формизации алгебраического соответствия//Вестник БГУ, серия 1. - 1991. - N 1. - С. 36-39.

2. *Долгополова О.Б., Зверович Э.И.* Униформизация алгебраических соответствий//Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. - Минск: БГУ, 1996. - С. 76-80.

РЕШЕНИЕ СЕТОЧНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ С НЕНАЛЕГАЮЩИМИ ПОДОБЛАСТЯМИ[1]

Игнатьева М.А.

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета

Постановка задачи. Пусть $\Omega \in R^2$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ, разбитая на две подобласти Ω_1 и Ω_2 кусочно-гладкой кривой S, $K = \{u \in H_0^1(\Omega) | u(x) \geq 0$ для п.вс. $x \in \Omega_2\}$. Ищем функцию $u \in K$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int\limits_{\Omega} fu dx.$$

Введем следующие пространства и множества:

$$V_i = \{u_i \in H^1(\Omega_i) | u_i(x) = 0 \text{ для п.вс. } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega\},$$

$$\tilde{K} = \{u_2 \in V_2 | u_2(x) \geq 0 \text{ для п.вс. } x \in \Omega_2\},$$

$$M = \{(u_1, u_2) \in V_1 \times \tilde{K} | u_1(x) = u_2(x), x \in S\}.$$

Рассматриваемая задача заменяется задачей минимизации суммы двух функционалов

$$\min_{(u_1,u_2)\in M} \{J_1(u_1) + J_2(u_2)\}, \qquad J_i(u_i) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_i} |\nabla u_i|^2 dx - \int\limits_{\Omega_i} f_i u_i dx. \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 98-01-00200.

Если положить $u(x) = \{u_1(x), x \in \Omega_1; u_2(x), x \in \Omega_2\}$, то $u(x)$ является решением исходной задачи. В этом смысле две данные задачи эквивалентны.

Метод 1 основан на замене полученной задачи задачей поиска седловой точки функции Лагранжа

$$L(u_1, u_2, \lambda) = J_1(u_1) + J_2(u_2) + \int\limits_S \lambda(u_1 - u_2)dS.$$

Если $(u_1, u_2, \lambda) \in V_1 \times \tilde{K} \times L_2(S)$ – седловая точка, то есть

$$L(u_1, u_2, \lambda) = \sup_{\mu} \inf_{v_1, v_2} L(v_1, v_2, \mu) = \inf_{v_1, v_2} \sup_{\mu} L(v_1, v_2, \mu),$$

то $u(x) = \{u_1(x), x \in \Omega_1; u_2(x), x \in \Omega_2\}$ является решением исходной задачи. Для нахождения седловой точки используем следующие соотношения:

$$L'_{u_1}(u_1, u_2, \lambda) = 0; \ \partial L_{u_2}(u_1, u_2, \lambda) \ni 0; \ L'_{\lambda}(u_1, u_2, \lambda) = 0.$$

Далее мы аппроксимируем сеточной схемой задачу поиска седловой точки лагранжиана L и предлагаем итерационный метод ее решения. Для функции непрерывного аргумента, сеточной функции и вектора ее узловых параметров мы используем одни и те же обозначения. Это не приведет к недоразумениям, так как из контекста будет ясно, что понимается под соответствующим обозначением.

Для простоты изложения будем считать, что $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0,1)$, $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0,1)$. Построим в $\overline{\Omega}_1$ квадратную сетку с шагом H, а в $\overline{\Omega}_2$ – квадратную сетку с шагом $h = \frac{H}{2}$ и через ω_1 и ω_2 обозначим множества внутренних узлов этих сеток. Через $\partial\omega_i$ обозначим узлы, лежащие на границе области Ω_i, $s_i = \{x \in \partial\omega_i | x \in S \setminus \partial\Omega_i\}$. Разностная схема строится стандартным образом [1], при вычислении интеграла по границе S используется составная квадратурная формула трапеций. После аппроксимации поточечная запись задачи примет вид:

$$\begin{cases} -\Delta_H u_1 = f_1, & x \in \omega_1, \\ \frac{2}{H} u_{1\bar{x}_1} - u_{1x_2\bar{x}_2} = -\frac{1}{H}(\lambda + \overset{\circ}{\lambda}_h) + f_1, & x \in s_1, \\ u_1 = 0, & x \in \partial\omega_1 \setminus s_1, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -\Delta_h u_2 + Cu_2 \ni f_2, & x \in \omega_2, \\ -\frac{2}{h}u_{2x_1} - u_{2x_2\bar{x}_2} = \frac{2}{h}\lambda + f_2, & x \in s_2, \\ u_2 = 0, & x \in \partial\omega_2 \setminus s_2, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_2, & x \in s_1, \\ \mathring{u}_{1h} = u_2, & x \in s_2 \setminus s_1. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\Delta_h u = u_{x_1\bar{x}_1} + u_{x_2\bar{x}_2}$ – пятиточечная разностная аппроксимация оператора Лапласа на сетке с шагом h, $\mathring{v}_h = \frac{1}{2}(v(x-h) + v(x+h))$, $C = \partial I_{\tilde{K}_h}$ – субдифференциал индикаторной функции множества, аппроксимирующего $\tilde{K}$. В системах (2) и (3) разностные отношения обозначены одинаково, но строятся на сетках с разными шагами.

Поставим в соответствие сеточным функциям векторы их узловых параметров. Тогда системы уравнений (2)–(4) могут быть записаны в следующем матрично-векторном виде:

$$\begin{array}{ll} A_1u_1 + F_1\lambda & = f_1, \\ A_2u_2 + Cu_2 + F_2\lambda & \ni f_2, \\ F_1^Tu_1 + F_2^Tu_2 & = 0. \end{array}$$

Матрицы A_i и F_i соответствуют линейным сеточным операторам в подобластях Ω_i, действующим на u_i и λ. Вводя обозначения

$$u = (u_1, u_2), \quad f = (f_1, f_2), \quad y = (u, \lambda), \quad \tilde{f} = (f, 0),$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A' & F \\ -F^T & 0 \end{pmatrix}, C'' = \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

задачу запишем в виде

$$Ay + C''y \ni \tilde{f}.$$

Для решения этой задачи применим двухслойный итерационный процесс, обобщающий метод из [2], реализация которого осуществляется с помощью процедуры расщепления

$$D^{-1}(E + DC'')y^{n+1/2} \;\ni\; D^{-1}y^n + \tilde{f} - Ay^n, \tag{5}$$

$$(E + DA)(y^{n+1} - y^n) \;=\; y^{n+1/2} - y^n. \tag{6}$$

Здесь D – диагональная матрица итерационных параметров, такая, что каждая из задач для нахождения u_1, u_2 и λ имеет свой постоянный итерационный параметр.

Нелинейный оператор в уравнении (5) легко обратим. Линейное уравнение (6) представляет собой систему, которая является связной только в точках общей границы.

Для нахождения вектора y^{n+1}, где n - номер внешней итерации, использовался метод поточечной верхней релаксации. Параметры в задачах для нахождения u_1 и u_2 были взяты как теоретически оптимальные в итерационном процессе, построенном для решения системы уравнений с матрицей A'. Параметр для λ подбирался экспериментально.

Метод 2. Вернемся к задаче (1) минимизации суммы функционалов. Она эквивалентна решению включения

$$J_1'(u_1) + J_2'(u_2) + \partial I_{\tilde{K}}(u_2) + \partial I_M(u_1, u_2) \ni 0.$$

При аппроксимации этого включения получается разностная схема, которую можно записать следующим образом

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Cu_2 \end{pmatrix} + \partial I_{M_h}(u_1, u_2) \ni \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

где $M_h = \{u = (u_1, u_2) | u_1 = u_2$ в точках s_1, $\overset{\circ}{u}_{1h} = u_2$ в точках $s_2 \setminus s_1\}$. Если все нелинейные слагаемые обозначить через $\tilde{C}u$, то задача примет вид

$$A'u + \tilde{C}u \ni f.$$

Как и в методе 1, для решения полученного включения применялась итерационная схема расщепления. В этом случае обоснована сходимость итерационного процесса и получены оценка скорости сходимости и оптимальные итерационные параметры. Во внутренних точках Ω_1 и Ω_2 уравнение (5) решается, как и ранее. Для точек границы S, обозначая правую часть уравнения через $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, получим включение

$$D^{-1}u^{n+1/2} + \partial I_{M_h}(u^{n+1/2}) \ni \Phi,$$

которое эквивалентно задаче минимизации

$$\min_{(u_1,u_2)\in M_h} \left\{ \frac{1}{2\tau_1}(u_1, u_1) + \frac{1}{2\tau_2}(u_2, u_2) - (\Phi_1, u_1) - (\Phi_2, u_2) \right\}.$$

В минимизируемом функционале исключим значения u_2, используя определение множества M_h. Тогда уравнениями Эйлера для определения u_1 в точках s_1 будет трехдиагональная система, которая решалась методом прогонки.

Уравнение (6), в отличие от предыдущего случая, расщепляется на две несвязные подсистемы, соответствующие подобластям Ω_1 и Ω_2. Они решались методом верхней релаксации.

Анализ численных результатов. В обоих методах выход из внешнего итерационного процесса проходил по условию: максимум-норма невязки сеточной задачи меньше ε, которое было выбрано равным $0,001$. Норма вычислялась в точках, где действует линейное уравнение. Выход из внутренних итерационных процессов осуществлялся, когда выполнялось одно из двух условий: максимум-норма невязки становилась меньше $\varepsilon = 0,001$ либо число итераций превышало заданное число, которое бралось равным 1, 2 и 5. Программа тестировалась на сетках с шагом $H = 0,1;\ 0,05;\ 0,0025;\ 0,00125$. Метод сходился при любом числе внутренних итераций.

На достаточно крупных сетках ($H = 0,1;\ 0,05$) наиболее выгодным оказалось использование одной внутренней итерации, на мелких – двух или пяти.

Суммарное число итераций в методе с использованием множителей Лагранжа примерно на 7% меньше, чем в методе 2.

Литература

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

2. *Лапин А.В., Соловьев Д.О.* Итерационные схемы расщепления для вариационных неравенств //Препринт N 783 ВЦ СО АН СССР. – 1988. – 24 с.