НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЕКТОРЫ И ОПИСАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Шамоян Р.Ф.

Брянский государственный педагогический университет

Пусть B^n – единичный шар в евклидовом пространстве R^n,

$$B^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n,\ |x| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2} < 1\},$$

$S^{n-1} = \partial B^n$ – единичная сфера в R^n, $dm_n(x)$ и $dm_{n-1}(x')$ – нормированные меры Лебега соответственно на B^n и S^{n-1}

Пусть, далее, $0 < p, q < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$. Обозначим через $L^{p,q}_\alpha(B^n)$ пространство всех измеримых в B^n функций, для которых

$$\|f\|^p_{L^{p,q}_\alpha} = \int_0^1 \Big(\int_{S^{n-1}} |f(|x|x')^q| dm_{n-1}(x')\Big)^{p/q} (1 - |x|)^\alpha\ |x|^{n-1} dr < \infty,$$

$$\|f\|_{L^{1,\infty}_\alpha} = \int_0^1 \max_{x' \in S^{n-1}} |f(|x|x')|(1 - |x|)^\alpha |x|^{n-1} d|x| < \infty.$$

Подпространство пространства $L^{p,q}_\alpha$, состоящее из гармонических функций, обозначим через $A^{p,q}_\alpha(B^n)$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$. *Тогда оператор*

$$T_\beta f(x) = \int_{B^n} Q_\beta(x, y)(1 - |y|^2)^\beta f(|y|y')|y|^{n-1} d|y|dy'$$

где $Q_\beta(x, y)$ *– функция* $2n$ *переменных из [1], является непрерывным проектором из* $L^{p,q}_\alpha(B^n)$ *в* $A^{p,q}_\alpha(B^n)$ *при следующих предположениях:*

а) при $-1 < \alpha \le \beta < \infty$, *если* $1 < q < \infty$, $1 \le p < \infty$,

б) при $-1 < \alpha < \beta < \infty$, *если* $p = 1$, $q = +\infty$,

в) при $-1 + (\alpha + 1)/q < \beta$, *если* $0 < q \le 1$, $1 \le p < \infty$

Для формулировки следующего результата обозначим через $\{Y^{(k)}_j, j = 1, \ldots, d_k\}$ ортонормальную систему сферических гармоник на S^{n-1} (см.

[3]). Хорошо известно, что каждая функция $f \in H(B^n)$ допускает разложение $f(x) = \sum_{k\geq 0} r^k \sum_{j=1}^{d_k} C_k^{(j)} Y_j^k(x')$, где $x = rx'$, $0 < r < 1$, $x' \in S^{n-1}$, $H(B^n)$ – множество всех гармонических в шаре B^n функций.

В дальнейшем положим $(f * g)(x) = \sum_{k\geq 0} r^k \sum_{j=1}^{d_k} C_k^{(j)} b_k^{(j)} Y_j^{(k)}(x')$, $x = rx'$, $P_{x'}(y)$ – ядро Пуассона в B^n (см. [3]).

Определение. *Пусть X и Y – подпространства пространства $H(B^n)$. Скажем, что последовательность $\{(C_k^{(j)}\ j = 1, \ldots, d_k,\ k \in Z_+\}$ является мультипликатором из X в Y, если для любой функции f, $f \in X$, $f(x) = \sum_{k\geq 0} r^k \sum_{j=1}^{d_k} b_k^{(j)} Y_j^{(k)}(x')$ функция $g(x) = \sum_{k\geq 0} r^k \sum_{j=1}^{d_k} C_k^{(j)} b_k^{(j)} Y_j^{(k)}(x')$ принадлежит Y.*

В дальнейшем множество всех мультипликаторов из X в Y обозначим через $M_H(X,Y)$. Будем считать $0 < p \leq 1$, $-1 < \beta < 0$ или $1 < p < \infty$, $\beta - p < \alpha < \beta$

Теорема 2. *Пусть $g(x) = \sum_{k\geq 0} r^k \sum_{j=1}^{d_k} C_k^{(j)} Y_j^{(k)}(x')$ Тогда следующие условия равносильны:*

1. $\{(C_k^{(j)}\ j = 1, \ldots, d_k,\ k \in Z^+\} \in M_H(A_\alpha^{p,1}, A_\beta^{p,1})$

2. $\sup_{0<\rho<1} \sup_{y' \in S^{n-1}} (\int_{S^{n-1}} |\Lambda_{m+1}(g * p_{x'})(\rho y')| dx')(1-\rho)^{m+1-\alpha+\beta} < \infty$ *для некоторого m, $m \in N$, $m > 1/p - 1$, где $\Lambda_{m+1} f(x)$ – дробная производная функции f (см. [1]).*

Замечание. Теорема 1 при $p = q$ была установлена в [1]. Теорема 2 была доказана другим методом в [2] при $n = 1$, $p = 1$.

Литература

1. *Djrbashian A., Shamoian F.* Topics in the theory of A_α^p spaces// Leipzig, Teubner-Verlahd - 1988. - V. 105.

2. *Shields A.L., Williams D.L.* Bounded projections, duality and multipliers in spaces of harmonic functions //Journ. Reine und Ang. Math. - 1978. - V. 28. - P. 299-300.

3. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. - 336 с.