КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л.Л. ГЛАЗЫРИНА

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

КАЗАНЬ
2017

УДК 519.6
ББК 22.193
Г52

Научный редактор
доктор физико-математических наук **М.Ф. Павлова**
Рецензенты:
доктор физико-математических наук **В.С. Желтухин,**
кандидат физико-математических наук **Е.В. Рунг**

Глазырина Л.Л.
Г52 Практикум по курсу «Численные методы». Решение систем линейных уравнений: учеб. пособие / Л.Л. Глазырина. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. — 52 с.

В пособии описываются основные методы решения систем линейных уравнений. Предлагается набор заданий для практических (лабораторных) занятий. Пособие предназначено для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информационным технологиям.

УДК 519.6
ББК 22.193

Оглавление

Введение

В данном пособии предлагаются варианты заданий для практических занятий по двум темам курса "Численные методы":

- прямые методы решения систем линейных уравнений;
- итерационные методы решения систем линейных уравнений;

В первом параграфе излагается теоретический материал, необходимый для выполнения заданий. Во втором параграфе приводятся варианты заданий. В третьем параграфе предлагаются упражнения по теме для самостоятельной работы.

Задания предполагают написания программ для указанных методов и проведения численного эксперимента.

Результатом выполнения задания является письменный отчет. Он должен содержать: а) описание задания; б) описание хода выполнения задания; в) описание и анализ результатов. Графики и таблицы должны быть пронумерованы, подписаны и прокомментированы в тексте отчета.

Для выполнения заданий студент должен сам выбрать язык программирования, которым он владеет.

§ 1. Методы решения систем линейных уравнений

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b. \tag{0.1}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A предполагается невырожденной, то есть $\det A \neq 0$. Поэтому система (0.1) однозначно разрешима при любой правой части.

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на два класса: прямые и итерационные.

Для больших систем предпочтительнее оказываются итерационные методы. Основная идея этих методов состоит в построении последовательности векторов x^k, $k = 1, 2, \dots$, сходящейся к решению системы. За приближенное решение принимается вектор x^k при достаточно большом k. При реализации итерационных методов, обычно, достаточно уметь вычислять вектор Ax при любом заданном векторе x.

1. Методы Зейделя и Якоби. Будем считать, что все диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, и перепишем систему (0.1), разрешая каждое уравнение относительно переменной, стоящей на диагонали:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.1}$$

Выберем некоторое начальное приближение $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ и построим последовательность векторов $x^1, x^2, \dots$, определяя вектор x^{k+1} по уже найденному вектору x^k при помощи соотношений:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.2}$$

Формулы (1.2) определяют итерационный метод решения системы (0.1), называемый методом Якоби или методом простой итерации. Рассмотрим вопрос сходимости метода Якоби.

Пусть x — решение системы уравнений (0.1). Здесь и всюду в дальнейшем погрешность метода на k-м шаге итераций, т. е. вектор $x^k - x$, будем обозначать через z^k. Вычитая почленно из равенства (1.2) равенство (1.1), получим

$$z_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

следовательно,

$$|z_i^{k+1}| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} |z_j^k| + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} |z_j^k| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^k| =$$
$$= q \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^k|,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Если выполнено неравенство вида:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = q < 1, \tag{1.3}$$

тогда

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^{k+1}| \leqslant q \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^k|$$

для любого $k = 0, 1, \ldots,$ поэтому

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^k| \leqslant q^k \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^0| \to 0 \tag{1.4}$$

при $k \to \infty$, поскольку $0 < q < 1$, а это и означает, что $x^k \to x$. Выполнение условия (1.3) для матрицы A называется условием диагонального преобладания.

Таким образом *метод Якоби сходится от любого начального приближения, если матрица системы уравнений обладает свойством диагонального преобладания.* Оценка (1.4) показывает, что, чем меньше q, тем быстрее сходится метод простой итерации.

Формулы (1.2) допускают естественную модификацию. Именно, при вычислении x_i^{k+1} будем использовать уже найденные компоненты вектора x^{k+1}, то есть $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots x_{i-1}^{k+1}$. В результате приходим к итерационному методу Зейделя:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.5}$$

$k = 0, 1, \ldots$ Метод Зейделя позволяет более экономно расходовать память, поскольку в данном случае вновь получаемые компоненты вектора x^{k+1} можно размещать на месте соответствующих компонент вектора x^k, в то время как при реализации метода Якоби все компоненты векторов x^k, x^{k+1} должны одновременно находиться в памяти компьютера.

Исследуем сходимость метода Зейделя. Будем предполагать, что матрица A обладает свойством диагонального преобладания.

Запишем выражение для погрешности $k{+}1$-ой итерации. Вычитая почленно из равенства (1.5)равенство (1.1), получим

$$z_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Пусть $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j^{k+1}| = |z_l^{k+1}|$. Из l-го уравнения системы (1.6) вытекает, что

$$|z_l^{k+1}| \leqslant \alpha_l \max_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j^{k+1}| + \beta_l \max_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j^k|,$$

где

$$\alpha_l = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{lj}|}{|a_{ll}|}, \quad \beta_l = \sum_{j=l+1}^{n} \frac{|a_{lj}|}{|a_{ll}|},$$

следовательно,

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j^{k+1}| \leqslant \frac{\beta_l}{1-\alpha_l} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j^k|.$$

Из условия (1.3) получаем, что $\alpha_l + \beta_l \leqslant q < 1$, но тогда и $q\alpha_l + \beta_l \leqslant q$, таким образом, $\beta_l/(1-\alpha_l) \leqslant q$.

2. Метод релаксации. Во многих ситуациях существенного ускорения сходимости можно добиться за счет введения так называемого итерационного параметра. Рассмотрим итерационный процесс

$$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}\right), \tag{2.1}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots$ Этот метод называется методом релаксации, число ω — релаксационным параметром. При $\omega = 1$ метод переходит в метод Зейделя.

Ясно, что по затратам памяти и объему вычислений на каждом шаге итераций метод релаксации не отличается от метода Зейделя.

Мы исследуем сходимость метода релаксации в случае, когда матрица A симметрична и положительно определена. С этой целью перепишем его в матричном виде. Обозначим через L нижнюю треугольную матрицу с нулевой главной диагональю; элементы, стоящие под главной диагональю матрицы L, совпадают с соответствующими элементами матрицы A. Через D обозначим диагональную матрицу, на диагонали которой стоят диагональные элементы матрицы A. Понятно, что $A = L + D + L^T$. Нетрудно убедиться, что равенства (2.1) с учетом введенных обозначений принимают вид:

$$Dx^{k+1} = (1-\omega)Dx^k + \omega(-Lx^{k+1} - L^T x^k + b).$$

После элементарных преобразований получим, что

$$B\frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = b, \tag{2.2}$$

где $B = D + \omega L$.

Нам потребуется следующая общая теорема, полезная при исследовании многих итерационных методов.

Теорема 2.1. *Пусть матрица A симметрична и положительно определена. Тогда итерационный метод*

$$B\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = b, k = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

где $\tau > 0$, сходится при любом начальном приближении x^0, если

$$(Bx, x) > \frac{\tau}{2}(Ax, x) \quad \forall x \neq 0. \tag{2.4}$$

Покажем, что при сделанных предположениях выполнено условие (2.4) при $\tau = \omega$, $B = D + \omega L$ и $\omega \in (0, 2)$. Действительно,

$$(Bx, x) - \frac{\omega}{2}(Ax, x) = \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)(Dx, x) + \frac{\omega}{2}((Lx, x) - (L^T x, x)),$$

но все диагональные элементы положительно определенной матрицы положительны (докажите!), поэтому $(Dx, x) > 0$ при $x \neq 0$, а $(Lx, x) - (L^T x, x) = (Lx, x) - (x, Lx) = 0 \ \forall x$.

Естественно, параметр ω следует выбирать так, чтобы метод релаксации сходился наиболее быстро. Отметим только, что чаще всего оптимальное значение ω лежит вблизи $1,8$.

3. Итерационные методы вариационного типа. Существуют итерационные методы, позволяющие за счет некоторой дополнительной работы на каждом шаге итераций автоматически настраиваться на оптимальную скорость сходимости. К их числу относятся методы, основанные на замене системы (0.1) эквивалентной задачей минимизации некоторого функционала. Если матрица A симметрична и положительно определена. Тогда задача (0.1) эквивалентна задаче отыскания минимума квадратичного функционала $F(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$.

Различные методы минимизации функционала $F(x)$ приводят к различным итерационным процессам для уравнения (0.1).

Рассмотрим сначала метод покоординатного спуска. Выберем некоторое начальное приближение $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и найдем аргумент x_1^1, доставляющий минимальное значение функции одной переменной $F(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Затем рассмотрим функцию одной переменной $F(x_1^1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ и найдем точку x_2^2, в которой она достигает минимума. Выполнив n таких шагов, построим вектор $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$, примем его за начальное приближение и продолжим описанный процесс.

Используя конкретный вид функционала $F(x)$, найдем явные формулы для вычисления векторов x^k, $k = 1, 2 \ldots$ в полученном итерационном процессе. Компонента x_i^{k+1} вектора x^{k+1} разыскивается как точка минимума функции $F(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)$. Выпишем необходимое условие экстремума:

$$F'_{x_i}(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0. \tag{3.1}$$

Вычисляя производную функции $F(x)$ по переменной x_i, получим:

$$F'_{x_i}(x) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - 2b_i, \tag{3.2}$$

следовательно, решая уравнение (3.1) относительно x_i, будем иметь

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

и это означает, что метод покоординатного спуска для квадратичного функционала совпадает с методом Зейделя.

Метод релаксации также допускает простую геометрическую интерпретацию. При $0 < \omega < 1$ из точки $(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)$ двигаются в направлении координатной оси x_i, не доходя до точки минимума функционала F на этой прямой, а при $\omega > 1$ проходят несколько дальше, чем точка минимума функционала. Во многих случаях последний способ приводит к ускорению сходимости.

Опишем еще один метод минимизации функционала. Будем двигаться из точки начального приближения x^0 в направлении наибыстрейшего убывания функционала F, т. е. следующее приближение разыскиваем так: $x^1 = x^0 - \tau \operatorname{grad} F(x^0)$. Формула (3.2) показывает, что $\operatorname{grad} F(x^0) = 2(Ax^0 - b)$. Вектор $r^0 = Ax^0 - b$ принято называть невязкой. Для сокращения записей удобно обозначить 2τ вновь через τ. Таким образом, $x^1 = x^0 - \tau r^0$.

Параметр τ выберем так, чтобы значение $F(x^1)$ было минимальным. Проводя элементарные выкладки, получим $F(x^1) = F(x^0 - \tau r^0) = F(x^0) - 2\tau(r^0, r^0) + \tau^2(Ar^0, r^0)$, следовательно, минимум $F(x^1)$ достигается при $\tau = \tau_* = (r^0, r^0)/(Ar^0, r^0)$.

Таким образом, мы пришли к следующему итерационному методу

$$x^{k+1} = x^k - \tau_* r^k,\ r^k = Ax^k - b,\ \tau_* = \frac{(r^k, r^k)}{(Ar^k, r^k)},\ k = 0, 1, \ldots \tag{3.3}$$

Метод (3.3) называют методом наискорейшего спуска. По сравнению с методом простой итерации этот метод требует на каждом шаге итераций проведения дополнительной работы по вычислению параметра τ_*. Вследствие этого происходит адаптация к оптимальной скорости сходимости.

Если матрица A не обладает свойством симметричности, то в формуле (3.3) параметр τ_* вычисляется по формуле

$$\tau_* = \frac{(Ar^k, r^k)}{(Ar^k, Ar^k)}.$$

В этом случае метод называется методом минимальных невязок. Название метода связано с тем, что на каждом шаге метода минимизируется норма невязки.

4. Метод прогонки для систем с трехдиагональными матрицами. В приложениях довольно часто возникают системы уравнений с матрицами, большинство элементов которых — нули. Это так называемые разреженные матрицы. Процесс исключения неизвестных в таких системах (или разложение матриц на треугольные множители) во многих практически важных ситуациях удается организовать так, чтобы существенно сократить память и объем вычислений.

Рассмотрим наиболее простой случай, а именно системы с матрицами, ненулевые элементы которых лежат лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях. Системы такого вида часто возникают при приближенном решении задач математической физики. Соответствующие матрицы принято называть трехдиагональными.

Произвольную систему с трехдиагональной матрицей можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} -b_1x_1 + c_1x_2 &= f_1, \\ a_2x_1 - b_2x_2 + c_2x_3 &= f_2, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_ix_{i-1} - b_ix_i + c_ix_{i+1} &= f_i, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n &= f_n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Разрешим первое уравнение системы относительно x_1. Получим:

$$x_1 = P_2x_2 + Q_2, \tag{4.2}$$

где

$$P_2 = \frac{c_1}{b_1}, \quad Q_2 = -\frac{f_1}{b_1}. \tag{4.3}$$

Используя соотношение (4.2) и второе уравнение системы (4.1), получим аналогичное выражение для x_2. Вообще, если $x_{i-1} = P_ix_i + Q_i$, то из i-го уравнения системы (4.1) получим

$$x_i = P_{i+1}x_{i+1} + Q_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4.4}$$

где

$$P_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_iP_i}, \quad Q_{i+1} = \frac{a_iQ_i - f_i}{b_i - a_iP_i}. \tag{4.5}$$

Это означает, что формулы (4.4) справедливы для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, формулы (4.5) — для $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

Используя (4.3) и (4.5), можно найти все $P_i, Q_i,\ i = 2, \ldots, n-1$. Записывая теперь соотношение (4.4) при $i = n-1$ и последнее уравнение системы (4.1), получим

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= P_nx_n + Q_n, \\ -a_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n &= f_n, \end{aligned}$$

откуда находим, что $x_n = (a_nQ_n - f_n)/(b_n - a_nP_n)$, и, наконец, используя формулы (4.4) для $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, найдем все остальные компоненты вектора x.

Описанный алгоритм носит название метода прогонки. Понятно, что это — метод Гаусса, записанный применительно к случаю трехдиагональной системы уравнений, причем процесс вычислений P_i, Q_i (прямой ход метода прогонки) соответствует прямому ходу метода Гаусса, а вычисления по формулам (4.4) (обратный ход метода прогонки) соответствуют обратному ходу метода Гаусса.

Нетрудно подсчитать необходимые затраты: требуется примерно $8n$ арифметических операций и не более $6n$ ячеек памяти.

Метод может быть реализован, когда все знаменатели в формулах (4.3), (4.5) отличны от нуля. Учитывая связь метода прогонки с методом Гаусса, можно сказать, что данное условие выполнено, например, когда матрица системы (4.1) — матрица с диагональным преобладанием, т. е. $|c_1| < |b_1|$, $|a_n| < |b_n|$, $|a_i| + |c_i| < |b_i|$, $i = 2, \ldots, n-1$.

§ 2. Варианты заданий

Задание 1.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + h^2 g_1) y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i) y_i - a_{i+1} y_{i+1} &= f_i h^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1}) y_{n-1} - a_{n-1} y_{n-2} &= f_{n-1} h^2.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

p, q, u — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

2) нижней релаксации релаксации,

3) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1 \le i \le n-1} \mid r_i^k \mid \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = x^\alpha (1-x)^\beta$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 2

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0)y_0 - a_1 y_1 &= \frac{1}{2}h^2 f_0 - h\mu_1 p_0,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} &= f_i h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_{n-1} y_{n-2} &= f_{n-1} h^2.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_0 = p(0),$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) верхней релаксации,

3) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1} |\, r_i^k \,| \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\mu_1 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 3.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}(a_1+a_2+h^2g_1)y_1-a_2y_2=f_1h^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -a_iy_{i-1}+(a_i+a_{i+1}+h^2g_i)y_i-a_{i+1}y_{i+1}=f_ih^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -a_{n-1}y_{n-2}+(a_{n-1}+a_n+h^2g_{n-1})y_{n-1}-a_ny_n=f_{n-1}h^2,\\ -a_ny_{n-1}+(a_n+\frac{1}{2}h^2g_n)y_n=\frac{1}{2}h^2f_n-h\mu_2p_n.\end{gathered}$$

Здесь

$$a_i=\frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i=q(ih),\ f_i=f(ih),\ p_n=p(1),$$

$$f(x)=-(p(x)u'(x))'+q(x)u(x),\ h=1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

3) верхней релаксации,

4) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1}|\,r_i^k\,|\le\varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные.Расчеты провести при $n=10,40,\ \ \varepsilon=\ h^3$, $u(x)=x^\alpha(1-x)^\beta$, $p(x)=1+x^\gamma,\ \ g(x)=x+1$, $\alpha=2,\ \ \beta=1,\ \ \gamma=3$, $\mu_2=1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 4.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
(a_1+\frac{1}{2}h^2g_0)y_0-a_1y_1&=\frac{1}{2}h^2f_0-h\mu_1p_0,\\
-a_1y_0+(a_1+a_2+h^2g_1)y_1-a_2y_2&=f_1h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_iy_{i-1}+(a_i+a_{i+1}+h^2g_i)y_i-a_{i+1}y_{i+1}&=f_ih^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_{n-1}y_{n-2}+(a_{n-1}+a_n+h^2g_{n-1})y_{n-1}-a_ny_n&=f_{n-1}h^2,\\
-a_ny_{n-1}+(a_n+\frac{1}{2}h^2g_n)y_n&=\frac{1}{2}h^2f_n-h\mu_2p_n.
\end{aligned}$$

Здесь

$$a_i=\frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i=q(ih),\ f_i=f(ih),\ p_0=p(0),\ p_n=p(1),$$

$$f(x)=-(p(x)u'(x))'+q(x)u(x),\ h=1/n,$$

p, q, u — заданные функции. Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) релаксации,

3) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1}\mid r_i^k\mid\le\varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные.Расчеты провести при $n=10,40$, $\varepsilon=\ h^3$, $u(x)=x^\alpha(1-x)^\beta$, $p(x)=1+x^\gamma$, $g(x)=x+1$, $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=2$, $\mu_1=0$, $\mu_2=1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 5.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 = f_1 h^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} = f_i h^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -a_{n-1} y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n = f_{n-1} h^2,\\ -a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n - hp_n)y_n = \frac{1}{2}h^2 f_n - hp_n\mu_4.\end{aligned}$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih - h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_n = p(1),$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

p, q, u — заданные функции. Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) релаксации,

3) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1 \le i \le n-1} \mid r_i^k \mid \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные.Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon =\ h^3$, $u(x) = x(4 - x)$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\gamma = 3$, $\mu_4 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;

- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 6.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0 - hp_0)y_0 - a_1 y_1 &= \frac{1}{2}h^2 f_0 - hp_0\mu_3,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1}y_{i+1} &= f_i h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_{n-1}y_{n-2} &= f_{n-1}h^2.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i = q(ih)\ f_i = f(ih),\ p_0 = p(0);$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

2 нижней релаксации,

3) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1} \mid r_i^k \mid \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные.Расчеты провести при$n = 10, 40,\ \ \varepsilon =\ \ h^3$, $u(x) = (x+2)(1-x)$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x+1$, $\gamma = 4$, $\mu_3 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 7.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1+\frac{1}{2}h^2g_0-hp_0)y_0-a_1y_1&=\frac{1}{2}h^2f_0-hp_0\mu_3,\\
-a_1y_0+(a_1+a_2+h^2g_1)y_1-a_2y_2&=f_1h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_iy_{i-1}+(a_i+a_{i+1}+h^2g_i)y_i-a_{i+1}y_{i+1}&=f_ih^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_{n-1}y_{n-2}+(a_{n-1}+a_n+h^2g_{n-1})y_{n-1}-a_ny_n&=f_{n-1}h^2,\\
-a_ny_{n-1}+(a_n+\frac{1}{2}h^2g_n)y_n&=\frac{1}{2}h^2f_n-h\mu_2p_n.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i=\frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i=q(ih),\ f_i=f(ih),\ p_i=p(ih);$$

$$f(x)=-(p(x)u'(x))'+q(x)u(x),\ h=1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) верхней релаксации,

3) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1}|\,r_i^k\,|\le\varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные.Расчеты провести при $n=10,40,\ \ \varepsilon=\ h^3$, $u(x)=(x+1)^\alpha(1-x)$, $p(x)=1+x^\gamma$, $g(x)=x+1$, $\alpha=2$, $\gamma=2$, $\mu_2=4$, $\mu_3=2$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;

- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 8.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0)y_0 - a_1 y_1 &= \frac{1}{2}h^2 f_0 - h\mu_1 p_0,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} &= f_i h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_{n-1} y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n &= f_{n-1} h^2,\\
-a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n - hp_n)y_n &= \frac{1}{2}h^2 f_n - hp_n\mu_4.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih)$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

2 нижней релаксации,

3) наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1} |\, r_i^k \,| \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные.Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = (x+2)(2-x)$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\gamma = 2$, $\mu_1 = 0$, $\mu_4 = 5$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;

- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 9.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0 - hp_0)y_0 - a_1 y_1 = \frac{1}{2}h^2 f_0 - hp_0\mu_3,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 = f_1 h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1}y_{i+1} = f_i h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_{n-1}y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n = f_{n-1}h^2,\\
-a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n - hp_n)y_n = \frac{1}{2}h^2 f_n - hp_n\mu_4.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
a_i = \frac{p(ih-h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih)
$$

$$
f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,
$$

p, q, u — заданные функции. Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) нижней релаксации,

3 наискорейшего спуска.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$
\max_{1\le i\le n-1} | r_i^k | \le \varepsilon,
$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные.Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = (x+2)(2-x)$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\gamma = 2$, $\mu_3 = 4$, $\mu_4 = 5$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;

- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 10.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} &= f_i h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_{n-1} y_{n-2} &= f_{n-1} h^2.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih - h) + p(ih)}{2},\; g_i = q(ih),\; f_i = f(ih),$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\; h = 1/n,$$

p, q, u — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) нижней релаксации,

3) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1 \le i \le n-1} |\, r_i^k \,| \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = x^\alpha(1 - x)^\beta$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;

- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 11.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0)y_0 - a_1 y_1 = \frac{1}{2}h^2 f_0 - h\mu_1 p_0,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 = f_1 h^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} = f_i h^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_{n-1} y_{n-2} = f_{n-1} h^2.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih - h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih);$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

p, q, u — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,
2) нижней релаксации релаксации,
3) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1 \le i \le n-1} | r_i^k | \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\mu_1 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 12.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} &= f_i h^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_{n-1} y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n &= f_{n-1} h^2,\\
-a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n)y_n &= \frac{1}{2}h^2 f_n - h\mu_2 p_n.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
a_i = \frac{p(ih-h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih);
$$

$$
f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,
$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) верхней релаксации релаксации,

4) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$
\max_{1\le i\le n-1} |\, r_i^k \,| \le \varepsilon,
$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$, $p(x) = 1 + x^{\gamma}$, $g(x) = x + 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$, $\mu_2 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 13.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0)y_0 - a_1 y_1 &= \frac{1}{2}h^2 f_0 - h\mu_1 p_0,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} &= f_i h^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_{n-1} y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n &= f_{n-1} h^2,\\
-a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n)y_n &= \frac{1}{2}h^2 f_n - h\mu_2 p_n.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
a_i = \frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih);
$$

$$
f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,
$$

p, q, u — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

2) нижней релаксации,

3) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$
\max_{1\le i\le n-1} \mid r_i^k \mid \le \varepsilon,
$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;

- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 14.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 = f_1 h^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} = f_i h^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -a_{n-1} y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n = f_{n-1} h^2,\\ -a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n - h p_n)y_n = \frac{1}{2}h^2 f_n - h p_n \mu_4.\end{aligned}$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih),$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

3) нижней релаксации,

4) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1} |\, r_i^k \,| \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = x(4-x)$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\gamma = 2$, $\mu_4 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 15.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0 - hp_0)y_0 - a_1 y_1 = \frac{1}{2}h^2 f_0 - hp_0\mu_3,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 = f_1 h^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1} y_{i+1} = f_i h^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_{n-1} y_{n-2} = f_{n-1} h^2.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih);$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,
2) верхней релаксации,
3) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1 \le i \le n-1} |\, r_i^k \,| \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40,\ \varepsilon = h^3$, $u(x) = (x+2)(1-x), p(x) = 1 + x^\gamma,\ g(x) = x + 1,\ \gamma = 3,\ \mu_3 = 1$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;

- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 16.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0 - hp_0)y_0 - a_1 y_1 = \frac{1}{2}h^2 f_0 - hp_0\mu_3,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 = f_1 h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1}y_{i+1} = f_i h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_{n-1}y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n = f_{n-1}h^2,\\
-a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n)y_n = \frac{1}{2}h^2 f_n - h\mu_2 p_n.
\end{aligned}$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih),$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

3) нижней релаксации,

4) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1} | r_i^k | \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = (1-x)(1+x)^2$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\gamma = 1$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 2$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 17.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0)y_0 - a_1 y_1 &= \frac{1}{2}h^2 f_0 - h\mu_1 p_0,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 &= f_1 h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1}y_{i+1} &= f_i h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_{n-1}y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n &= f_{n-1}h^2,\\
-a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n - hp_n)y_n &= \frac{1}{2}h^2 f_n - hp_n\mu_4.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
a_i = \frac{p(ih-h)+p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih),
$$

$$
f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,
$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Зейделя,

2) верхней релаксации,

3) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$
\max_{1\le i\le n-1} \mid r_i^k \mid \le \varepsilon,
$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = (2-x)(x+2)$, $p(x) = 1 + x^{\gamma}$, $g(x) = x + 1$, $\gamma = 3$, $\mu_1 = 0$, $\mu_4 = 5$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

Задание 18.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \frac{1}{2}h^2 g_0 - hp_0)y_0 - a_1 y_1 = \frac{1}{2}h^2 f_0 - hp_0\mu_3,\\
-a_1 y_0 + (a_1 + a_2 + h^2 g_1)y_1 - a_2 y_2 = f_1 h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_i y_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + h^2 g_i)y_i - a_{i+1}y_{i+1} = f_i h^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-a_{n-1}y_{n-2} + (a_{n-1} + a_n + h^2 g_{n-1})y_{n-1} - a_n y_n = f_{n-1}h^2,\\
-a_n y_{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}h^2 g_n - hp_n)y_n = \frac{1}{2}h^2 f_n - hp_n\mu_4.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$a_i = \frac{p(ih-h) + p(ih)}{2},\ g_i = q(ih),\ f_i = f(ih),\ p_i = p(ih),$$

$$f(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),\ h = 1/n,$$

$p,\ q,\ u$ — заданные функции.

Данную систему решить методом прогонки и итерационными методами:

1) Якоби,

2) верхней релаксации,

3) минимальных невязок.

Во всех итерационных методах вычисления продолжать до выполнения условия

$$\max_{1\le i\le n-1} \mid r_i^k \mid \le \varepsilon,$$

r — вектор невязки, ε — заданное число.

Исходные данные. Расчеты провести при $n = 10, 40$, $\varepsilon = h^3$, $u(x) = (x+2)(2-x)$, $p(x) = 1 + x^\gamma$, $g(x) = x + 1$, $\gamma = 3$, $\mu_3 = 4$, $\mu_4 = 5$.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи и исходные данные;
- описание методов решения и расчетные формулы;
- проверку условий устойчивости метода прогонки и условий сходимости итерационных методов;
- таблицы и графики значений y_i и y_i^k с указанием числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности;
- определение оптимального параметра ω для метода релаксации (графики зависимости числа итераций от ω);
- графики убывания погрешностей в зависимости от числа итераций и применяемого метода на одном рисунке;
- листинг программы.

§ 3. Задачи и упражнения по методам решения систем линейных уравнений

3.1 Найти все α и β, при которых метод простой итерации

$$x^{k+1} = Bx^k + c,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

сходится с любого начального приближения.

3.2 При каких значениях параметра τ метод

$$x^{k+1} = (I - \tau A)x^k + \tau b$$

для системы уравнений $Ax = b$ с матрицей:

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & 0,8 & 4 \\ 2,5 & 2 & 0 \\ 2 & 0,8 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0,5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 4)\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & 1,2 & 0,8 \\ 1,4 & 2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 4,8 \end{pmatrix}$$

сходится с произвольного начального приближения.

3.3 Для решения системы $Ax = b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

применяется метод Зейделя. Найти значения параметров α, β, обеспечивающие сходимость с произвольного начального приближения.

3.4 Исследовать сходимость метода Якоби для решения системы уравнений с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & -3 & 1 & -1,4 \\ 0,4 & 0,8 & 4 & 2,4 \\ -0,5 & 1,2 & -2,5 & -5 \end{pmatrix}$$

3.5 Невырожденная система $Ax = b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

решается методом Зейделя. При каких значениях a метод сходится.

3.6 Построить пример системы уравнений третьего порядка, для которого метод Якоби сходится.

3.7 Для системы уравнений

$$4y_{i,j} - y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j-1} = h^2 f_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots,n-1; nh = 1;$$

$$y_{0,i} = y_{i,0} = y_{n,i} = y_{i,n} = 0,\ i = 0,1,\ldots,n,$$

записать расчетные формулы для методов Якоби, Зейделя и релаксации.

3.8 Исследовать сходимость метода Зейделя для матриц размерности $n \times n$ с элементами:

$$1)\ a_{kj} = 3^{-|k-j|}, \quad 2)\ a_{k,j} = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad k = j, \\ -1 & \text{при} \quad |k-j| = 1, \\ 0 & \text{при} \quad |k-j| > 1. \end{cases}$$

3.9 Для решения системы $Ax = b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

применяется метод Якоби. Найти значения параметров α, β, обеспечивающие сходимость с произвольного начального приближения.

3.10 Найти все α при которых метод простой итерации

$$x^{k+1} = Bx^k + c,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

сходится с любого начального приближения.

3.11 Исследовать сходимость итерационного метода

$$x^{k+1} = Bx^k + c$$

с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2^{n-2}} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. — Москва: БИНОМ. Лаб. знаний, 2007.

2. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. — М.: Наука, 1989.

3. **Бахвалов Н.С., Корнеев А.А., Чижонков Е.В.** Численные методы. Решение задач и упражнения. — Москва: Лаб. знаний, 2016.