

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. ЕЛИСЕЕВ

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ И ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ
КРУПНОМАСШТАБНЫХ АТМОСФЕРНЫХ
ПРОЦЕССОВ**

**Учебно-методическое пособие
для магистрантов направления 05.04.04 «Гидрометеорология»**

КАЗАНЬ – 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. ЕЛИСЕЕВ

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ И ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ
КРУПНОМАСШТАБНЫХ АТМОСФЕРНЫХ
ПРОЦЕССОВ**

Учебно-методическое пособие
для магистрантов направления 05.04.04 «Гидрометеорология»

КАЗАНЬ – 2017

УДК 551.511

*Печатается по решению методической комиссии Института
экологии и природопользования
ФГАОУ ВО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

Протокол № 9 от 23 декабря 2016 г.

*заседания кафедры метеорологии, климатологии и экологии
атмосферы
Протокол №7 от 20 декабря 2016 г.*

Автор:

доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ **А.В. Елисеев**

Рецензенты:

кандидат геогр. наук, доц. КФУ **К.М. Шанталинский**;
кандидат геогр. наук, доц. КФУ **В.В. Гурьянов**

Елисеев А.В.

Основные понятия устойчивости и предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов: Учебно-методическое пособие / А.В. Елисеев – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 23 с.

Данное пособие составлено в соответствии с материалом курса «Устойчивость и предсказуемость атмосферных процессов», читаемой магистрантам, обучающимся по направлению 05.04.04 «Гидрометеорология». В него включены основные понятия, используемые в указанной дисциплине, а также критерии гидродинамической устойчивости. Пособие предназначено для студентов вузов, аспирантов и преподавателей.

© Издательство Казанского университета, 2017

© Елисеев А.В., 2017

1. ФИЗИЧЕСКАЯ КАРТИНА БАРОКЛИННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Бароклинная неустойчивость - основной механизм развития погодных возмущений в земной атмосфере.

Физически бароклинный циклогенез можно описать следующим образом (рис. 1). При приходе начальной циклонической (с завихренностью $\zeta > 0$; показана большой серой круговой стрелкой на рис. 1) аномалии в верхнюю тропосферу данного региона она передаётся в нижнюю тропосферу (малая серая круговая стрелка). Адвекция температуры (точнее - потенциальной температуры) приводит к возникновению индуцированной циклонической аномалии у поверхности (малая незаштрихованная круговая стрелка) к востоку от исходного циклона. За счёт восходящих движений эта аномалия передаётся в верхнюю тропосферу (большая незаштрихованная круговая стрелка), усиливая исходный циклон.

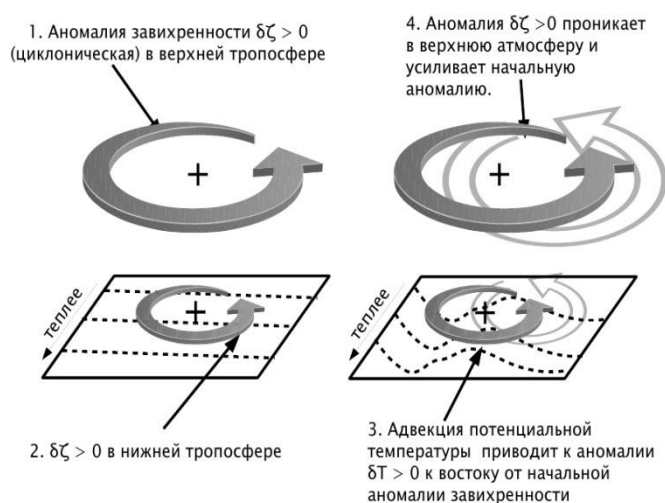


Рис. 1. Физическая схема развития бароклинной неустойчивости. Круговыми стрелками показано направление вращения в вихрях (серая стрелка - исходная аномалия, незаштрихованная стрелка - индуцированная аномалия). Прерывистыми линиями показано распределение температуры на подстилающей поверхности, пунктирной стрелкой - направление его увеличения

Пусть частица воздуха начинает смещаться из точки А (рис. 2). При небольшом смещении движение можно считать прямолинейным и ограничиться одной горизонтальной координатой, например y . Это движение будем считать адиабатическим, так что потенциальная

температура $\theta = T \left(p_0 / p \right)^\kappa$ (здесь T – температура, p – давление, p_0 – давление на уровне моря, κ – показатель адиабаты) сохраняется:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa = \theta_A = \text{const}, \quad (1)$$

где θ_A – значение потенциальной температуры в точке А. С учётом уравнения Менделеева-Клапейрона $p = \rho R T$, где ρ – плотность воздуха, R – газовая постоянная сухого воздуха, из (1) можно получить

$$\rho = \frac{p^{1-\kappa} p_0^\kappa}{R \theta_A}. \quad (2)$$

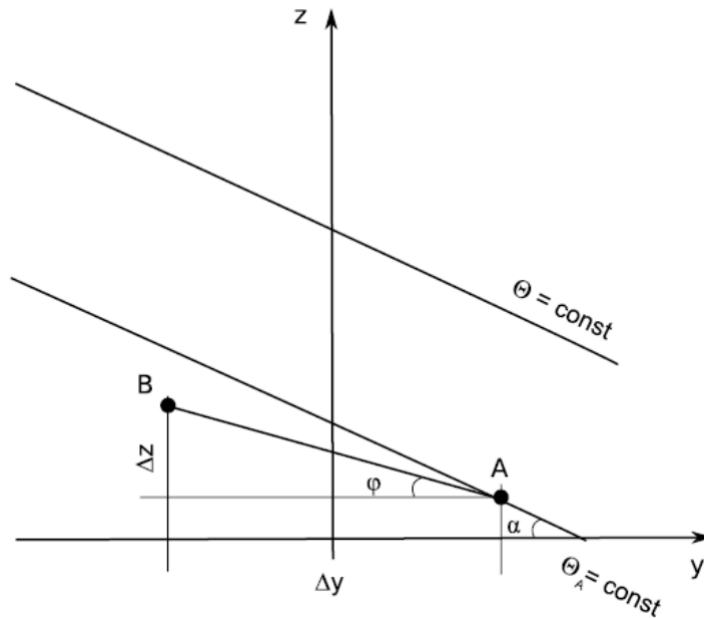


Рис. 2. Схема движения воздушной частицы при развитии бароклинной неустойчивости

При адиабатическом движении частицы воздуха из точки А в точку В (см. рис. 2) её плотность, таким образом, станет

$$\rho_A(B) = \rho_A(A) + \Delta\rho,$$

$$\Delta\rho = \left. \frac{\partial\rho}{\partial y} \right|_{\theta=\theta_A} \Delta y + \left. \frac{\partial\rho}{\partial z} \right|_{\theta=\theta_A} \Delta z = \frac{\partial\rho}{\partial p} \left(\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\theta=\theta_A} \Delta y + \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\theta=\theta_A} \Delta z \right),$$

(обозначение $\theta = \theta_A$ здесь подчёркивает, что движение адиабатическое). Плотность частицы воздуха в точке В до начала движения

$$\rho_B(B) = \rho_A(A) + \Delta\rho_{AB},$$

$$\Delta\rho_{AB} = \frac{\partial\rho}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial\rho}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \right),$$

Основное различие между $\Delta\rho$ и $\Delta\rho_{AB}$ состоит в том, что в первом случае частные производные плотности (и давления) вычисляются вдоль адиабаты (1), а во втором случае – при реальном распределении этих переменных в атмосфере.

С учётом (2)

$$\begin{aligned} \rho_A(B) - \rho_B(B) &= \Delta\rho - \Delta\rho_{AB} = \\ &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\theta=\theta_A} - \frac{\partial\rho}{\partial y} \right) \Delta y + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{\theta=\theta_A} - \frac{\partial\rho}{\partial z} \right) \Delta z = \\ &= \left(\frac{(1-\kappa) p_0^\kappa}{R \theta_A p_A^\kappa} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\theta=\theta_A} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Delta y + \left(\frac{(1-\kappa) p_0^\kappa}{R \theta_A p_A^\kappa} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{\theta=\theta_A} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \Delta z. \end{aligned} \quad (3)$$

Все производные и значения всех переменных в последнем соотношении оцениваются в начальной точке А, что в дальнейшем в этом разделе будет обозначаться нижним индексом “А”. Учитывая определение потенциальной температуры и уравнение Менделеева-Клапейрона, получаем

$$\frac{(1-\kappa) p_0^\kappa}{R \theta_A p_A^\kappa} = \frac{(1-\kappa) p_0^\kappa}{R \theta_A p_A^\kappa} = \frac{(1-\kappa)}{RT_A} = \frac{(1-\kappa) \rho_A}{p_A},$$

так что (3) можно записать в виде

$$\rho_A(B) - \rho_B(B) = \rho_A \left(\frac{(1-\kappa)}{p_A} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\theta=\theta_A} - \frac{1}{\rho_A} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_A \right) \Delta y + \rho_A \left(\frac{(1-\kappa)}{p_A} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{\theta=\theta_A} - \frac{1}{\rho_A} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_A \right) \Delta z$$

Снова используя (2) и определение потенциальной температуры, можно показать, что, например,

$$\frac{(1-\kappa) \partial p}{\rho_A \partial y} \Big|_{\theta=\theta_A} - \frac{1 \partial p}{\rho_A \partial y} \Big|_A = \frac{1 \partial \theta}{\theta_A \partial y} \Big|_A,$$

так что

$$\rho_A(B) - \rho_B(B) = \frac{\rho_A}{\theta_A} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_A \Delta y + \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_A \Delta z \right) = \frac{\rho_A}{\theta_A} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_A \Delta y \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_A \frac{\Delta z}{\Delta y} - \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\theta=\theta_A} \right)$$

(последнее соотношение получается с учётом известной формулы перекрёстного дифференцирования для частных производных). Проекция ускорения силы тяжести вдоль направления движения

$$a_g = - \frac{(\rho_A(B) - \rho_B(B)) g \sin \phi}{\rho_A(A)} = - \frac{\rho_A}{\theta_A} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_A \Delta y \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_A \frac{\Delta z}{\Delta y} - \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\theta=\theta_A} \right) g \sin \phi$$

(определение угла ϕ приведено на рис. 2).

Однако $\Delta z/\Delta y = \operatorname{tg} \phi$, а $\partial z/\partial y|_{\theta=\theta_A} = \operatorname{tg} \alpha$ – угол наклона адиабатических поверхностей к горизонтали (рис. 2). Если $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \phi$, то $a_g > 0$, и частица при движении будет всплывать. Это и соответствует развитию неустойчивости.

Соотношения этого раздела показывают, что бароклинная неустойчивость является частным случаем наклонной конвекции. Специальное название для бароклинной неустойчивости связано с тем, что, в отличие от общего случая наклонной конвекции, она происходит во вращающемся газе (или жидкости). Это вращение обусловлено вращением Земли вокруг своей оси.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ.

Значительную роль в задачах прогноза погоды и климата играют математические понятия устойчивости и предсказуемости. Рассмотрим систему, состояние которой описывается вектором \mathbf{Y} и эволюция которой описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}), \quad t > 0$$

$$\mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0 \quad . \quad (3)$$

$$\mathbf{Y} \subset H_{\mathbf{Y}}$$

Здесь $\mathbf{A}(\mathbf{Y})$ – эволюционный оператор, t – время, \mathbf{Y}_0 – начальное значение \mathbf{Y} , $H_{\mathbf{Y}}$ – пространство, в котором содержатся все возможные

решения этого эволюционного уравнения. Задача (3) в математике носит название задачи Коши.

В задачах прогноза погоды и климата вектор \mathbf{Y} может быть построен в виде

$$\mathbf{Y} = \left(u_1, v_1, w_1, p_1, \rho_1, T_1, q_1, \quad u_2, v_2, w_2, p_2, \rho_2, T_2, q_2, \quad \dots, \right. \\ \left. u_{M_s}, v_{M_s}, w_{M_s}, p_{M_s}, \rho_{M_s}, T_{M_s}, q_{M_s} \right) \quad (4)$$

Здесь u , v и w – соответственно зональная, меридиональная и вертикальная компоненты скорости, q – удельная влажность в атмосфере, нижний индекс указывает на расчётную ячейку трёхмерного физического пространства (эти ячейки считаются пронумерованными), M_s – число таких ячеек. В свою очередь, оператор \mathbf{A} объединяет собой уравнения Навье-Стокса, уравнение неразрывности и термодинамическое уравнение:

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5) \\ c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = J$$

Здесь $\mathbf{U} = (u, v, w)$, $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор скорости вращения Земли, \mathbf{g} – вектор ускорения силы тяжести, \mathbf{F}_r – вектор ускорения силы трения, c_v – удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении, J – сумма неадиабатических притоков и стоков тепла. В (5) также использовано понятие материальной производной:

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla(\bullet).$$

Количество переменных в (5) и уравнений в (6) может увеличиваться при учёте большего числа процессов в системе. Например, если рассмотреть химические процессы в атмосфере, то (5) пополнится концентрациями веществ, участвующих в соответствующих химических реакциях, а (6) – уравнениями этих реакций. Пространство H_Y в метеорологии и климатологии может быть определено как совокупность всех дифференцируемых по времени векторных функций размерности M_s .

Для системы (3) наряду с решением $\mathbf{Y}(t)$ рассмотрим также решение $\mathbf{Y}^{(1)}(t)$ с начальным условием $\mathbf{Y}^{(1)}(t)|_{t=0} = \mathbf{Y}_0^{(1)}$. Введём

абстрактное понятие расстояния между векторами $\|d\mathbf{Y}(t)\| = \|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}^{(1)}(t)\|$ как некоторой функции от этих векторов, которая может принимать только неотрицательные значения. В математике это расстояние называется нормой. В приложениях оно может определяться, например, максимумом по всем элементам вектора $\|d\mathbf{Y}(t)\| = \max_j (dY_j)$ или подобно обычному евклидовому расстоянию в физическом пространстве $\|d\mathbf{Y}(t)\| = \sqrt{dY_1^2 + dY_2^2 + \dots + dY_{M_s}^2}$.

Определение 1 (локальная устойчивость по Ляпунову). Решение $\mathbf{Y}(t)$ системы (3) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что из условия $\|d\mathbf{Y}(0)\| < \delta$ следует, что при любых $0 < t < t_1$ справедливо $\|d\mathbf{Y}(t)\| < \varepsilon$ (рис. 3).

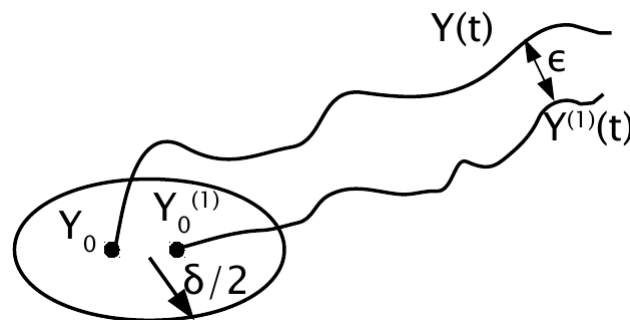


Рис. 3. Иллюстрация определения устойчивости по Ляпунову

Это определение означает, что траектории, начальные точки которых находятся достаточно близко к друг другу, останутся вблизи друг друга в течение всего интервала $0 < t < t_1$. Можно также определить глобальную устойчивость по Ляпунову. Это определение подобно определению 1, но в нём $t_1 = +\infty$.

Кроме того, наряду с (3) рассмотрим систему, правая часть которой возмущена зависящим от времени вектором $\mathbf{f}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}) + \mathbf{f}(t), \quad t > 0$$

$$\mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0 \quad . \quad (6)$$

$$\mathbf{Y} \subset H_{\mathbf{Y}}$$

Определение 2 (локальная устойчивость относительно возмущений). Решение $\mathbf{Y}(t)$ системы (3) называется устойчивым относительно возмущения $\mathbf{f}(t)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует

$\delta > 0$, такое что из условия $\|\mathbf{f}(t)\| < \delta$ следует, что при любых $0 < t < t_1$ справедливо $\|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}^{(2)}(t)\| < \varepsilon$.

Очевидным образом определение 2 обобщается на определение глобальной устойчивости относительно возмущений. Следует отметить, что в приложениях возмущения могут быть двух типов:

- Параметрические возмущения, при которых изменяются коэффициенты модели. Например если в модели условие образование облаков имеет вид $RH > RH_0$, где RH – относительная влажность, RH_0 – некоторое пороговое значение, то изменение значения RH_0 в модели является параметрическим возмущением.
- Структурные возмущения, при которых меняется структура модели. Например, такое возмущение в модели происходит при замене одной схемы образования облаков другой такой схемой.

Простейшим примером использования понятия устойчивости относительно начальных условий в физике является шарик на неровной поверхности (рис. 4а). Если шарик находится в канавке, то его положение равновесия устойчиво и при смещении из этого положения равновесия шарик возвращается обратно. Если такая канавка достаточно глубокая, равновесие устойчиво. Если глубина канавки невелика, а рядом расположена другая канавка, то положение является условно устойчивым – при малых возмущениях шарик вернётся в исходное положение равновесия, при достаточно больших перейдёт в соседнюю канавку. Если шарик расположен на выпуклой поверхности, его положение равновесия неустойчиво.

Использование понятия устойчивости в технике можно проиллюстрировать на примере бокового крена автомобиля на вираже (рис. 4б). При резком повороте на автомобиль действует опрокидывающий момент сил. Центром вращения для этого момента является линия сцепления внешних колёс автомобиля с дорогой. Сила тяжести способствует возвращению автомобиля в нормальное положение. Такое движение условно устойчиво. При небольшом крене, когда направление силы тяжести из центра масс автомобиля пересекает дорожное полотно внутри колёсной базы, автомобиль не опрокидывается. При сильном крене, эта точка пересечения смещается вне колёсной базы, и автомобиль опрокидывается.

Предсказуемость определяется временным пределом, на котором состояние системы может быть предсказано. При этом выделяют предсказуемость первого и второго рода.

Определение 3. Предсказуемость первого рода - это определение *точного состояния системы* по законам, которым она подчиняется, и начальным условиям.

Определение 4. Предсказуемость второго рода: определение *статистических характеристик системы* (средних, стандартных отклонений; в общем случае - статистической функции распределения переменных) по законам, которым она подчиняется, и начальным условиям.

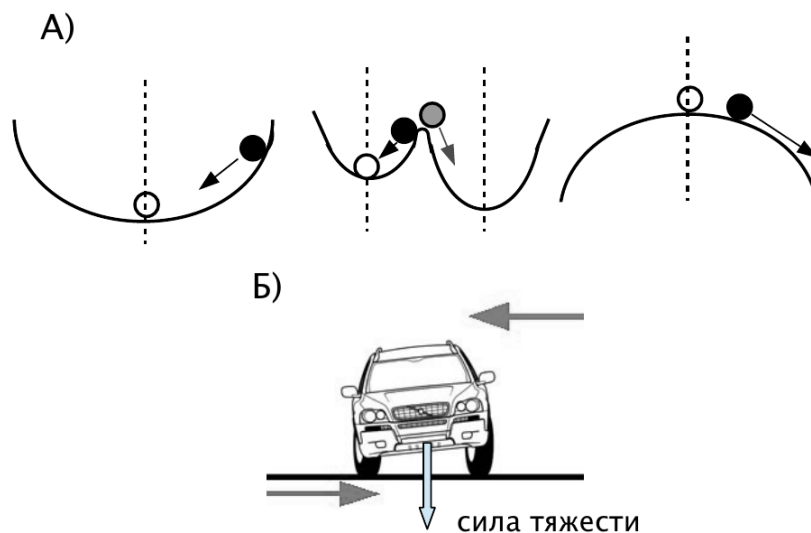


Рис. 4. Иллюстрация использования понятия устойчивости в физике и технике. а) Шарик в канавке: устойчивое положение (слева), условно устойчивое положение (в середине), неустойчивое положение (справа). Положения равновесия изображены вертикальными прерывистыми линиями. Шарик в положении равновесия незакрашен, при смещении из положения равновесия закрашен чёрным или серым цветом. Стрелками показано направление движения смещённого шарика. б) Крен автомобиля на вираже (серыми стрелками показан вращающий момент сил, вертикальной стрелкой – направление силы тяжести)

Примером предсказуемости первого рода является прогноз погоды на несколько дней. Пример предсказуемости второго рода - задача оценки будущих изменений климата на масштабах десятилетий и столетий при антропогенном и естественном воздействии на климатическую систему

Согласно оценкам по данным наблюдений кинетическая энергия движений в атмосфере $E_k \sim 10^{21}$ Дж. Кинетическая энергия отдельных циклонов на 2 порядка меньше. Также по данным наблюдений можно

оценить, что скорость преобразования кинетической энергии в синоптических движениях $\partial E_k / \partial t \sim 10^{15}$ Вт. Поэтому характерное время преобразования энергии в синоптических возмущениях

$$\tau_{syn} = \left(\frac{1}{E_k} \frac{\partial E_k}{\partial t} \right) \sim 10^5 \text{ с} \sim 1-2 \text{ нед.}$$

При сроках прогнозах $t \ll \tau_{syn}$ достаточно учитывать адиабатические движения воздуха (краткие сроки прогноза). При сроках прогноза $t \sim \tau_{syn}$ и более длительных необходимо учитывать неадиабатические процессы.

При увеличении срока прогноза погоды его точность ухудшается. До сроков примерно недели (что по порядку совпадает с τ_{syn}) ошибка невелика. На сроках 1-5 недель эта ошибка быстро нарастает, а затем выходит на асимптотическое значение (насыщается). Физической причиной насыщения ошибки прогноза на больших сроках являются энергетические ограничения для синоптических возмущений.

Такое поведение ошибки прогноза соответствует переходу от предсказуемости первого рода к предсказуемости второго рода. Для сроков прогноза вплоть до τ_{syn} целесообразно ставить задачу о предсказуемости первого рода. На больших сроках смысл имеет только задача о предсказуемости второго рода – климатической предсказуемости. Иначе говоря, исходя из знания о состоянии земной системы 1 января 2016 г., мы не можем предсказать погоду 8 июня 2079 г. Однако мы можем поставить задачу о том, чему равно математическое ожидание состояния земной системы в этот день и какова неопределённость (выражаемая, например, в терминах среднеквадратичного отклонения) для этого состояния.

3. ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА И АТТРАКТОР

Показатели Ляпунова характеризуют степень неустойчивости относительно начальных условий. Рассмотрим решение системы (3). В момент времени $t = t_0$ возмутим решение на величину \mathbf{d}_0 , т.е. вектор решения $\mathbf{Y}(t_0)$ заменим на $\mathbf{Y}^{(3)}(t_0) = \mathbf{Y}(t_0) + \mathbf{d}_0$ и продолжим это решение (рис. 5). Если система (3) неустойчива относительно начальных условий то при $t < t_0$ будет $d_1 = \|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}^{(3)}(t)\| > d_0$. Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что если система (3) линейна, то

$$d_1 = d_0 e^{\lambda_L(t_1 - t_0)}$$

Величина λ_L при этом называется показателем Ляпунова. Он характеризует степень неустойчивости системы (3) относительно начальных условий. При $\lambda_L > 0$ расстояние между траекториями увеличивается со временем, при $\lambda_L < 0$ – уменьшается. Для M -мерной системы (3) (в которой $\mathbf{Y}(t)$ имеет M компонент) можно ввести M показателей Ляпунова – каждый по своему направлению. При этом возможно, что часть этих показателей будет отрицательна, часть положительна. В таком случае важным является их сумма

$$\lambda_{L,0} = \sum_{j=1}^M \lambda_{L,j}.$$

Если $\lambda_{L,0} < 0$, то все решения системы (3) ограничены: $\|\mathbf{Y}(t)\| < \infty$. Такие системы называются диссипативными и играют большую роль в приложениях.

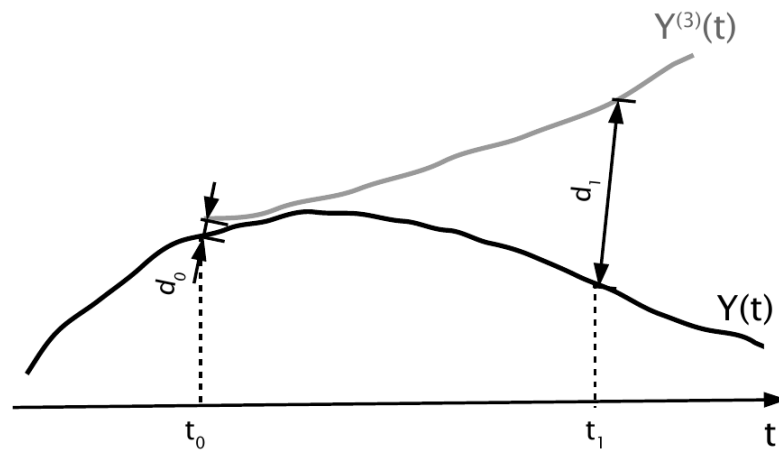


Рис. 5. Иллюстрация понятия показателей Ляпунова

Определение 5. Аттрактор – компактное (т.е. ограниченное и связное) подмножество пространства H_Y , все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности (рис. 6).

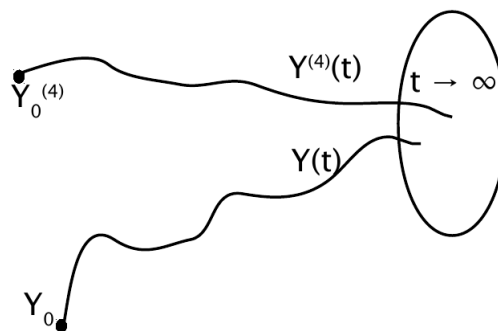


Рис. 6. Иллюстрация понятия аттрактора

Синонимом термина “аттрактор” являются также термины “притягивающее множество” или “инвариантное множество”.

Аттрактором может являться притягивающая неподвижная точка (к примеру, в задаче о маятнике с трением о воздух или нижнее положение шарика в канавке на рис. 4), периодическая траектория (при наличии у системы осциллирующих решений, амплитуда которых не увеличивается и не уменьшается со временем) или некоторая ограниченная область с неустойчивыми траекториями внутри.

Понятие аттрактора тесно связано с понятием предсказуемости второго рода. В большинстве случаев можно предполагать, что при решении задачи о предсказуемости второго рода решения системы расположены на аттракторе.

Важным примером аттрактора является так называемый аттрактор Лоренца. Он является притягивающим множеством для системы трёх переменных (x, y, z) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Эта система была получена упрощением системы для конвекции Бенара в жидкости. Стандартными значениями параметров являются $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, а начальными условиями - $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Решение системы Лоренца при указанных значениях параметров изображено на рис. 7.

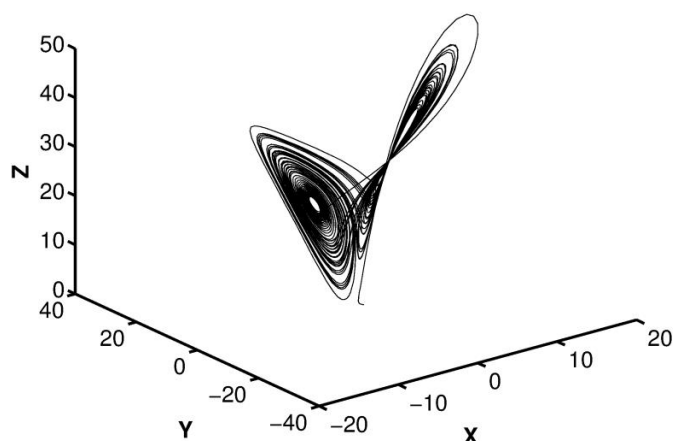


Рис. 7. Аттрактор Лоренца

Как видно из рис. 7, решение системы Лоренца ограничено - эта система относится к классу диссипативных. Вблизи плоскости $y = z = 0$ система характеризуется высокой зависимостью от начальных условий (это явление называется динамическим хаосом). Аттрактор Лоренца относится к классу странных аттракторов.

Странный аттрактор — это притягивающее множество неустойчивых траекторий диссипативной динамической системы. В отличие от обычного аттрактора не является кривой или поверхностью. Траектория такого аттрактора непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима нарастают).

4. МЕТОДЫ АНАЛИЗА БАРОКЛИННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Методы теоретического анализа бароклиной неустойчивости можно подразделить на две группы. К первой из них относится линейный метод анализа нормальных мод. Решения уравнение термогидромеханики для любой векторной переменной $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ - радиус-вектор, а t - время, в этой группе методов ищутся в виде

$$\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{Y} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-ct)} \right] \quad (7)$$

Здесь i - мнимая единица, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ - волновой вектор, $c = c_r + i c_i$ - комплексная фазовая скорость, $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{r}, t)$ - комплексная амплитуда, медленно меняющаяся в пространстве и времени:

$$\left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x} \right| \propto |k_x|, \quad \left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial y} \right| \propto |k_y|, \quad \left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial z} \right| \propto |k_z|, \quad \left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial t} \right| \propto |c\mathbf{k}|.$$

При этом предполагается, что наиболее неустойчивая волна (т. е. волна с максимальным положительным $\text{Im } c|\mathbf{k}|$) определяет структуру развивающихся бароклиных возмущений. В приложениях модального анализа уравнения, как правило, линеаризуются, что исключает исследование нелинейных процессов.

Вторая группа методов носит название немодального анализа. Она представляет собой решение задачи Коши при заданных начальных условиях для нелинейных уравнений термогидромеханики (5). Это позволяет анализировать не только линейные, но и нелинейные процессы бароклиной неустойчивости.

5. КОЛЕБАНИЯ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. СТАТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЙЛОРА-РЭЛЕЯ И КЕЛЬВИНА- ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим вертикальные колебания частицы воздуха в атмосфере. Распределение давления с высотой невозмущённой (на что в данном и последующем разделах указывает нижний индекс “0”) атмосфере описывается уравнением

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} = -g.$$

При небольшом смещении частицы воздуха по вертикали на величину δz ввиду действия архимедовой силы (силы плавучести) она приобретёт ускорение

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2(\delta z)}{dz^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Если движение происходит достаточно медленно, то давление в движущейся частице воздуха будет равно невозмущённому: $p \equiv p_0$. Тогда из последнего уравнения с учётом гидростатического соотношения, закона Гей-Люссака (согласно которому при постоянном давлении $p/\rho = \text{const}$) и определения потенциальной температуры можно получить

$$\frac{dw}{dt} = g \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = g \frac{\theta}{\theta_0}. \quad (8)$$

При малых смещениях δz справедливо

$$\theta_0(\delta z) = \theta_0(0) + \frac{d\theta_0}{dz} \delta z.$$

При адиабатическом движении воздуха $\theta(\delta z) - \theta(0) = \theta_0(\delta z) - \theta_0(0)$. Как следствие,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2(\delta z)}{dz^2} = -N^2 \delta z, \quad (9)$$

где

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz}. \quad (10)$$

Переменная N носит название частоты Брента-Вяйсяля. Можно выделить следующие частные случаи:

- $d\theta_0/dz > 0$. В этом случае $N^2 > 0$ и уравнение (9) является уравнение гармонических колебаний с круговой частотой N . Таким образом, воздушная частица осциллирует в вертикальном направлении с круговой частотой N и периодом $\tau = 2\pi / N$. При этом говорят, что атмосфера статически устойчива.
- $d\theta_0/dz = 0$. В этом случае $N^2 = 0$. В этом случае атмосфера статически нейтральна, и воздушная частица при бесконечно медленном смещении останется в состоянии покоя.
- $d\theta_0/dz < 0$. В этом случае $N^2 < 0$. В этом случае (9) имеет только решения, экспоненциально возрастающие со времени – атмосфера статически неустойчива.

В земной атмосфере на всех высотах, как правило, $d\theta_0/dz > 0$, т.е. $N^2 > 0$. В тропосфере, стратосфере и мезосфере $N = 0.01-0.02$ рад/с, что соответствует периоду колебаний 5-10 мин.

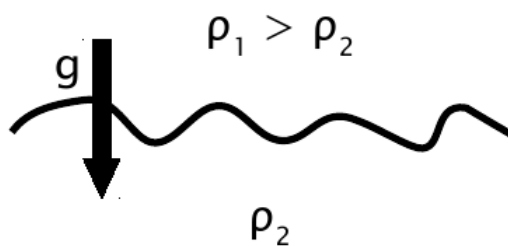
Определение 6. Неустойчивость Тейлора-Рэля – гидродинамическая неустойчивость расслоённой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, возникающая при увеличении плотности жидкости с высотой (рис. 8а).

Физической причиной развития неустойчивости Тейлора-Рэля является архимедова сила (сила плавучести). Как следствие, эта гидродинамическая неустойчивость является частным случаем статической неустойчивости, и критерий развития или отсутствия неустойчивости Тейлора-Рэля основан на знаке частоты Брента-Вяйсяля.

Определение 7. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца – гидродинамическая неустойчивость, возникающая в жидкости, разные слои которой движутся с разной скоростью (рис. 8б).

Следует отметить, что направление движение различных слоёв жидкости при этом не играет определяющей роли – важно именно движение этих слоёв относительно друг друга. Т.к. сила тяжести в определении γ также не важна, то не играет роли и в какой плоскости (вертикальной, горизонтальной или наклонной) происходит это движение. Не играет принципиальной роли и сжимаемость или несжимаемость жидкости или газа. Т.к. пространственная зависимость скорости движения в метеорологии и океанологии часто называется сдвигом скорости, то неустойчивость Кельвина-Гельмгольца также носит название сдвиговой неустойчивости.

А) неустойчивость Рэля-Тейлора



Б) неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

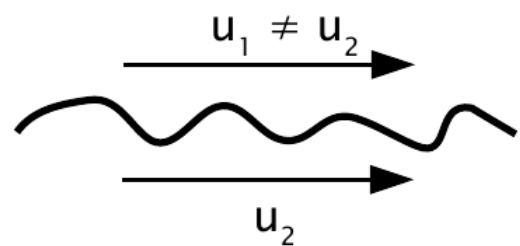


Рис. 8. Определение неустойчивости Тейлора-Рэля (а) и Кельвина-Гельмгольца (б)

6. КРИТЕРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В качестве примера рассмотрим так называемое плоское стационарное течение Пуазейля. В гидродинамике таким течением называется течение вязкой жидкости между двумя пластинами (рис 9). Размер пластин в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, считается бесконечным. Это упрощает решение, оставляя зависимость только от двух координат – x и z . Для простоты пластины считаются бесконечно длинными и в направлении оси x . Плотность жидкости ρ считаем постоянной (жидкость несжимаема). На верхней и нижней пластинах для вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания, что приводит к условию для скорости u вдоль оси x :

$$u|_{z=-h} = u|_{z=h} = 0. \quad (11)$$

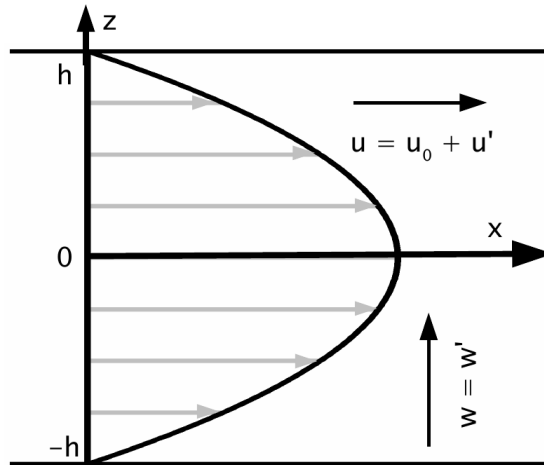


Рис. 9. Плоское течение Пуазейля

Уравнение для скорости u фонового стационарного потока получается из уравнений Навье-Стокса с учётом вязкости ν :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right). \quad (12)$$

В (12) нижний индекс “0” означает фоновый стационарный поток. В этом уравнении ввиду стационарности потока можно положить $\partial u_0 / \partial t = 0$, а ввиду бесконечной длины пластин вдоль оси x - $\partial u_0 / \partial x = 0$ и $\partial^2 u_0 / \partial x^2 = 0$. При этом производная давления вдоль оси x не равна нулю (иначе не будет движения), но из стационарности потока следует, что эта производная должна быть постоянной: $\partial p_0 / \partial x = const$. Из симметричности задачи относительно той же оси следует, что для фоновой скорости вдоль оси z справедливо $w_0(-z) = w_0(z)$. Из условия ненакопления массы жидкости при любом z (это условие следует из несжимаемости жидкости) тогда должно быть $w_0 \equiv 0$. Таким образом, (12) превращается в

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \quad (13)$$

С учётом отмеченного выше постоянного значения $\partial p_0 / \partial x$ последнее уравнение есть обыкновенное уравнение второго порядка. Его решение с учётом граничных условий (11) имеет вид

$$u_0(z) = \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p_0}{\partial x} (h^2 - z^2) = u_{0,\max} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) = u_{0,\max} F_u(z), \quad -h < z < h. \quad (14)$$

Здесь $u_{0,\max}$ – максимальное значение u_0 , достигаемое в центре канала, $F_u(z) = 1 - z^2/h^2$. Рассмотрим возмущённый поток с $u = u_0 + u'$ и $w = w_0 + w' = w'$. Он описывается двумя компонентами уравнений Навье-Стокса и уравнением неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t} + (u_0 + u') \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + (w_0 + w') \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w'}{\partial t} + (u_0 + u') \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + (w_0 + w') \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (15). Раскрывая в нём скобки, учитывая $\partial u_0/\partial t = 0$, $\partial u_0/\partial x = 0$, $\partial^2 u_0/\partial x^2 = 0$, $w_0 \equiv 0$ и соотношение (13), можно получить

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u_0}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right). \quad (16)$$

Будем считать возмущения скорости u малыми:

$$|u'| \ll u_0.$$

В этом случае, как легко видеть, $|u' \partial u'/\partial x| \ll |u_0 \partial u'/\partial x|$. Кроме того, с учётом $du_0/dz \sim u_{0,\max}/h$, $\partial u'/\partial z \sim u'_{\max}/h$, легко видеть, что $|w' \partial u'/\partial z| \ll |w' \partial u_0/\partial z|$. Поэтому в (16) можно отбросить оба слагаемых с перекрёстным умножением штрихованных переменных (третье и пятое в левой части). При этом в (16) остаётся только слагаемые, линейные по возмущениям. Такая процедура называется

линеаризацией. Подобным образом можно также упростить и два других уравнения (15). В результате (15) будет приведена к виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Введём функцию тока ψ согласно определению

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}.$$

Возможность введения этой функции связана с третьим уравнением системы (17), которое с учётом известного правила перекрёстного дифференцирования при этом удовлетворяется тождественно:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z \partial x} = 0,$$

а два других уравнения этой системы превращаются в

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial z} - u_0 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{du_0}{dz} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial z^3} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial x} + u_0 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial z^2 \partial x} \right).\end{aligned}$$

С системой последних двух уравнений произведём следующие преобразования: 1) продифференцируем первое уравнение по z , 2) продифференцируем второе уравнение по x , 3) из первого продифференцированного уравнения вычтем второе продифференцированное уравнение. Опять применяя правило перекрёстного дифференцирования и учитывая, что $\partial u_0 / \partial x = 0$ и

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du_0}{dz} \right) = 0, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right) + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{d^2 u_0}{dz^2} &= \\ = \nu \left(\frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi'}{\partial z^4} \right)\end{aligned}\tag{18}$$

Граничными условиями для уравнения (18) служат условия прилипания (аналогично (11)) и условия отсутствия полостей у краевых пластин (иначе не будет прилипания) $w'|_{z=\pm h} = 0$. Эти граничные условия в терминах функции тока имеют вид

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h.$$

При бесконечной длине пластин, ограничивающих жидкость, первое из этих условий можно проинтегрировать по x , получив условие на границах $\psi' = const$. Без ограничения общности эту константу можно положить равной нулю (т.к. нас интересуют только скорости движения), так что граничные условия для (18) приводятся к виду

$$\psi' = \frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h.$$

Заменим в (18) переменную z на $\xi = z/h$ ($-1 \leq \xi \leq 1$). Решение (18) ищем в виде нормальных мод

$$\psi' = \phi'(\xi) e^{i(\omega t - kx)} \quad (19)$$

с комплексными $\phi'(\xi)$ и ω . В результате получим так называемое волновое уравнение Орра-Зоммерфельда

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2 \phi'}{d\xi^2} + k^2 \phi'\right) - \phi' \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} = \frac{i}{kR} \left(\frac{d^4 \phi'}{d\xi^4} - 2k^2 \frac{d^2 \phi'}{d\xi^2} + k^4 \phi'\right)$$

с граничными условиями

$$\phi' = \frac{d\phi'}{d\xi} = 0, \quad \xi = \pm 1.$$

В уравнении Орра-Зоммерфельда введено число Рейнольдса

$$R = \frac{\rho u_{0,\max} h}{\nu}.$$

Рассмотрим упрощённый вариант уравнения Орра-Зоммерфельда. Именно, отбросим его правую часть, перейдя к так называемому уравнению Рэлея, которое запишем в виде

$$\frac{d^2 \phi'}{d\xi^2} + k^2 \phi' - \frac{\phi' d^2 u_0 / d\xi^2}{u_0 - \omega/k} = 0.$$

Умножим его на комплексно сопряжённое $\phi'^*(\xi)$ и проинтегрируем по ξ в пределах от $\xi_1 = -1$ до $\xi_2 = 1$:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\frac{d^2 \phi'}{d\xi^2} \phi'^* + k^2 \phi' \phi'^* - \frac{\phi' \phi'^* d^2 u_0 / d\xi^2}{u_0 - \omega/k} \right] d\xi = 0. \quad (20)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках (20) можно проинтегрировать по частям

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d^2 \phi'}{d\xi^2} \phi'^* d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \phi'^* d \left(\frac{d\phi'}{d\xi} \right) = \phi'^* \frac{d\phi'}{d\xi} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\phi'}{d\xi} \frac{d\phi'^*}{d\xi} d\xi.$$

С учётом граничных условий $\phi'^* \frac{d\phi'}{d\xi} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = 0$, так что

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d^2 \phi'}{d\xi^2} \phi'^* d\xi = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\phi'}{d\xi} \frac{d\phi'^*}{d\xi} d\xi = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left| \frac{d\phi'}{d\xi} \right|^2 d\xi$$

(использовано также правило вычисления модуля комплексного числа). Таким образом, (20) сводится к

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\left| \frac{d\phi'}{d\xi} \right|^2 + k^2 |\phi'|^2 \right] d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{|\phi'|^2 d^2 u_0 / d\xi^2}{u_0 - \omega/k} d\xi = 0.$$

Модуль комплексного числа – действительное число, поэтому первый интеграл в этом выражении является действительным. Таким образом, второй интеграл – также действительное число, т.е.

$$\text{Im} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{|\phi'|^2 d^2 u_0 / d\xi^2}{u_0 - \omega/k} d\xi = 0.$$

Если $\omega = \omega_r + i \omega_i$, то последнее выражение можно записать в виде

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\omega_i d^2 u_0 / d\xi^2}{k \left[(u_0 - \omega_i)^2 + \omega_i^2 / k^2 \right]} d\xi = 0. \quad (21)$$

Выражение (21) может выполняться только в двух случаях

- $\omega_i = 0$. Однако из (19) при этом следует, что решения нейтральны – у них нет экспоненциального роста или уменьшения со временем:

$$\psi' = \phi'(z) (\sin \omega t + i \cos \omega t) e^{-ikx}.$$

- $d^2 u_0 / d\xi^2$ (т.е. и $d^2 u_0 / dz^2$) меняет знак в канале.

Таким образом, для частного случая нами была доказана

Теорема (критерий Рэлея). Плоскопараллельное движение однородной несжимаемой жидкости устойчиво, если профиль скорости $u_0(z)$ не имеет точек перегиба.

Без доказательства приведём ещё два критерия устойчивости плоскопараллельных течений.

Теорема (критерий Майлса-Говарда). Плоскопараллельное движение расслоённой жидкости, в котором число Ричардсона

$Ri = \frac{g}{N_\rho du_0/dz}$ всюду больше $1/4$, устойчиво. Здесь g – ускорение

свободного падения, $N_\rho = \left| \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right|$, ρ_0 – плотность фонового состояния.

Теорема (критерий Фьортофта). Если для плоскопараллельного течения однородной несжимаемой жидкости существует постоянная C , такая что $(u_0 - C) \frac{d^2 u_0}{dz^2} \geq 0$, то течение устойчиво.

Все три критерия являются достаточными – их выполнение гарантирует устойчивость плоскопараллельного движения жидкости или газа, однако это движение может быть устойчивым и в случае, если они не выполняются. Кроме того, из выполнения критерия Фьортофта следует и выполнение критерия Рэлея – достаточно выбрать $C > \max |u_0|$.

Литература для самостоятельного изучения

Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы / Л.А. Дикий - Л.: Гидрометеиздат, 1976. 108 с.

Дымников В.П. Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов / В.П. Дымников - М.: ИВМ РАН, 2007. – 283 с.

Переведенцев Ю.П. Теория общей циркуляции атмосферы / Ю.П. Переведенцев, И.И. Мохов, А.В. Елисеев, К.М. Шанталинский, Н.А. Важнова Казань: Издательство КФУ, 2013. 224 с.

Монин А.С. Прогноз погоды как задача физики. / А.С. Монин. М.: Наука, 1969 – 183 с.

Drazin T. Introduction to Hydrodynamic Stability. / T. Drazin — Cambridge: Cambridge University Press, 2002. — 276 с.

Holton J.R. An Introduction to Dynamic Meteorology / J.R. Holton— Cambridge, MA: Academic Press, 2004. — 535 с.

Елисеев Алексей Викторович

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И
ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ КРУПНОМАСШТАБНЫХ АТМОСФЕРНЫХ
ПРОЦЕССОВ**

Учебно-методическое пособие

Корректурa автора

Подписано в печать 06.02.2017.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman».

Усл.печ.л.

Уч.-изд. л.. Тираж 4 экз. Заказ

Отпечатано в типографии

Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28