тода (рис. 1, б), толщину b нерастворимого металла и ширину h межэлектродного зазора.

Проведена серия тестовых расчетов. Полученные результаты с большой степенью точности совпали с известным решением более простой задачи [2].

Литература

1. *Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И.* Методы расчёта электрохимического формообразования. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. - 386 с.

2. *Клоков В.В.* Математическое моделирование предельной электрохимической обработки металла//Int. Conf. on Advances in Production Engineering. - Part II. APE'98, Warsaw, Poland, 1998. - P. 221-227.

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ПАРАБОЛИЧНОСТИ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА ПЛОСКОСТИ

Кондрашов А.Н.

Волгоградский государственный университет

Пусть Ω – область в пространстве $\mathbf{R}^2$ переменной $x = (x_1, x_2)$,

$$ds^2 = g_{11}(x)dx_1^2 + 2g_{12}(x)dx_1dx_2 + g_{22}(x)dx_2^2$$

– квадрат линейного элемента длины некоторой римановой метрики, заданной в Ω. Пара вида $F = (\Omega, ds^2)$ называется *обобщенной поверхностью.*

Если область Ω представляет собой неограниченную компоненту связности множества $\mathbf{R}^2 \setminus \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^2$ – компакт, то мы будем говорить, что поверхность F задана над внешностью этого компакта.

Пусть Δ – оператор Лапласа в метрике поверхности F, $\mathbf{C}_\xi$ – комплексная плоскость переменной $\xi = \xi_1 + i\xi_2$. Будем говорить, что обобщенная поверхность $F = (\Omega, ds^2)$, заданная над внешностью компакта $\mathcal{K}$, параболична "на бесконечности", если найдётся такая ограниченная односвязная область $D \supset \mathcal{K}$, что поверхность $F' = (\mathbf{R}^2 \setminus \overline{D}, ds^2)$ будет конформно эквивалентна комплексной плоскости с выброшенным кругом $\mathbf{C}_\xi \setminus \{\xi : |\xi| \leq R\}$, причем так, что бесконечно удаленной точке плоскости $\mathbf{R}^2$ будет соответствовать бесконечно удаленная точка плоскости $\mathbf{C}_\xi$.

Как известно (см., например, [1–5]), тип риманова многообразия играет важную роль при решении многих задач теории функций. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Если обобщенная поверхность $F = (\Omega, ds^2)$, заданная над внешностью компакта $\mathcal{K}$, такова, что координатные функции x_1, x_2 гармоничны в её метрике:*

$$\Delta x_1 = 0, \ \Delta x_2 = 0,$$

то F параболична "на бесконечности".

Следующий пример показывает, что гармоничности только одной координаты x_1 или x_2 для параболичности, вообще говоря, недостаточно.

Пример. Рассмотрим в $\mathbf{R}^2$ метрику

$$ds^2 = dx_1^2 + \frac{dx_2^2}{(1+x_2^2)^2}, \qquad -\infty < x_1, x_2 < \infty \qquad (1).$$

В ней $\Delta x_1 = 0$, $\Delta x_2 = 2x_2(1+x_2^2) \not\equiv 0$. Если сделать замену $u = \operatorname{arctg} x_2$, то (1) примет вид

$$ds^2 = dx_1^2 + du^2, \qquad -\infty < x_1 < \infty, \ |u| < \frac{\pi}{2}.$$

Тем самым метрика (1) изометрична евклидовой внутри полосы $|u| < \pi/2$. При этом границе данной полосы соответствует бесконечно удаленная точка плоскости $\mathbf{R}^2$. Это означает, что данная метрика не параболична.

Заметим, что конформная эквивалентность поверхности $F' = (\mathbf{R}^2 \setminus \overline{D}, ds^2)$ и $\mathbf{C}_\xi \setminus \{ \xi : | \xi | \leq R \}$ означает возможность введения на F' глобальных изотермических координат ξ_1, ξ_2. В случае $\mathcal{K} = \emptyset$ (т.е. когда $\Omega = \mathbf{R}^2$) результат теоремы 1 может быть уточнен следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K} = \emptyset$. Тогда, при прочих предположениях теоремы 1, на обобщенной поверхности $F = (\mathbf{R}^2, ds^2)$ можно ввести изотермические координаты ξ_1, ξ_2 при помощи линейного преобразования* *вида*

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1, \\ x_2 = a\xi_1 + b\xi_2, \quad b > 0. \end{cases}$$

В заключение отметим, что ранее в [6] были анонсированы аналогичные результаты для непараметрических поверхностей в псевдоевклидовом пространстве.

Литература

1. *Зорич В.А., Кесельман В.М.* О конформном типе риманова многообразия // Функц. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30. – Вып. 2. – С. 40-55.

2. *Кесельман В.М.* О римановых многообразиях p–параболического типа // Изв. вузов. Математика. – 1985. – N 4. – С. 81-83.

3. *Миклюков В.М.* О конформном типе поверхностей, теорема Лиувилля и теорема Бернштейна. – Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 242. – N 3. – С. 537-540.

4. *Миклюков В.М.* Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – N 4. – С. 111-158.

5. *Шикин Е.В.* О параболичности погружаемых и гиперболичности непогружаемых двумерных многообразий отрицательной кривизны // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. – 1990. – N 5. – С. 42-45.

6. *Кондрашов А.Н.* Признаки параболичности типа поверхностей заданной средней кривизны в псевдоевклидовом пространстве // Тез. докл. межд. конф. по геометрии "в целом". – Черкассы, 1997. – С. 23-24.