразие абстрактных алгебраических структур. Основное предназначение чисел и подобных им объектов – кодирование в символьном виде, хранение и обработка различных видов информации.

Литература

Панов В.Ф. Математика древняя и юная. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 648 с.

Дополнительная литература

Юшкевич А.П. О развитии понятия функции // Историко-математические исследования. Вып. XVII. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – С. 123–150.

Замечания и комментарии

Лектор не может пока указать ни одного источника (и даже небольшой группы источников), который (которые) бы его полностью удовлетворял(и), и будет излагать и фактический материал, и свою точку зрения.

19. Эволюция понятия математического пространства. От евклидовых пространств к топосам

Наиболее общее определение математического пространства можно найти в Математическом энциклопедическом словаре, на стр. 503-504. Оно таково: «Пространство – логически мыслимая среда (или структура), в которой осуществляются другие формы и те или иные конструкции». Эволюция понятия математического пространства: от геометрии Евклида к топологии и теории топосов. Всеобщность современного определения понятия математического пространства, выходящая за рамки собственно математики. Формы связи геометрии и алгебры. Единство математического знания.

Литература

Млодинов Л. Евклидово окно. История геометрии от параллельных прямых до гиперпространства. – М.: Livebook, 2013. – 384 с.

Дополнительная литература

Гудков Д.А. Н. И. Лобачевский. Загадки биографии. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. – 242 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.

Николай Иванович Лобачевский: историко-биографический сборник. – Казань: Жиен, 2014. – 656 с.

Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. – М.: Наука, 1976. – 413 с.

Замечания и комментарии

Лектор не может пока указать ни одного источника, который бы его полностью удовлетворял, и будет излагать и фактический материал, и свою точку зрения. С точки зрения ряда математиков (например, А. Гротендика), на данный момент высшей формой эволюции понятия математического пространства является понятие топоса. Впрочем, и это, скорее всего, не окончательный ответ, к тому же оставляющий в стороне многие другие аспекты вопроса.

20. Теоретико-категорные основания математики. Топосы

Теория категорий – это то, что приходит на смену теории множеств в качестве первичного строительного материала, из которого можно «вылепить» все остальные ныне существующие математические структуры. Это также и новый общематематический язык, на котором можно достаточно просто выражать то, что невозможно, или слишком сложно выразить на языке теории множеств. Определение категории содержит в себе самые существенные свойства произвольной математической теории. В отличие от теории множеств, где математические структуры надо определять отдельно, и зачастую довольно громоздко, в определении категории уже «встроены» самые основные признаки любой достаточно общей математической структуры. Основы теории категорий были заложены Сондерсом Маклейном и Самюэлем Эйленбергом в 1945-м году. Вся теория множеств – это только один частный пример категории. В 1960-х и 1970-х годах был открыт широкий класс категорий, свойства которых позволяют проводить внутри этих категорий построения, формально аналогичные всем основным теоретико-множественным построениям. Таким образом, на основе этих категорий возможно построение полных аналогов всей теоретико-множественной математики (аналогов, но далеко не копий). Такие категории называются топосами. У топосов есть внутренние логики, далеко не всегда двузначные, у многих топосов есть свои аналоги натуральных и действительных чисел, внешне непохожие на привычные нам натуральные и действительные числа. Ситуация похожа на ту, которая возникла после открытия геометрии Лобачевского, только вместо новой геометрии появилось множество новых «математик», отчасти подобных теоретико-множественной.

В настоящий момент теория категорий уже нашла применения и в компьютерных науках (типы данных), и в теоретической физике.

История создания теории категорий и функторов. С. Маклейн и С. Эйленберг. Роль теории категорий в современной математике. История создания теории топосов. А. Гротендик и У. Ловер. Аналогия между открытием факта множественности геометрий (Лобачевский), и открытием факта множественности «математик» и логик, соответствующих разным топосам. В частности, теоретико-множественная математика с ее двузначной (аристотелевой) логикой соответствует топосу – категории всех множеств и их отображений. Примеры других топосов с другими (неаристотелевыми) логиками. Теория категорий и топосов в физике.

Литература

Канке В.А. Философия математики, физики, химии, биологии. – М.: КНОРУС, 2011. – 368 с.

Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983. – 300 с.

Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. – М.: Мир, 1983. – 488 с.

Дополнительная литература

Маклейн С. Категории для работающего математика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с.

Родин А.В. Теория категорий и поиски новых математических оснований физики // Вопросы философии. – 2010. – № 7.

Замечания и комментарии

Лектор не может пока указать ни одного источника, который бы его полностью удовлетворял, и будет излагать и фактический материал, и свою точку зрения. При ответе на вопрос крайне желательно знание основных понятий теории категорий. Необходимость этого в том, что в настоящий момент происходит переход всей математики с теоретико-множественного языка на язык теории категорий. Теория категорий по-видимому станет в обозримом будущем тем же, чем была для математики 20-го века теория множеств.

21. Математика и культура

Математика и мышление. Место математики в системе культуры.

Литература

Казарян В.П., Лолаев Т.П. Математика и культура. Второе изд., испр. и дополн. – М.: Научный мир, 2004. – 288 с.

Дополнительная литература

Манин Ю.И. Математика как метафора. 2-е изд., доп. – М.: МЦНМО, 2010. – 424 с.

Волошинов А.В. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 1992. – 335 с.

Замечания и комментарии

Книгу Казаряна и Лолаева, к сожалению, нельзя пока назвать ни вполне доступной, ни вполне пригодной. Лектор вкратце изложит то, что он считает существенным в данном вопросе.

22. Математика и физика

Краткая история взаимодействия физики и математики. Проблема «непостижимой эффективности» математики в физике. Геометризация физики. Пифагореизм (в современной интерпретации) как (неявная) идеология работающих физиков. Наметившийся отрыв математизированной теоретической физики от экспериментальной базы. Макс Тегмарк и его гипотеза о математической первооснове всего материального. Философское осмысление: различные точки зрения.

Литература

Баксанский О.Е. Физика и математика: Анализ оснований взаимоотношения. Методология современного естествознания. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 188 с.

Дополнительная литература

Владимиров Ю.С. Метафизика. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 568 с.

Манин Ю.И. Математика и физика. – М.: Изд-во «Знание», 1979. – 63 с.

Манин Ю.И. Математика как метафора. 2-е изд., доп. –М.: МЦНМО, 2010. – 424 с.

Тегмарк М. Наша математическая Вселенная. В поисках фундаментальной природы реальности. – М.: Изд-во АСТ: CORPUS, 2017. – 592 с.

Замечания и комментарии

Много литературы, много разных точек зрения. Лектор попытается изложить самое, с его точки зрения, принципиальное. Это не исключает того, что у слушателей будет собственная точка зрения. Главное – чтобы она опиралась на серьезные источники.

23. Вычислимость и сложность. Математика и компьютер

Краткая история вычислительной техники. История создания теории алгоритмов. Тезис Чёрча. Вычислимость и сложность. Колмогоровская сложность и вероятность. Проблема P vs NP как возможный аналог теоремы Гёделя о неполноте. Возможность или невозможность искусственного интеллекта на основе современных компьютеров, и теорема Гёделя о неполноте. В частности, позиция Р. Пенроуза. Компьютерное доказательство математических теорем: проблемы и перспективы. Квантовый компьютер и квантовые вычисления: краткий обзор.

Литература

Бирюков Б.В., Тростников В.Н. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 232 с.

Дополнительная литература

Пенроуз Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 688 с.

Тростников В.Н. Конструктивные процессы в математике (философский аспект). – М.: Наука, 1975. – 255 с.

Замечания и комментарии

Материал разбросан по разным источникам, и не все из них можно считать доступными. Лектор попытается дать краткий обзор самого важного.

24. История и философские проблемы теории вероятностей

Краткая история теории вероятностей. Колмогоровская аксиоматика теории вероятностей – решающий этап превращения теории вероятностей в строгую математическую дисциплину. Проблемы интерпретации. Вероятности в квантовой физике. Вероятностное мировоззрение в современном естествознании. Философское осмысление.

Литература

Кравец А.С. Природа вероятности (философские аспекты). – М.: Мысль, 1976. – 172 с.

Дополнительная литература

Млодинов Л. (Не)совершенная случайность. Как случай управляет нашей жизнью. – 3-е изд. – Москва: Livebook, 2016. – 352 с.

Майстров Л.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.

Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980. – 269 с.

Хренников А.Ю. Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2003. – 208 с.

Замечания и комментарии

Всё необходимое для качественного ответа на экзамене можно найти в книгах А.С. Кравца и Л.Е. Майстрова. Поэтому данный вопрос на лекциях обычно не излагается подробно.

Требования к рефератам

Оформление – стандартное, примерно такое же, как у курсовых или выпускных работ. Соответствующий стандартный титульный лист. Объем – около 20 страниц (верхний предел не ограничен). Особо важной частью реферата является список использованных источников, печатных или из интернета. Необходимо приводить точное библиографическое описание каждого источника (для источников из интернета – URL-адрес). Реферат не является полностью оригинальным творением его автора, это прежде всего сжатый обзор имеющихся источников. Крайне желательно указывать, из какого конкретного источника позаимствована та или иная информация. В случае, когда приводятся дословные цитаты, это требование абсолютно обязательно. Причем цитаты должны приводиться в кавычках, чтобы не возникало ощущения того, что это именно автор реферата излагает что-то от первого лица. Источники информации авторы рефератов ищут самостоятельно. Кое-что имеется на DVD-диске, который выдаст лектор, но, вероятно, далеко не всё.

Ориентировочный срок сдачи рефератов – до конца апреля. Реферат сдается лектору в бумажной форме, и одновременно электронная версия посылается лектору на указанный им адрес электронной почты. Готовый отзыв лектор передает через несколько дней автору реферата, который относит его в отдел аспирантуры.

На уже упоминавшемся DVD-диске имеются образцы аспирантских рефератов прошлых лет, как хорошие, так и не очень хорошие. Пишущие реферат аспиранты должны помнить, что копирование старых чужих рефератов автоматически приведет к отрицательному отзыву. Однако опыт показывает, что одну и ту же тему можно раскрыть многими разными способами, притом в каждом случае достаточно хорошо. И при этом каждый раз могут обнаруживаться новые источники. Добросовестный подход гарантирует успех.

Темы рефератов

1. Пифагор и пифагореизм
2. Платон и математика
3. Аристотель: логика и математика
4. «Начала» Евклида и их значение
5. Архимед: математик и механик
6. Аполлоний Пергский – творец теории конических сечений
7. Евдокс Книдский
8. Диофант Александрийский и диофантовы уравнения
9. Математика древнего Египта
10. Математика древнего Вавилона
11. Математик Омар Хайям
12. Математика средневекового Востока
13. Абу Райхан Беруни (Бируни, ал-Бируни, 973-1048) как математик
14. Мухаммед бен-Муса ал-Хорезми (783-ок. 850)
15. Математик Гийас ад-Дин ал-Каши (ал-Кашани) (XV век)
16. Улугбек и математики Самаркандской обсерватории (XV век)
17. Основные этапы развития древнекитайской математики
18. Особенности понятия числа в древнекитайской математики
19. Математика древней и средневековой Индии
20. Индийский математик Сринивза (Шриниваса) Рамануджан (1887–1920)
21. История решения уравнений 3-й и 4-й степеней (Никколо Тарталья, Джироламо Кардано и др.)
22. Франсуа Виет (1540–1603)
23. Рене Декарт как математик
24. Развитие аналитической геометрии в XVII–XVIII веках
25. Пьер Ферма
26. Кеплер как математик и механик
27. Английский математик XVII века Джон Валлис (Уоллес)
28. Предыстория дифференциального и интегрального исчисления
29. И. Ньютон – один из творцов «высшей математики» (математического анализа).
30. И. Ньютон и механика
31. И. Ньютон и закон всемирного тяготения

32. Г.-В. Лейбниц – один из творцов «высшей математики» (математического анализа).

33. Б. Риман и его роль в развитии геометрии и топологии

34. Б. Риман и его роль в развитии теории функций

35. Бернард Больцано и его роль в создании теории множеств

36. Георг Кантор и его труды по теории множеств

37. Эрнст Цермело и аксиоматизация теории множеств

38. Эрнст Цермело и аксиома выбора

39. Парадоксы наивной теории множеств

40. Готлоб Фреге (1848–1925)

41. Джузеппе Пеано (1858–1932)

42. Шарль Эрмит (1822–1901)

43. Анри Пуанкаре и его математическое творчество

44. Анри Пуанкаре и теория относительности

45. Давид Гильберт и его математическое творчество

46. Давид Гильберт и его программа обоснования математики

47. Проблемы Гильберта

48. Бертран Рассел и его «математическая философия»

49. Л.Э.Я. Брауэр и история интуиционизма

50. История филдсовских премии

51. Эварист Галуа (1811–1832) и теория Галуа

52. Нильс Хенрик Абель (1802–1829)

53. Николя Бурбаки и его влияние на математику 20-го века

54. Карл Вейерштрасс и обоснование математического анализа

55. Огюстен Луи Коши

56. История создания строгой теории действительных чисел

57. История создания теории комплексных чисел

58. «Большая» (или Великая) теорема Ферма и ее доказательство Э. Уайлсом

59. Гипотеза Пуанкаре и ее доказательство Г. Перельманом

60. Задачи тысячелетия (Millenium Prize Problems)

61. История гипотезы Римана

62. Проблема P vs NP

63. Семейство математиков Бернулли

64. Леонард Эйлер

65. Французская математика в период революции и наполеоновских войн

66. Жан Батист Жозеф Фурье

67. Лазар Карно и его «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых»

68. Джордж Беркли и его критика исчисления бесконечно малых

69. История начального периода проективной геометрии (Ж.В. Понселе, Я. Штейнер и др.)

70. Жозеф Луи Лагранж

71. Пьер Симон Лаплас и теория вероятностей

72.Карл Фридрих Гаусс и теория чисел

73. Карл Фридрих Гаусс и «основная теорема алгебры»

74. Софус Ли (1842–1899)

75. Рихард Дедекинд

76. Феликс Клейн

77. Эрнст Куммер и возникновение алгебраической теории чисел

78. Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865) и теория кватернионов

79. Анри Леон Лебег

80. История понятия интеграла

81. Этапы развития аксиоматического метода

82. Герман Вейль

83.Творцы математической логики

84. Курт Гёдель

85. Теорема Гёделя о неполноте и (не)возможность создания искусственного интеллекта

86. Алан Тьюринг и начальный этап теории алгоритмов

87.Джон фон Нейман

88.Творцы теории вероятностей

89. Предыстория неевклидовой геометрии (до Лобачевского)

90. Биография Н.И. Лобачевского

91. Янош Бойаи (Больяи, 1802–1860)

92. Лобачевский и Остроградский

93. Лобачевский и Гаусс

94. История признания геометрии Лобачевского (Э. Бельтрами, А. Пуанкаре, Ф. Клейн и др.)

95. П.Л. Чебышов, его жизнь и творчество
96. Биография и научные достижения С.В. Ковалевской
97. А.М. Ляпунов (1857–1918)
98. Эмми Нетер – величайшая женщина-математик
99. Выдающиеся советские и российские женщины-математики
100. Н.Н. Лузин и возникновение московской математической школы
101. М.В. Келдыш
102. Л.С. Понтрягин
103. С.Л. Соболев
104. М.А. Лаврентьев
105. А.И. Мальцев
106. И.Р. Шафаревич
107. Н.Г. Чеботарёв
108. А.Н. Колмогоров
109. Вклад А.Н. Колмогорова в теорию вероятностей
110. Ю.В. Матиясевич и решение 10-й проблемы Гильберта
111. В.И. Арнольд
112. И.М. Гельфанд
113. Ю.И. Манин
114. Отец и сын: Д.К. Фаддеев и Л.Д. Фаддеев
115. Семья математиков: П.С. Новиков, Л.В. Келдыш и их сын С.П. Новиков
116. Ю.Л. Ершов
117. А.Т. Фоменко
118. Советские математики – лауреаты филдсовской премии
119. Российские математики – лауреаты филдсовской премии (Воеводский, Окуньков, Смирнов)
120. Создание теории категорий (С. Маклейн, С. Эйленберг)
121. Александр Гротендик (1928–2014)
122. П.С. Порецкий (1846–1907) и его труды по математической логике
123. История возникновения символьных математических обозначений
124. Бенуа Мандельброт и создание фрактальной геометрии
125. Эли Картан и его сын Анри Картан
126. История гипотезы континуума и ее доказательства
127. История числа π

128. Периодизация истории математики А.Н. Колмогорова

129. А.А. Марков (старший)

130. А.А. Марков (младший) и конструктивное направление в математике

131. История нестандартного анализа

132. Знаменитые задачи древности (трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба, гиппократовы луночки)

133. Дифференциальные уравнения в XVIII–XIX веках

134. Комплексный анализ в XIX веке и его творцы

135. История вариационного исчисления

136. История вариационных принципов механики

137. Начальный период теории тригонометрических рядов

138. Начальный этап истории вычислительной техники

139. История компьютерной алгебры

140. Трансцендентные числа

141. История теории чисел до XIX века

142. Теория чисел в XIX веке

143. Казанская геометрическая школа в XX веке

144. Казанская школа механики в конце XIX – начале XX века

145. Джон Форбс Нэш

146. Абелевские премии

147. Возникновение функционального анализа

148. Возникновение теории вейвлетов

149. П. Вопенка и альтернативная теория множеств

150. В.А. Воеводский и «унивалентные основания математики»

ОБЩИЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Философия математики-1

1. Беляев Е.А., Перминов В.Я. Философские и методологические проблемы математики. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 217 с.

2. Веревкин А.Б. История и философия математики (Учебно-методическое пособие для аспирантов). – Ульяновск: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2013. – 82 с.

3. Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Современная философия математики: недомогания и лечение. – Новосибирск: «Параллель», 2007. – 143 с.

4. Канке В.А. Философия математики, физики, химии, биологии. – М.: КНОРУС, 2011. – 368 с.

5. Клайн М. Математика. Утрата определенности. – М.: Мир, 1984. – 434 с.

6. Мадер В.В. Введение в методологию математики (Гносеологические, методологические и мировоззренческие аспекты математики. Математика и теория познания). – М.: Интерпракс, 1995. – 494 с.

7. Михайлова Н.В. Системный синтез программ обоснования современной математики. – Мн.: МГВРК, 2008. – 332 с.

8. Панов В.Ф. Математика древняя и юная. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 648 с.

9. Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

10. Рузавин Г.И. О природе математического знания (Очерки по методологии математики). – М.: Мысль, 1968. – 302 с.

11. Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983. – 300 с.

12. Рузавин Г.И. Математизация научного знания. – М.: Мысль, 1984. – 206 с.

13. Светлов В.А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

14. Словарь философских терминов / Научн. редакция проф. В.Г. Кузнецова. – М.: ИНФРА-М, 2005. – 731 с.

15. Философия математики и технических наук / Под общ. ред. проф. С.А. Лебедева: Учебное пособие для вузов. – М.: Академический Проект, 2006. – 779 с.

16. Целищев В.В. Философия математики. Ч. 1. – Новосибирск: Наука, 2002. – 212 с.

17. Целищев В.В. Онтология математики: объекты и структуры. – Новосибирск: Нонпарель, 2003. – 240 с.

Философия математики-2

1. Ален Бадью. Философия и событие. Беседы с кратким введением в философию Алена Бадью. – Институт Общегуманитарных Исследований, 2013. – 192 с.

2. Бадью А. Манифест философии. СПб.: Machina, 2003. – 184 с.

3. Баксанский О.Е. Физика и математика: Анализ оснований взаимоотношения. Методология современного естествознания. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 188 с.

4. Барабашев А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 160 с.

5. Баранец Н.Г., Веревкин А.Б. Образы математики. Советские математики о науке. – Ульяновск: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2015. – 328 с.

6. Барроу Д. Новые теории всего. – Минск: Попурри, 2012. – 368 с.

7. Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты / под ред. А.Г. Барабашева. – М.: Янус-К, 1997. – 400 с.

8. Бесконечность и Вселенная. – М.: Мысль, 1969. – 325 с.

9. Бирюков Б.В., Тростников В.Н. Жар холодных числ и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 232 с.

10. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. С примерами из механики. 3-е изд. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с.

11. Бурова И.Н. Развитие проблемы бесконечности в истории науки – М.: Наука, 1987. - 132 с.

12. Бурова И.Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. – М.: Наука, 1976. – 176 с.

13.Вейль Г. Математическое мышление. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 400 с.

14. Вейль Г. О философии математики. – Изд. 2-е, стереотипное. – М.: КомКнига: 2005. – 128 с.

15. Вечтомов Е.М. Метафизика математики. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.

16. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. – М. АСТ: Астрель, 2010. – 177 с. (и другие издания)

17. Витгенштейн Л. Философские работы (часть II, книга I). – М.: Гнозис, 1994. – 213 с.

18. Владимиров Ю.С. Метафизика. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 568 с.

19. Волошинов А.В. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 1992. – 335 с.

20. Гейтинг А. Интуиционизм. – М.: Мир, 1965. – 200 с.

21. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. – М.: Мир, 1983. – 488 с.
22. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Введение в логику и методологию науки. – М.: Интерпракс. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1994. – 256 с.
23. Громов М. Кольцо тайн: вселенная, математика, мысль. – М.: МЦНМО, 2017. – 288 с.
24. Декарт Р. Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках и другие философские работы. – М.: Академический проект, 2011. – 335 с.
25. Делез Ж., Гваттари Ф. Что такое философия? – М.:Академический Проект, 2009. – 261 с.
26. Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики/ Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. – М.: Книжный дом «Либроком», 2014. – 432 с.
27. Дроздов Н.Д. История и методология прикладной математики. – Тверь: Твер. гос. ун-т., 2006. – 303 с.
28. Жмудь Л.Я. Пифагор и его школа (ок. 530 – ок. 430 гг. до н.э.) – Л.: Наука. Ленинградск. отд. 1990. – 192 с.
29. Жуков Н.И. Философские основания математики. 2-е ид., испр. и доп. – Минск: Изд-во «Университетское», 1990. – 110 с.
30. Ильин В.В. Философия: учебник. В 2 т. Т. 1. – Ростов н/Д.: «Феникс», 2006. – 832 с.
31. Казарян В.П., Лолаев Т.П. Математика и культура. Второе изд., испр. и дополн. – М.: Научный мир, 2004. – 288 с.
32. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
33. Кассирер Э. Философия символических форм. Т. III: Феноменология познания. – М.: Академический проект, 2011. – 398 с.
34. Катасонов В.Н. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. – М.: Мартис, 1999. – 207 с.
35. Квантовый компьютер и квантовые вычисления. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 288 с.
36. Кедровский О.И. Взаимосвязь философии и математики в процессе исторического развития. От Фалеса до эпохи Возрождения. – Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1973. – 213 с.
37. Кедровский О.И. Взаимосвязь философии и математики в процессе исторического развития. От эпохи Возрождения до начала XX века. – Киев: Изд. объединение «Вища школа», 1974. – 342 с.
38. Клайн М. Математика. Поиск истины. – М.: Мир, 1988. – 295 с.
39. Клини С.К. Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – 480 с.

40. Клини С., Весли Р. Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 272 с.
41. Кравец А.С. Природа вероятности (философские аспекты). – М.: Мысль, 1976. – 172 с.
42. Купцов В.И. Детерминизм и вероятность. – М.: Политиздат, 1976. – 256 с.
43. Кранц С. Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить. – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 320 с.
44. Кузанский Н. Об ученом незнании. – М.: Академический проект, 2011. – 159 с.
45. Кузнецов Б.Г. История философии для физиков и математиков. – М.: Наука, 1974. – 352 с.
46. Лакатос И. Доказательства и опровержения (как доказываются теоремы) // В книге: Лакатос И. Избранные произведения по философии и методологии науки – М.: Академический Проект; Трикста, 2008. – С. 25–198 (и другие издания)
47. Лекторский В.А. Эпистемология классическая и неклассическая. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 256 с.
48. Ловецкий Г.И. Философия и математика: высшие идеи и числа в Древнем мире и античности. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 756 с.
49. Любищев А.А. Линии Демокрита и Платона в истории культуры. – СПб.: Алетейя, 2000. – 256 с.
50. Маклейн С. Категории для работающего математика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с.
51. Манин Ю.И. Математика и физика. – М.: Изд-во «Знание», 1979. – 63 с.
52. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. – М.: Сов. радио, 1979. – 168 с.
53. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. – М.: Сов. радио, 1980. – 128 с.
54. Манин Ю.И. Математика как метафора. 2-е изд., доп. – М.: МЦНМО, 2010. – 424 с.
55. Математика и опыт / Под ред. А.Г. Барабашева. – М.: Изд-во МГУ, 2002. – 624 с.
56. Математическая составляющая / Редакторы-составители Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин; Художник-оформитель Р.А. Кокшаров. – М.: Фонд «Математические этюды», 2015. – 151 с.
57. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.

58. Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 232 с.
59. Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и математика / под ред. Ю.С. Владимирова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 463 с.
60. Методологический анализ математических теорий. Сб. научных трудов / отв. ред. д. филос. н. М.И. Панов. – М.: Наука, 1987. – 296 с.
61. Методологический анализ оснований математики / Ф. Китчер, В.Я. Перминов, Б.И. Федоров и др. – М.: Наука, 1988. – 175 с.
62. Методологический анализ закономерностей развития математики. - М.: Наука, 1989. – 219 с.
63. Млодинов Л. (Не)совершенная случайность. Как случай управляет нашей жизнью. – 3-е изд. – Москва: Livebook, 2016. – 352 с.
64. Молодший В.Н. Очерки по философским вопросам математики. – М.: Просвещение, 1969. – 303 с.
65. Налимов В.В. Разбрасываю мысли. В пути и на перепутье. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – 344 с.
66. Новиков А.Г. Философские проблемы возникновения и начального этапа развития математики. – Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1992. – 169 с.
67. Панов М.И. Методологические проблемы интуиционистской математики. – М.: Наука, 1984. – 224 с.
68. Паршин А.Н. Путь. Математика и другие миры. – М.: Добросвет, 2002. – 240 с.
69. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.
70. Пенроуз Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. – Москва–Ижевск: Институт компьютеных исследований, 2005. – 688 с.
71. Перминов В.Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства. Изд. 2-е, стереотипн. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
72. Подниекс К.М. Вокруг теоремы Геделя. – Рига: Зинатне, 1992. – 192 с.
73. Проблемно-ориентированный подход к науке: Философия математики как концептуальный прагматизм / Отв. ред. В.В. Целищев. – Новосибирск: Наука, 2001. – 154 с.
74. Пуанкаре А. О науке. – 2-е изд., стер. – М.:Наука, 1990. – 736 с.
75. Рассел Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. – 264 с.
76. Рассел Б. Избранные труды. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2009. – 260 с.
77. Рассел Б. История западной философии. – М.: Академический Проект: Фонд «Мир», 2004. – 1008 с. (и другие издания).

78. Реньи А. Трилогия о математике. (Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. – Записки студента по теории информации.) – М.: Мир, 1980. – 376 с.

79. Русанов Н.В., Росляков Г.С. История и методология прикладной математики. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2004. – 244 с.

80. Рюэль Д. Мозг математика. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 180 с.

81. Сачков Ю.В. Вероятностная революция в науке (Вероятность, случайность, независимость, иерархия) – М.: Научный мир, 1999. – 144 с.

82. Свасьян К. Философия символических форм Э. Кассирера. – 2-е изд. – М.: Академический проект; Альма Матер, 2010. – 243 с.

83. Стили в математике. Социокультурная философия математики / под ред. А.Г. Барабашева. – СПб.: РХГИ, 1999. – 552 с.

84. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. – М.: Наука, 1967. – 508 с.

85.Теребилов О.Ф. Логика математического мышления. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 192 с.

86. Тегмарк М. Наша математическая Вселенная. В поисках фундаментальной природы реальности. – М.: Изд-во АСТ: CORPUS, 2017. – 592 с.

87. Троицкий В.П. Разыскания о жизни и творчестве А.Ф. Лосева. – М.: Аграф, 2007. – 448 с.

88. Тростников В.Н. Конструктивные процессы в математике (философский аспект). – М.: Наука, 1975. – 255 с.

89. Успенский В.А. Что такое аксиоматический метод? – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 96 с.

90. Успенский В.А. Апология математики. – СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2010. – 554 с.

91. Успенский В.А. Предисловие к математике. – СПб.: ООО «Торгово-издательский дом Амфора», 2015. – 474 с.

92. Фреге Г. Логико-философские труды. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. – 283 с.

93. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2006. – 552 с.

94. Хренников А.Ю. Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2003. – 208 с.

95. Хренников А.Ю. Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 296 с.

96. Целищев В.В. Нормативность дедуктивного дискурса: Феноменология логических констант. – Новосибирск: Нонпарель, 2004. – 340 с.

97. Целищев В.В. Алгоритмизация мышления. Гёделевский аргумент. – Новосибирск: Параллель, 2005. – 304 с.

98. Целищев В.В. Эпистемология математического доказательства. – Новосибирск: Параллель, 2006. – 212 с.

99. Целищев В.В. Интуиция, финитизм и рекурсивное мышление. – Новосибирск: Параллель, 2007. – 220 с.

100. Целищев В.В. Тезис Чёрча. – Новосибирск: Параллель, 2008. – 173 с.

101. Целищев В.В. Логическая истина и эмпиризм / Отв. ред. М.В. Попович. Изд. 2-е, испр. – М.: КРАСАНД, 2010. – 112 с.

102. Целищев В.В. Априорные структуры как представление знания. – Новосибирск: Манускрипт-СИАМ, 2013. – 192 с.

103. Число: Сб. статей / Редколл.: Кричевец А.Н. (отв. ред.), Гутнер Г.Б., Перминов В.Я., и др. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 368 с.

104. Шпенглер О. Закат Европы. Очерки морфологии мировой истории: Гештальт и действительность. – М.: Эксмо, 2006. – 800 с. (и другие издания).

105. Яу Ш., Надис С. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. – СПб.: Питер, 2012. – 400 с.

Журнальные статьи

1. Бажанов В.А. Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия // Вопросы философии. – 2014. – № 5. – С. 52–64.

2. Дэвис Б. Куда движется математика? // URL: http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/164681/ Kuda_dvizhetsya_matematika (Оригинал – в Notices of the Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 52. № 11.)

3. Ибрагимова Н.И. Возникновение неевклидовых геометрий и проблемы интерпретации их онтологического статуса // Философия науки. – 2005. – № 2. – С. 64–92.

4. Крайзель Г. Биография Курта Геделя // Успехи матем. наук. – 1988. – Т. 43. – Вып. 2. – С. 175–216.; Т.43. – Вып. 3. – С. 169–176. URL: http://www.mathnet.ru.

5. Михайлова Н.В. Математический платонизм и проблема внутренней непротиворечивости математики // Философия науки. – 2008. – № 1. – С. 80–90.

6. Монастырский М.И. Математика на рубеже двух столетий // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2000. – Вып. 5 (40). – С. 56–70.

7. Непейвода Н.Н. Вызовы логики и математики XX века и «ответ» на них цивилизации // Вопросы философии. – 2005. – № 8. – С. 118–128.

8. Паршин А.И. Размышления над теоремой Гёделя // Вопросы философии. –2000. – № 6. – С. 92–109.

9. Перминов В.Я. О системном подходе к обоснованию математики // Философия математики: актуальные проблемы. Тезисы Международной научной конференции. М.: Макс-Пресс, 2009.

10. Перминов В.Я. Реальность математики // Вопросы философии. – 2012. – № 2.

11. Победин Л.Н. О бесконечном // Философия науки. – 2001. – № 1. – С. 91–98.

12. Победин Л.Н. О бесконечном -2 // Философия науки. – 2001. – № 2. – С. 102–107.

13. Победин Л.Н. О бесконечном - 3 // Философия науки. – 2001. – № 3. – С. 44–49.

14. Родин А.В. Теория категорий и поиски новых математических оснований физики // Вопросы философии. – 2010. – № 7.

15. Сосинский А.Б. Умер ли Никола Бурбаки? // URL: http://www.ega-math.narod.ru/Bbki/Bourb4.htm.

16. Целищев В.В. Неопределенность в самой точной из наук: континуум-гипотеза и аксиома конструируемости // Философия науки. – 2002. – № 4. – С. 39–53.

17. Целищев В.В. Непротиворечивость и полнота как нормы дедуктивного мышления в свете теорем Геделя о неполноте арифметики // Философия науки. – 2005. – № 2. – С. 33–52.

18. Целищев В.В. Математический платонизм // Философское антиковедение и классическая традиция (ΣΧΟΛΗ). – 2014. – Т.8. – № 2. – С. 492–504.

19. Черепанов С.К. Антиномии Кантора и Рассела и проблема элементности абстрактных множеств // Философия науки. – 2004. – № 4. – С. 19–31.

20. Черняков А.Г. Онтология как математика: Бадью, Гуссерль, Плотин // Сущность и слово. Сб. научн. статей к юбилею проф. Н.В .Мотрошиловой. – М.: Феноменология-герменевтика, 2009. – С. 420–441. URL: http://srph.1gb.ru/text.

21. Юшкевич А.П. О развитии понятия функции // Историко-математические исследования. Вып. XVII. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – С. 123–150.

Литература по истории математики и механики

1. Альбов А.С. От абака до кубита+история математических символов. – СПб.: ООО «Страта», 2015. – 296 с.

2. Арсенов О.О. Григорий Перельман и гипотеза Пуанкаре. – М.:Эксмо, 2010. – 256 с.

3. Асмус В.Ф. Декарт. – М.: Политиздат, 1956. – 370 с.

4. Асмус В.Ф. Платон. – М.: Мысль, 1969. – 247 с.

5. Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б. Математики об истории. Вехи одного научного противостояния. – Ульяновск: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2014. – 210 с.

6. Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. Выпуск XI. М., 1958. – С. 225–438.

7. Белл Э.Т. Творцы высшей математики. –М.: Просвещение, 1979. – 251 с.
8. Боголюбов А.Н. Математики, механики. Биогр. справочник. – Киев: Наукова думка, 1983. – 639 с.
9. Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики: Биогр. слов.-справ. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Рад. шк., 1987. – 656 с.
10. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Изд. 3-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2007. – 296 с.
11. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках, 4-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2006. – 464 с.
12. Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. Издание 3-е. – М.: УРСС. 2007. – 296 с.
13. Григорьян А.Т. Механика от античности до наших дней. Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
14. Григорьян А.Т., Фрадлин Б.Н. История механики твердого тела. – М.: Наука, 1982. – 294 с.
15.Гротендик А. Урожаи и посевы. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 – 288 с.
16. Гудков Д.А. Н.И. Лобачевский. Загадки биографии. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. – 242 с.
17. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986. – 432 с.
18. Дербишир Д. Простая одержимость: Бернхардт Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. – М.: Астрель: CORPUS, 2010. – 463 с.
19. Зубов В.П. Аристотель. – М.: Наука, 1963. – 366 с.
20. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Под редакцией А.П. Юшкевича. Т. 1 – 3. – М.: Наука, 1970 – 1972.
21. Карцев В.П. Ньютон. – М.: Молодая гвардия, 1987. – 415 с.
22. Кессельман В.С. Удивительная история математики. – М.: ЭНАС-КНИГА, 2014. – 232 с.
23. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1990.
24. Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. Под ред. В.А. Успенского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 224 с.
25. Колядко В.И. Бернард Больцано. – М.: Мысль, 1982. – 198 с.
26. Космодемьянский А.А. Очерки по истории механики. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
27. Майстров Л.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
28. Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980. – 269 с.
29. Манкевич Р. История математики. – М.: Ломоносовъ, 2011. – 256 с.

30. Марков С.Н. Курс истории математики. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995. – 248 с.
31. Матвиевская Г.П. Рене Декарт. 1596 – 1650. – М.: Наука, 1976. – 291 с.
32. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1978.
33. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1981.
34. Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей. Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. – М.: Наука. 1987.
35. Медведев Ф.А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
36. Медведев Ф.А. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1974. – 423 с.
37. Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 232 с.
38. Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
39. Млодинов Л. Евклидово окно. История геометрии от параллельных прямых до гиперпространства. – М.: Livebook, 2013. – 384 с.
40. Монастырский М.И. Современная математика в отблеске медалей Филдса. – М.: «Янус-К», 2000. – 200 с.
41. Николай Иванович Лобачевский: историко-биографический сборник. – Казань: Жиен, 2014. – 656 с.
42. Панов В.Ф. Математика древняя и юная. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 648 с.
43. Панов В.Ф. Современная математика и ее творцы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 646 с.
44. Пиковер К. Великая математика. От Пифагора до 657-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 543 с.
45. Погребысский М.Б. От Лагранжа к Эйнштейну. Классическая механика XIX века. М.: Наука, 1966. – 328 с.
46. Погребысский М.Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. – М.: Наука. 1971. – 319 с.
47. Просветов Г.И. История математики. 2-е изд., доп. – М.: Альфа-пресс, 2016. – 200 с.
48. Пуркерт В., Ильгаудс Х.И. Георг Кантор. – Харьков, 1991. – 128 с.
49. Рид К. Гильберт. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 368 с.

50. Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. – М.: Наука, 1976. – 413 с.
51. Розенфельд Б.А., Юшкевич А.П. Омар Хайям. – М.: Наука, 1965. – 191 с.
52. Рыбников К.А. История математики. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 496 с.
53. Седов Л.И. Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего. – М. Наука, 1973. – 120 с.
54. Синкевич Г.И. Георг Кантор & Польская школа теории множеств. – СПб.: СПбГАСУ, 2012. – 349 с.
55. Стилвелл Д. Математика и ее история. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 530 с.
56. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. Изд. третье. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1997. – 336 с.
57. Стюарт И. Истина и красота: Всемирная история симметрии. – М.: Астрель: CORPUS, 2010. – 461 с.
58. Суриков И.Е. Пифагор. – М.: Молодая гвардия, 2013. – 269 с.
59. Тюлина И.А. История и методология механики. – М. Изд-во МГУ, 1979. – 282 с.
60. Тяпкин А., Шибанов А. Пуанкаре. – М.: Молодая гвардия, 1979. – 416 с.
61. Фрейман Л.С. Творцы высшей математики. – М.: Наука, 1968. – 216 с.
62. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968.
63. Юшкевич А.П. Математика в ее истории. – М.: Янус, 1996. – 413 с.

Некоторые книги на иностранных языках

1. Philosophy of Mathematics. Selected reading. – Second edition. – Edited by P.Benacerraf and H.Putnam. - Cambridge University Press, 1983. – viii+600 pp.
2. Philosophy of Mathematics. - Edited by Andrew D. Irvine. - Elsevier B.V., 2009. – xii+717 pp. (Handbook of the Philosophy of Science.)