КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Кафедра математической статистики

Е.К. КАШТАНОВА

ПРАКТИКУМ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

КАЗАНЬ − 2016

УДК 519.21 (075.8)
ББК 22.17я7

Принято на заседания кафедры математической статистики
Протокол № 3 от 15 ноября 2016 г.

Рецензенты

доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математической статистики КФУ И.Н.Володин

кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики КНТУ-КХТИ Р.Ф.Ахвердиев

Каштанова Е.К.

Практикум по теории вероятностей / Е.К. Каштанова. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 126 с.

Сборник задач по теории вероятностей предназначен для студентов социальных и экономических специальностей. Учебное пособие содержит теоретический материал, разбор типовых задач, задачи. При разработке учебно-методического пособия была учтена специфика будущей профессиональной деятельности. Большое внимание уделяется практической направленности курса. Данное учебное пособие соответствует требованиям, предъявляемым к учебным работам такого типа, может быть рекомендовано к использованию преподавателями данной дисциплины и студентами для занятий в течение семестра и при подготовке к экзамену.

Содержание

Введение

Целью данного учебного пособия является методическое обеспечение обучения по дисциплине «Теория вероятностей» для студентов экономического факультета. Учебное пособие содержит теоретический материал, разбор типовых задач, задачи с ответами, таблицы. Дифференциация задач по уровню сложности способствует лучшему усвоению материала, а также может быть использована для оценивания математической компетенции.

Задачи элементарного уровня представляют собой тестовые вопросы по изучаемой теме. Отвечая на вопросы, студенты демонстрируют степень узнавания основной информации по данной теме.

Задачи базового уровня представляют собой типовые задачи, решение которых основано на однократном применении формулы данной темы.

Задачи среднего уровня являются комплексными задачами, в решении которых наряду с формулами данной темы также используются другие формулы теории вероятностей, математические формулы и т.д. К среднему уровню также отнесены задачи, в решении которых, как составляющая часть, применяется классическое определение вероятности. Хотя следует заметить, что нахождение вероятностей по классическому определению вероятности на определенном этапе перестает восприниматься студентами как дополнительное усложнение и выполнятся автоматически. В задачи среднего уровня также включены задачи, при решении которых необходимы дополнительные расчеты, действия, рассуждения.

Задачи повышенной сложности предполагают знание не только формул теории вероятности, но и описываемых экономических явлений. Решение задач этого уровня требует более сложных рассуждений, чем задачи среднего уровня.

В качестве *творческих задач* включены задачи следующих типов:

1) решение задачи несколькими способами;

2) по исходным данным составить новую задачу на заданную тему и решить ее;

3) переформулировать предложенную задачу на заданную тему и решить ее.

При формулировании задачи должны использоваться уже описанные события и их вероятности без изменений. Вполне возможно, что в новой задаче будут использованы не все исходные события. Допускается введение новых количественных данных, например количество повторений эксперимента, число «успехов» и т.д. Возможна литературная обработка текста задачи, привнесение экономического или другого смысла, усиление эмоциональной окраски событий и т.д. В качестве примера переформулирования задачи в каждой теме приводится задача про стрелков (§2 Пример 1, задачи №№8,19 (§§2-4), №19 (§6), №8, 33 (§7).

Часть задач имеет несколько вопросов, расположенных в порядке усложнения. Дробление подобных задач по уровням сложности мы считаем нецелесообразным, поскольку постепенно усложняющиеся вопросы позволяют студентам лучше понять формулы, их отличия и взаимосвязь. В этом случае уровень сложности задачи определяется по самому сложному вопросу.

При разработке учебного пособия была учтена специфика будущей профессиональной деятельности. Большое внимание уделяется практической направленности курса. В учебном пособии использованы задачи по страхованию [8, 10].

В учебном пособии знаком ► обозначается начало условия задачи, знаком ■— окончание ее решения.

Учебное пособие соответствует требованиям, предъявляемым к учебно-методическим работам такого типа, может быть рекомендовано к использованию преподавателями данной дисциплины и студентами для занятий в течение семестра, при подготовке к зачету и экзамену. Учебное пособие может быть использовано не только студентами экономического факультета, но и студентами-социологами, студентами других специальностей.

Методические рекомендации по самостоятельной работе студентов

В современных госстандартах высшего образования значительная связь учебной нагрузки (до 50%) переводится на самостоятельную работу студентов.

Самостоятельная работа студентов по курсу «Теория вероятностей» включает различные виды работ: конспектирование, изучение нового материала, разбор и самостоятельное решение задач.

1. Изучение нового материала.

Курс «Теория вероятностей» относится к циклу математических, естественнонаучных дисциплин. Поэтому, как и в любой математической дисциплине, изложение дисциплины «Теория вероятностей» логичное, преемственное, взаимосвязанное с другими темами. При изучении нового материала для лучшего понимания постарайтесь ответить на следующие вопросы.

Что нового я узнал из этой темы?

Что из прочитанного было мне знакомо по другим темам или просто из жизни?

Какие формулы из предыдущих тем используются в этой теме?

Если в освоении темы остались плохо понятые моменты, то следует изучить другие источники или обратиться за консультацией к преподавателю.

Для самопроверки усвоения теоретического материала рекомендуется ответить на вопросы к теме.

2. Конспектирование.

Для лучшего понимания темы рекомендуется конспектировать изучаемый материал. Конспектирование предполагает краткое изложение основного материала. Для повышения эффективности усвоения темы следует изучаемый материал в виде схем, таблиц, рисунков.
Для самопроверки усвоения теоретического материала рекомендуется ответить на вопросы к теме.

3. Разбор и самостоятельное решение задач.

Решение задач следует проводить в следующей последовательности.

1) Определить, *что* требуется найти в задаче. Обозначить искомый показатель (величину, характеристику) в символьном виде.
2) Обозначить данные в символьном виде.
3) Определить необходимую для решения формулу. Проверить условия применения этой формулы.
4) Подставить значения в формулу и вычислить искомый показатель.

Если не получается решить задачу, то возможны следующие варианты действий.
а) Следует еще раз посмотреть теоретический материал, примеры решения задач. В каждом разделе приведены решения типовых для данного раздела задач.
б) Возможно, что еще не отработаны навыки решения задач данного раздела. В этом случае следует прорешать больше задач предыдущего уровня сложности.
в) Возможно, что «непонятная» часть решения задачи относится к одному из предыдущих разделов. В этом случае следует учитывать, что формулы теории вероятностей взаимосвязаны. Поэтому возможна ситуация, что задача может быть решена несколькими способами, т.е. есть выбор с использованием формул различных разделов.
г) Если после попыток а) - в) все–таки не получается решить задачу, остались плохо понятые моменты, то следует изучить другие источники или обратиться за консультацией к преподавателю.

Задачи для самостоятельного решения ориентированы на профессиональную деятельность. Задачи дифференцированы по степени сложности на 5 уровней: элементарный, базовый, средний, повышенной сложности, творческий. Поэтому самостоятельное решение задач целесообразно осуществлять в той последовательности, в которой они приведены.

ГЛАВА 1

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Классификация событий

Ключевые слова: случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, объединение событий, пересечение событий, несовместные события.

Теория вероятностей − математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Предметом теории вероятностей является модель экспериментов со случайными исходами (случайных экспериментов). При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять при неизменном комплексе условий произвольное число раз. Под неизменным комплексом условий понимается постоянство значений всех факторов, контролируемых в данном испытании. Но при этом, как правило, имеет место большое число неконтролируемых факторов, которые трудно или невозможно учесть. Значения неконтролируемых факторов могут быть различными при каждом повторении испытания, поэтому результаты испытания оказываются случайными.

Случайным событием (или просто: *событием*) называется любой исход эксперимента, который может произойти или не произойти.

События, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, ..$ и т.д.

Классические примеры случайных событий – выпадение герба при бросании монеты, извлечение туза из колоды карт, выпадение шестерки при бросании кости и т.д. Другие примеры – поступление выпускника средней школы в вуз, удовлетворенность работника, выбираемого наугад из некоторого коллектива, своей специальностью и т. п.

Событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания, называется *достоверным* и обозначается Ω.

Если при данном комплексе условий некоторое событие заведомо не может произойти, оно называется *невозможным* и обозначается $\varnothing$.

События бывают составными и элементарными. Элементарные события нельзя разложить на более простые, а составные можно разложить на элементарные. Например, составное событие A = {при бросании кости выпадет не более двух очков} можно разложить на два элементарных:
ω_1 = {выпадет одно очко} и ω_2 = {выпадет два очка}.

Таким образом, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Диаграммы Эйлера−Венна дают геометрическую интерпретацию событий и действий над ними: достоверное событие Ω изображается в виде прямоугольника, случайное событие − областью внутри него, элементарные события − точками (рис. 1-5).

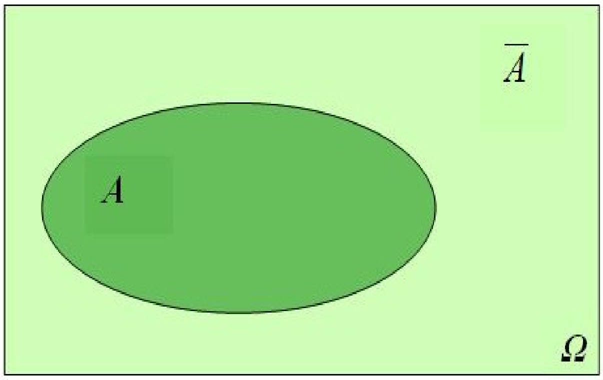


Рис. 1

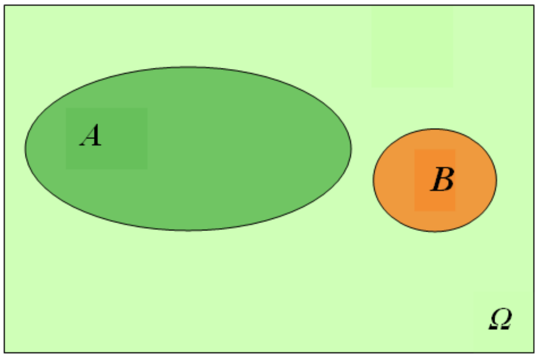


Рис. 2

Противоположным к A событием ($\overline{A}$) называется событие, состоящее в непоявлении события A (рис. 1).

Объединение событий A и B ($A \cup B$) представляет собой сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A и B (рис. 3).

Пересечением событий A и B (AB или $A \cap B$) называется их совместное появление (рис. 4, с. 9).

Несовместными называются события, которые в результате данного испытания не могут произойти вместе (рис. 2).

Разностью событий $A \backslash B$ называется событие, состоящее в том, что происходит событие A, но не происходит событие B (темно-зеленая область на рис. 5, с. 9).

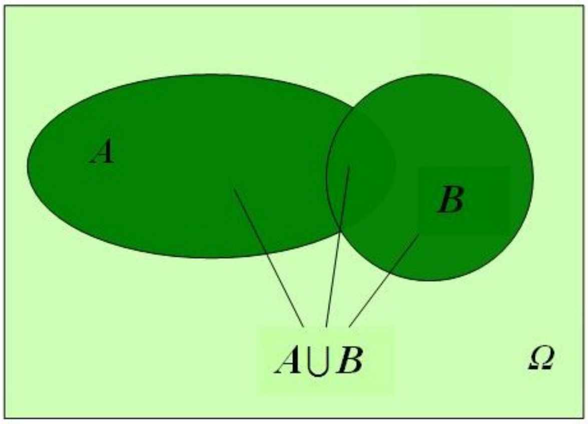


Рис. 3

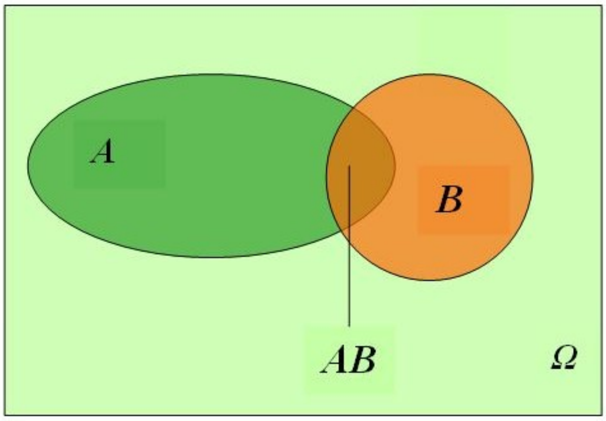


Рис. 4

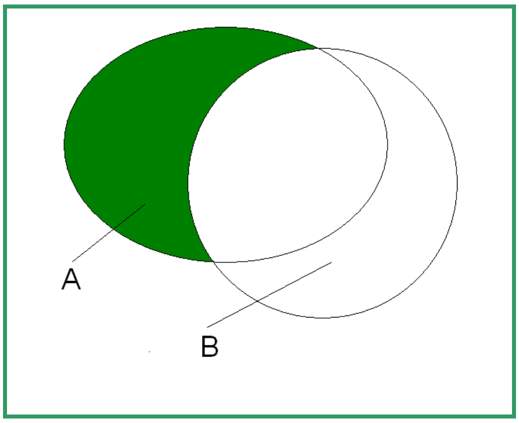


Рис. 5

Примеры решения задач

▶ **Пример 1.** Бросается игральная кость. Описать следующие события:

а) выпадет не менее пяти очков; б) выпадет четное число очков. Опишите операции между событиями.

Решение. Обозначим через ω_1 = {выпадет одно очко},

ω_2 = {выпадет два очка}, …,

ω_6 = {выпадет шесть очков}

Тогда достоверное событие имеет вид $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$.

A = {выпадет не менее пяти очков} = $\{\omega_5, \omega_6\}$,

B = {выпадет четное число очков} = $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$,

$\overline{A}$ = {выпадет менее 5 очков} = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$,

$A \cup B$ = {выпадет не менее пяти очков или выпадет четное число очков} =$\{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$,

AB = {выпадет четное и не меньше 5 число очков} = $\{\omega_6\}$.

$A \backslash B$ = {выпадет нечетное и не меньше 5 число очков} = $\{\omega_5\}$.
На рис. 6 с помощью диаграммы Эйлера–Венна изображены рассматриваемые события.

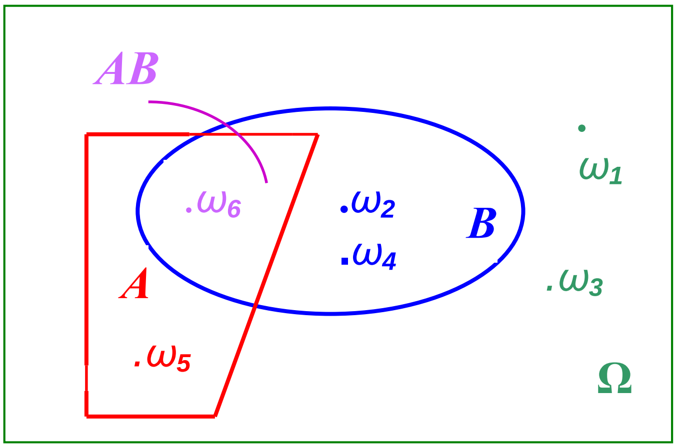


Рис. 6 ■

▶ **Пример 2.** На празднике проводилась шуточная беспроигрышная лотерея. Лотерейные билеты представляли собой карточки с числами от 1 до 30. Описать следующие события:
а) номером билета является число, кратное 3; б) номером билета является число, кратное 5; в) номером билета является число, больше 24. Опишите операции между событиями.
Решение. Достоверное событие имеет вид $\Omega = \{1, 2, \ldots 30\}$.
A = {номером билета является число, кратное 3} = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30},
B = {номером билета является число, кратное 5} = {5, 10, 15, 20, 25, 30},
C = {номером билета является число, больше 24} = {25, 26, 27, 28, 29, 30},
$\overline{C}$ ={номером билета является число, которое меньше 25} = {1, 2, … 24}.
$A \cup B$ = {номером билета является число, кратное 3 или 5} ={3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30},
AB = {номером билета является число, кратное одновременно 3 и 5} = ={15, 30}.
$A \backslash B$ = {номером билета является число, которое кратно 3 и не кратно 5} = {3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27}.
$(A \cup B) \backslash C$ = {номером билета является число, кратное 3 или 5 и не больше 24} ={3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24}. ■

1.1. Классическое определение вероятности

Ключевые слова: элементарные исходы, вероятность, классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности разработано для простых моделей, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) число исходов конечно ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$),

2) все исходы несовместны и равновозможны:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_N) = \frac{1}{N(\Omega)}.$$

Тогда вероятность определяется по формуле

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

где $N(A)$ − число элементарных исходов, благоприятствующих событию A,

$N(\Omega)$ − общее число элементарных исходов.

Эту формулу можно охарактеризовать как отношение «желаемого к возможному».

Свойства вероятности.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $$P(\Omega) = 1.$$
3. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $$P(\varnothing) = 1.$$

Примеры решения задач

▶ **Пример 1.** Правильная монета подбрасывается 2 раза. Найти вероятность того, что монеты выпали на разные стороны.

Решение. Будем считать, что при бросании монеты у нас возможны только 2 исхода: ω_1 = Г (выпадет герб) и ω_2 = Р (выпадет решка). Варианты типа «монета упала на ребро или закатилась под стол» мы учитывать не будем. Тогда достоверное событие содержит четыре события:

Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР} и $N(\Omega) = 4$,

A = {выпали разные стороны} = {ГР, РГ} и $N(A) = 2$.

Согласно классическому определению вероятности,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) выпало четное число очков на обеих костях; б) сумма числа очков на выпавших гранях равна 6; в) выпали одинаковые грани.

Решение. На «первой» игральной кости может выпасть любое число очков 1, 2, 3, 4, 5, 6. То же самое и на «второй» игральной кости. Следовательно, если мы бросаем две игральные кости, то результат мы можем представить в виде пары чисел (x, y), где x и y могут принимать любые целые значения от 1 до 6.

Тогда

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\} \text{ и } N(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36.$$

а) A={выпало четное число очков}. Следуя приведенным выше рассуждениям, событие A будет состоять из пар чисел, принимающих значения 2, 4, 6, т.е.

$$A = \left\{\begin{matrix} (2,2) & (2,4) & (2,6) \\ (4,2) & (4,4) & (4,6) \\ (6,2) & (6,4) & (6,6) \end{matrix}\right\}.$$

Число «благоприятных» для события A исходов равно $N(A) = 3 \cdot 3 = 9$.

Искомая вероятность равна $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

б) B = {сумма числа очков равна 6}. Существует только пять возможностей, при которых может произойти событие B = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}.

Следовательно, $N(B) = 5$ и $\mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{N}(B)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \dfrac{5}{36}$.

в) C = {выпали одинаковые грани} = {(1,1), (2,2), …, (6,6)},

$$N\,(C) = 6 \;\text{ и }\; \mathrm{P}(C) = \frac{\mathrm{N}(\tilde{N})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$ ■

1.2. Элементы комбинаторики

Ключевые слова: правило суммы, правило произведения, число способов выбора, число перестановок, число размещений, число сочетаний.

При решении задач нас часто будет интересовать количество способов, которыми может осуществиться некоторое событие, или число способов, которыми можно упорядочить некоторое множество объектов. Например, сколькими способами можно усадить 7 человек за круглый стол? Сколько существует вариантов составления графика дежурств для 5 врачей? Если комиссии предстоит проверить 6 объектов, то сколько различных маршрутов можно составить? Подобными вопросами занимается специальный раздел математики − комбинаторика.

Рассмотрим два основных правила комбинаторики, на которых базируются все остальные формулы: правило суммы и правило произведения.

Правило суммы. Пусть множество A_1 содержит n_1 объектов, множество A_2 содержит n_2 объектов, …, множество A_m содержит n_m объектов. Тогда число способов выбора одного объекта из множеств A_1 или A_2 … или A_m равно сумме $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Правило произведения. Пусть множество A_1 содержит n_1 объектов, множество A_2 содержит n_2 объектов, …, множество A_m содержит n_m объектов. Тогда число способов выбора одного объекта от каждого множества A_1, A_2, A_3 … A_m равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Примеры решения задач

▶ **Пример 1.** В библиотеке имеются учебник Гнеденко «Курс теории вероятностей» в количестве 30 штук (издание 2006 г.), 45 штук (издание 2003 г.), 20 штук (издание 2001 г.). Сколько существует вариантов выбора книги?

Решение. Обозначим множество A_1={книги издания 2006 г.} и n_1=30,

A_2 = {издание 2003 г.} и $n_2 = 45$,

A_3 = {издание 2001 г.} и $n_3 = 20$.

Тогда по правилу суммы число вариантов выбора одного учебника равно

$n_1 + n_2 + n_3 = 30 + 45 + 20 = 95.$ ■

▶ **Пример 2** (продолжение Задачи 2 §1.1).

Общее число исходов $N(\Omega)$ можно было подсчитать, используя правило произведения. Каждая игральная кость имеет 6 граней, следовательно, число исходов для первой игральной кости равно $n_1 = 6$, а для второй − $n_2 = 6$. Тогда $N(\Omega) = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 6 = 36$.

Аналогично определяется и число исходов события A. Игральная кость содержит 3 четных числа (2, 4, 6). Обозначим множество

A_1= {четное число очков, выпавшее на первой игральной кости} и m_1=3,

A_2= {четное число очков, выпавшее на второй игральной кости} и $m_2 = 3$.

Следовательно, $N(A) = m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot 3 = 9$. ■

▶ **Пример 3.** Каждая студенческая группа выбирает по одному представителю в комитет. Сколько существует вариантов состава комитета, если в первой группе учатся 26 студентов, во второй − 24, в третьей − 28 и в четвертой − 25?

Решение. Представитель от первой группы может быть выбран $n_1 = 26$ способами, от второй группы − $n_2 = 24$ способами. Аналогично, число способов выбора от каждой из остальных групп равно $n_3 = 28$, $n_4 = 25$. Согласно правилу произведения, число способов выбора по одному студенту от каждой группы составляет

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 26 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 25 = 436800.$ ■

Пример 4. Семья Климентьевых на выходные ездит на дачу. Чтобы добраться до дачи, они должны сначала доехать до ж/д вокзала, куда ходят 3 автобуса и один троллейбус. От вокзала до дачи можно добраться на пригородном автобусе или на поезде. Сколько существует вариантов доехать до дачи для семьи Климентьевых?

Решение. Представим решение в виде графа (рис. 1).

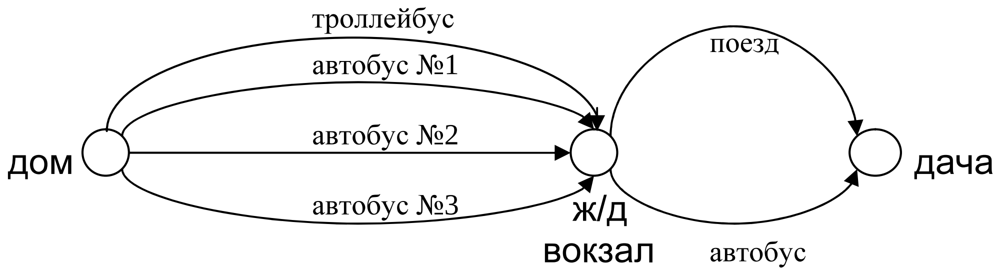


Рис. 1

От дома до дачи семья Климентьевых может доехать 4 способами. Т.е. множество A_1={транспорт до вокзала}= {3 автобуса и один троллейбус} содержит 4 объекта и n_1= 4. Аналогично, A_2 = {транспорт от вокзала до дачи} = {автобус и поезд} содержит 2 объекта, т.е. $n_2 = 2$. Тогда по правилу произведения число вариантов равно $n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 2 = 8$. ■

Перестановка из n объектов есть упорядочение этих объектов, т.е. расположение n объектов в определенном порядке.

Число перестановок из n объектов равно $P_n = n!$. (1)

Факториал − это произведение n натуральных чисел от 1 до n:

$n! = n\,(n-1)(n-2)\,\ldots\,2 \cdot 1$,

(читается: «n факториал»).

Свойства факториала:

$n! = n\,(n-1)!$,

$0! = 1$,

$1! = 1$.

Примеры решения задач

Пример 5. Студенты на каникулах решили съездить в Тверь, Псков, Новгород. Сколько существует вариантов маршрута?

Решение. Способ 1. Решим задачу графически. Представим последовательность посещения городов в виде дерева вариантов (рис. 2, с.17). Получается, у студентов 6 различных маршрутов.

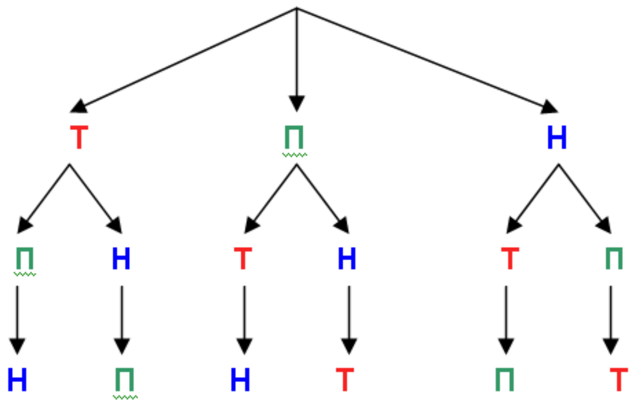


Рис.2

Способ 2. Решим задачу механическим перебором вариантов: {ТПН, ТНП, ПНТ, ПТН, НТП, НПТ}.

Способ 3. В решении по способу 2 мы, фактически, осуществляем перестановки названий городов друг относительно друга. Используем формулу числа перестановок (1): $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. ■

► **Пример 6.** В целях борьбы с коррупцией проверка объектов организована таким образом, что инспектор о «своем» объекте узнает только на утреннем совещании. В отделе работают 6 инспекторов.

1) Сколько существует вариантов назначения инспекторов по объектам, если инспектор может проверить только один объект в день?

2) Начальник считает объекты №2 и №3 сложными, поэтому хочет поручить их проверку наиболее опытным и компетентным сотрудникам − Деминой и Кареву. Сколько существует вариантов назначения инспекторов по объектам?

Решение. 1) Ответ на этот вопрос может быть получен двумя способами.

Способ 1. Поскольку инспектор проверяет в день только 1 объект, то нас, фактически, интересует распределение 6 объектов. В табл.1 приводятся несколько подобных вариантов.

Таблица 1

	Агеев	Демина	Карев	Петров	Рогова	Фомин
Вариант 1	1	2	3	4	5	6
Вариант 2	1	2	3	4	6	5
Вариант 3	1	2	3	5	4	6
И т.д.	…	…	…	…	…	…

Из таблицы 1 видно, что наша задача сводится к определению числа перестановок из 6 объектов: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Способ 2. Рассмотрим порядок назначения инспекторов с точки зрения начальника отдела. Из условия задачи следует, что все объекты одинаковые по сложности и в их распределении нет никаких предпочтений. Тогда первому инспектору (Агееву) можно поручить проверку любого из $n_1 = 6$ объектов, второму инспектору (Деминой) − любой из оставшихся $n_2 = 5$ объектов и т.д. Пятому инспектору (Роговой) остается любой из $n_5 = 2$ объектов. Согласно правилу произведения, число способов назначения 6 инспекторов по 6 объектам будет равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

2) Объекты №2 и №3 уже записаны на Демину и Карева, но никак не конкретизировано, кто какой объект будет инспектировать. Здесь возможно $2! = 2 \cdot 1 = 2$ варианта распределения объектов (Демина − №2 и Карев − №3 или Демина − №3 и Карев − №2). Оставшиеся 4 объекта могут быть распределены $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Следовательно, общее число вариантов равно $2! \cdot 4! = 48$. ■

Размещение из n *объектов по* k есть любой выбор k объектов, взятых в определенном порядке из n объектов.

Число размещений из n объектов k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{2}$$

(читается: «А из n по k).

Примеры решения задач

► **Пример 7.** В спортивном клубе предстоят выборы руководства: президента и двух вице-президентов, курирующих разные направления. Для обсуждения представлены 6 кандидатур. Сколько существует вариантов выбора руководства?

Решение.

Способ 1. Представим кандидатов на должности первыми буквами их фамилий: Б, Г, Д, К, Р, Т. Таблица 2 (с. 19) представляет разные варианты выбора руководства. Рассмотрим пару (БКР) и (БРК). В обоих случаях на должность президента выдвигается кандидат Б, а по поводу 1-го и 2-го вице-президентов мнения не совпадают.

Таблица 2

Президент	1-й вице-президент	2-й вице-президент
Б	К	Р
Б	Р	К
Р	Б	К
Р	К	Б
И т.д.	…	…

Число способов выбора трех человек на разные должности из 6 кандидатур находится по формуле числа размещений (2):

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 120.$$

Способ 2. Если бы избирательная комиссия составляла списки для голосования по 3 фамилии (см. табл. 2), то на пост президента выбирали бы из 6 кандидатур $n_1 = 6$ способами, из оставшихся 5 кандидатур выбирают первого вице-президента $n_2 = 5$ способами, а второго вице-президента − из $n_3 = 4$ фамилий. По правилу произведения число вариантов равно $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. ■

Сочетание из n объектов по k – это любой выбор *k* объектов из *n* безотносительно к порядку выбора.

Число сочетаний из *n* объектов по *k* равно $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, (3)

(читается: «С из n по k).

Число C_n^k называется *биномиальным коэффициентом*.

Примеры решения задач

► **Пример 7** (продолжение). В условиях Примера 7 найдите число вариантов выбора руководства в количестве 3 человек без указания их должностей.

Решение. Так как мы выбираем трех человек в руководство, не уточняя, кто какой пост будет занимать, то варианты (БКР) и (БРК) для нас одинаковые. Так же как и варианты (КБР), (КРБ), (РБК) и (РКБ). Т.е. все 3! = 6 вариантов перестановок из трех фамилий мы будем считать как один вариант руководства. Следовательно, число вариантов выбора трех человек в руководство из 6 кандидатов (без учета порядка их выбора) находим по формуле коэффициента сочетания (3):

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot3!} = 20. \ \blacksquare$$

▶ **Пример 8.** В отделе работают 7 штатных сотрудников и 4 стажера. Для выполнения нового проекта необходимо сформировать группу. Найти вероятность того, что а) новый проект, как очень простой и стандартный, доверят трем стажерам; б) ответственный проект будут выполнять 4 штатных работника; в) с целью передачи опыта в группу проекта, состоящую из 2 работников, включат трех стажеров.

Решение. В условии задачи никак не определены критерии отбора работников в группу проекта. Получается, что все работники отдела (и штатные сотрудники, и стажеры) имеют равные шансы попасть в группу проекта. Поэтому мы можем использовать классическое определение вероятности.

а) Рассмотрим достоверное событие. Поскольку в условии задачи ничего не говорится о распределении обязанностей между участниками проекта, т.е. порядок выбора фамилий для нас не важен, то число способов выбора будет вычисляться с помощью коэффициента сочетаний (5). Нам нужно выбрать 3 человека из общего списка (11 возможных кандидатур). Сделать это можно C_{11}^3 способами, т.е.

$N(\Omega)= C_{11}^3$.

A = {в группу входят только 3 стажера}.

Если бы мы хотели составить группу проекта из стажеров, то мы бы выбирали 3 человека не из общего списка в 11 фамилий, а из 4 фамилий стажеров. Число способов выбора трех человек из четырех равно $N(A) = C_4^3$.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{N}(A)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{\dfrac{4!}{3!(4-3)!}}{\dfrac{11!}{3!(11-3)!}} = \frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{3!\,8!}{11!} = \frac{4!\,8!}{11!}.$$

По определению факториала:

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$,

$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \cdot 9 \cdot 8!$,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot8!}{11\cdot10\cdot9\cdot8!} = \frac{4}{55} = 0{,}024.$$

б) B = {в группу входят 4 штатных сотрудника}.

$N(\Omega)= C_{11}^4$. Существует C_7^4 вариантов выбора из семи штатных сотрудников четырех сотрудников. Искомая вероятность равна

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_7^4}{C_{11}^4} = \frac{\dfrac{7!}{4!(7-4)!}}{\dfrac{11!}{4!(11-4)!}} = \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{4!\,7!}{11!}.$$

Запишем $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!$,

$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$,

и $P(B) = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 7!}{3! \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \dfrac{7}{66} = 0{,}1$.

в) C = {в группу входят 2 штатных сотрудника и 3 стажера}.

В данном случае группа проекта состоит из 5 человек и $N(\Omega)= C_{11}^5$.

Рассмотрим событие С. Выбрать двух штатных сотрудников из семи можно C_7^2 способами, а трех стажеров из четырех − C_4^3 способами. Тогда по правилу произведения событию С благоприятствуют $C_7^2 \cdot C_4^3$ исходов.

$$P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{C_7^2 C_4^3}{C_{11}^5} = \frac{\dfrac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \dfrac{4!}{3!(4-3)!}}{\dfrac{11!}{5!(11-5)!}} = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{5!\,6!}{11!} = 0{,}182.$$ ■

? *Контрольные вопросы*

1. Что называется случайным событием?
2. Приведите пример невозможного события.
3. Приведите пример несовместных событий.
4. При каких условиях применяется классическое определение вероятности?
5. В чем различие между числом размещений и числом сочетаний?
6. Запишите формулу числа размещений через формулу числа сочетаний.
7. Запишите формулу числа сочетаний через формулу числа перестановок.

На рис. 1 (с. 22) изображены основные формулы этого раздела.

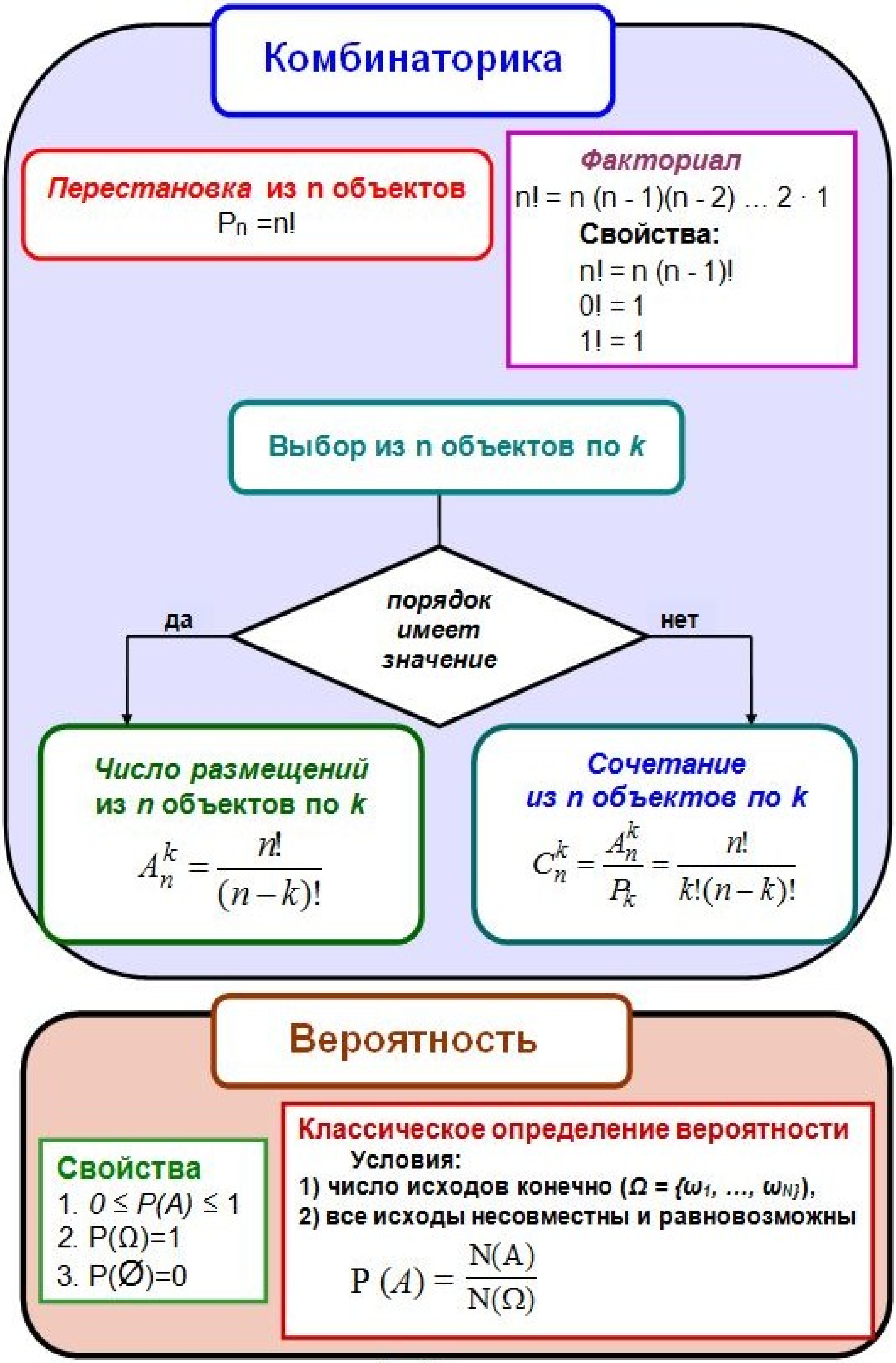

Комбинаторика
Перестановка из n объектов
$P_n = n!$
Факториал
$n! = n\,(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$
Свойства:
$n! = n\,(n-1)!$
$0! = 1$
$1! = 1$
Выбор из n объектов по k
порядок имеет значение
да
нет
Число размещений из n объектов по k
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Сочетание из n объектов по k
$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Вероятность
Свойства
1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(\Omega)=1$
3. $P(\varnothing)=0$
Классическое определение вероятности
Условия:
1) число исходов конечно ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$),
2) все исходы несовместны и равновозможны
$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

Рис.1.

Задачи к § 1

Задачи элементарного уровня

Бросается игральная кость. В заданиях 1, 2 определите, какие из множеств являются пространством элементарных исходов.

1. а) A = {выпадет четное число очков, 1, 5}

б) A = {выпадет менее 4 очков, 6 }

в) A = {выпадет не менее 4 очков, 5, 6 }

2. а) A = {выпадет четное число очков, нечетное число очков}

б) A = {выпадет число очков, кратное 3 или 2 }

в) A = {выпадет не менее 3 очков, 1}

Монета **б**росается 5 раз. В заданиях 3, 4 укажите несовместные события.

3. а) A_1 = {герб выпадет хотя бы один раз} и A_2={решка выпадет более трех раз}

б) A_1 = {в более половины случаев выпадет герб} и A_2={решка выпадет менее трех раз}

4. а) A_1 = {герб выпадет 2 или 3 раза} и A_2={решка выпадет более трех раз}

б) A_1 = {не менее 4 раз выпадет герб} и A_2={решка выпадет не менее трех раз}

5. Событие А + В означает:

а) произойдут оба события;

б) произойдет хотя бы одно событие.

6. Какое из событий является событием А + В, если A = {2,3,5} и B = {2,4,6}?

а) C = {2};

б) C = {2,3,4,5,6};

в) C = {3,5}.

7. Какое из событий является событием А · В, если A = {1,3,5} и B = {2,3,4}?

а) C = {3,5};

б) C = {2,4};

в) C = {3}.

8. Укажите противоположные события:

а) сегодня ясная погода;

б) вся группа получила положительные оценки на экзамене по теории вероятностей;

в) все девушки нашей группы живут в общежитии.

Задачи базового уровня

9. Бросаются 2 монеты. Какое из событий является более вероятным: A = {монеты выпадут одинаковыми сторонами},

B = {монеты выпадут разными сторонами}.

10. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность: а) на одной из костей выпадет четыре очка; б) выпавшее число очков будет кратно 2; в) сумма числа очков на выпавших гранях равна 7.

11. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Какова вероятность того, что при извлечении двух карточек: а) сумма цифр будет четной; б) произведение цифр будет четным?

12. В аудитории 25 мест. Сколькими способами можно рассадить на них 4 студентов?

13. Как велика вероятность того, что случайно выбранное кем-то двузначное число кратно 5?

14. Из множества слов {поп, лоб, лось, авось, лента} выбрано наугад одно слово. Пусть A, B, C означают высказывания:

A = {это слово имеет две гласные},

B = {первой буквой этого слова является буква «л»},

C = {это слово рифмуется со словом «рента»}.

Найдите вероятность следующих высказываний: а) A; б) B; в) C; г) AB; д) BC; е) $\overline{A}B$; ж) $\overline{A}$; з) $\overline{B}$.

15. В группе, состоящей из 16 мужчин и 8 женщин, был проведен опрос. Для опроса случайным образом выбрали 4 человека. Какова вероятность того, что: а) все опрошенные были женщины; б) все опрошенные были мужчины; в) среди опрошенных было двое мужчин и две женщины?

16. На столе лежат в произвольном порядке 32 экзаменационных билета. Чему равна вероятность того, что номер взятого наугад билета будет числом, кратным 3 или 7?

17. Для повышения эффективности работы коллектива (9 человек) психолог предложил организовать работников по триадам. 1) Сколько различных триад может быть составлено? 2) Сколько различных триад может быть составлено, если при составлении триад учитывается следующее обстоятельство. Весьма компетентный работник Петров конфликтует со всеми сотрудниками, кроме Иванова (его друга).

18. Руководство компании решило реорганизовать аналитический отдел ввиду низкой эффективности работы его прежнего состава. Новый аналитический отдел предполагается сформировать из специалистов прежнего состава (8 кандидатур) и специалистов из филиала (пять кандидатур). Общее количество вакансий − 4.

Найти вероятность того, что в обновленном аналитическом отделе будут работать: а) только специалисты филиала; б) только специалисты прежнего состава; в) одинаковые количества специалистов прежнего состава и работников филиала.

19. Один раз в месяц все 6 менеджеров, работающих в главном офисе, «идут в народ», т.е. трудятся на рабочих должностях в подведомственных им супермаркетах весь день. Такая практика способствует своевременному выявлению недостатков, а также определению потенциальных возможностей в организации работы. Место работы определяется с помощью жеребьевки. Сколько существует вариантов распределения менеджеров по супермаркетам, если фирма владеет 10 магазинами?

20. Комитет состоит из 12 членов. Минимальный кворум на заседаниях этого комитета должен насчитывать 8 членов.
а) Сколькими способами может достигаться минимальный форум?
б) Сколькими способами достигается какой-нибудь кворум?

21. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь несократима.

22. Из десяти изделий, произведенных мастером, 6 изделий являются изделиями высшего сорта. У его ученика показатель вдвое ниже − только в 3 изделиях из 10. Каковы шансы выбрать случайным образом 4 качественных изделия из ящика мастера, если в ящике находятся 20 изделий? Как изменяться наши шансы, если мастер и ученик свою продукцию (каждый по 10 изделий) складывали в один ящик?

23. Бросается n игральных костей. Найти вероятности получить сумму очков, равную а) n; б) $n + 1$.

24. В библиотеке имеется 15 задачников по теории вероятностей нового издания и 10 старого. Какова вероятность того, что все студенты группы, насчитывающей 15 человек, получат задачники нового издания.

25. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок нового календаря соответствует первому числу месяца? Год считать не високосным.

26. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 арбузов − спелые. Покупатель выбирает 2 арбуза. Найти вероятность, что оба арбуза спелые.

27. Найти вероятность того, что абонент наберет правильно четырехзначный номер, если он знает, что данный номер делится на 5.

28. Имеется 5 билетов стоимостью по 1 р., три билета по 3 р. и два – по 5 р. Наугад берутся два билета одновременно. Определить вероятность того, что эти билеты имеют одинаковую стоимость.

29. В магазин поступило 30 цветных телевизоров новой модели, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу выбирается два телевизора для проверки. Какова вероятность, что они не имеют скрытых дефектов?

30. Цех №2 считается лучшим по качеству работы: брак в его продукции в среднем составляет 2 детали на 100. Найти вероятность, что из 5 случайно выбранных деталей качественными будут а) все детали; б) хотя бы 4 детали.

31. Для обслуживания рейса самолета требуются три стюардессы, которых выбирают по жребию из 20 девушек, претендующих на эти места; 7 из них − блондинки, остальные − брюнетки. Найти вероятность того, что среди выбранных трех стюардесс одна блондинка и две брюнетки.

32. У туристов было две банки с мясом, две банки с овощами, две банки с фруктами. Во время дождя надписи на банках были смыты. Туристам нужно открыть три банки. Какова вероятность, что все три банки будут отличаться содержимым?

33. Для получения зачета по предмету каждый студент группы должен написать реферат. Тему реферата студент выбирает из предложенного списка (30 названий) по своему усмотрению. В группе учатся 15 студентов. Сколько существует различных вариантов распределения тем среди студентов, если а) темы рефератов не должны совпадать; б) допускается совпадение тем рефератов.

Задачи среднего уровня

34. В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если водительские права имеют только трое из них?

35. В семье Климентьевых любят варенье. К весне осталось варенье только в литровых банках. Младший сын Виталий хорошо запомнил, что в кладовке есть 3 банки малинового варенья, 2 банки − смородинового и 6 банок яблочного. Но, к сожалению, лампочка в кладовке перегорела, и Виталию пришлось выбирать банку в темноте. Виталий любит малиновое варенье, поэтому он решил повысить свои шансы и взять из кладовки две банки. а) Какова вероятность того, что одна из банок будет с малиновым вареньем.

б) Какова вероятность того, что Виталий выбрал две банки с разным вареньем.

в) Насколько эффективна стратегия Виталия, когда он достает две банки вместо одной. Во сколько раз увеличивается вероятность выбрать таким образом малиновое варенье.

36. Из двадцати человек, которые должны сдавать экзамены, 10 должны явиться в 10 часам утра, остальные − к 11 часам. Если 7 студентов определенно хотят быть в первой группе, 5 − во второй, а две подружки не возражают быть в любой из групп, но только обязательно вместе, то сколькими способами староста может распределить студентов по группам?

37. Цветочница продает розы четырех сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

38. В студенческой столовой на обед предлагаются: 3 салата, 2 первых блюда, 4 вторых, в том числе котлеты и рыба, 3 напитка, в том числе томатный сок. Сколькими способами студент может составить обед из четырех блюд: салат, первое, второе, напиток, если котлет он опасается, а рыбу запивает только томатным соком?

39. В один из комитетов парламента нужно отобрать трех членов, причем выбрать нужно из пяти консерваторов, трех лейбористов и четырех либерал-демократов. Сколько различных комитетов можно составить? Тот же вопрос, если в комитет должен входить по крайней мере один либерал-демократ? Если лейбористы и консерваторы не могут одновременно входить в комитет? Если в комитет должен войти по крайней мере один консерватор и хотя бы один лейборист?

40. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколько есть способов заказать 4 пирожных? Сколько среди них есть способов заказать пирожное одного вида? Разных видов? По 2 пирожных разных видов?

41. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу одинаковых кубиков. Найти вероятность того, что взятый наудачу кубик будет иметь: а) три окрашенные грани; б) две окрашенные грани; в) одну окрашенную грань.

Задачи повышенной сложности

42. Доказать равенство Паскаля: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, $0 < k < n$.

43. Доказать равенство: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

44. У кассы кинотеатра стоят в очереди $2n$ человек. Среди них n человек имеют деньги только 100-рублевого достоинства, а остальные − 50-рублевого. Билет стоит 50 рублей. Каждый покупатель берет по одному билету. В начальный момент в кассе нет денег. Найти вероятность того, что ни один покупатель не будет ждать сдачу.

45. Каждая из n палок ломается на две части − длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков объединяется в n пар. Найти вероятность того, что а) в каждой паре обломки одной палки; б) в каждой паре есть короткий и длинный обломки.

46. На автомобильной стоянке 12 мест расположены в один ряд. На стоянке находятся 8 автомашин, 4 свободных места примыкают друг к другу. Является ли такое расположение свободных мест указанием на отсутствие случайности?

Творческие задачи

47. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее.
Задача. В отделе реализации продукции работают 8 человек. Сколько существует вариантов распределения трех премий?
Тема: число размещений.

48. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее.
Задача. Из 30 телевизоров, поступивших в торговый центр, 5 телевизоров имеют скрытые дефекты. Чему равна вероятность того, что купленный телевизор окажется качественным?
Тема: классическое определение вероятности, число сочетаний

49. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные: из 12 проверяемых ревизором договоров семь оформлены неправильно.
Тема: классическое определение вероятности, число сочетаний.

50. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные: в группе 10 студентов живут в общежитии, 15 – местные, 5 – у родственников.
Тема: комбинаторика.

51. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные: имеются 10 холодильников марки А, 15 холодильников марки В и 4 холодильника марки С.
Тема: комбинаторика и классическое определение вероятности..

52. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее.

Задача. На столе лежат в произвольном порядке 32 экзаменационных билета. Чему равна вероятность того, что номер взятого наугад билета будет числом, кратным 3 или 7?
Тема: число размещений.

2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Ключевые слова: теорема сложения вероятностей, условная вероятность, теорема умножения вероятностей, независимость событий.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного из двух событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1)$$

Для несовместных событий $P(AB) = 0$ и $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность суммы (объединения) n несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (2)$$

Если требуется найти вероятность события A в предположении, что произошло некоторое другое событие В, то такую ситуацию характеризуют с помощью *условной вероятности* $P(A|B)$ (другой вариант обозначения: $P_B(A)$).

Условная вероятность равна отношению вероятности произведения событий A и B к вероятности события B ($P(B) > 0$):

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (3)$$

Эту формулу можно записать в виде *теоремы умножения вероятностей*: $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Теорема умножения для произвольного числа событий записывается следующим образом:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \qquad (4)$$

Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности другого: $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \qquad (5)$$

т.е. вероятность совместного появления событий A и B равна произведению вероятностей этих событий.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n).$$

На рис. 1, 2 (с. 31, 32) изображены основные формулы этого раздела.

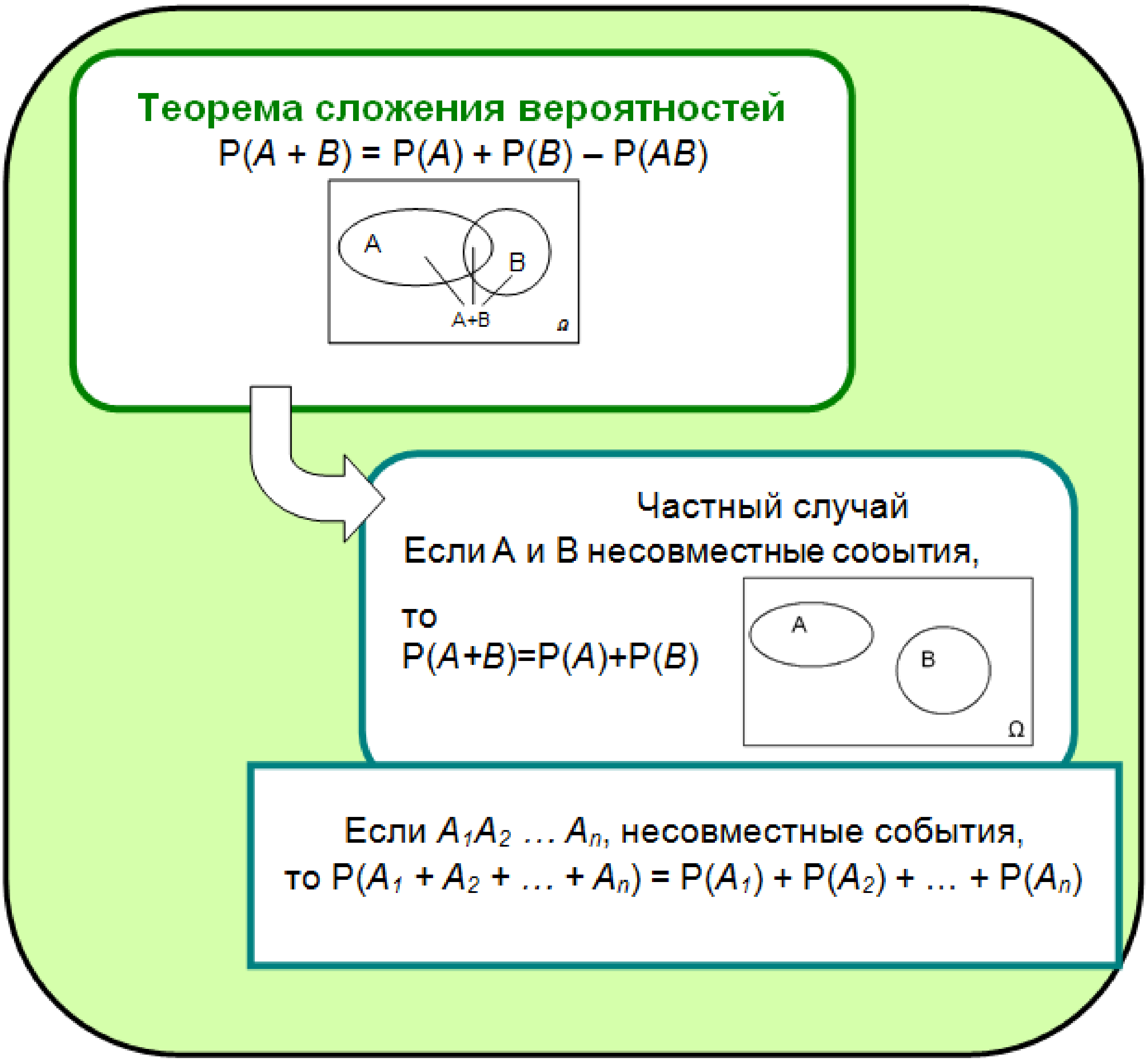


Рис. 1

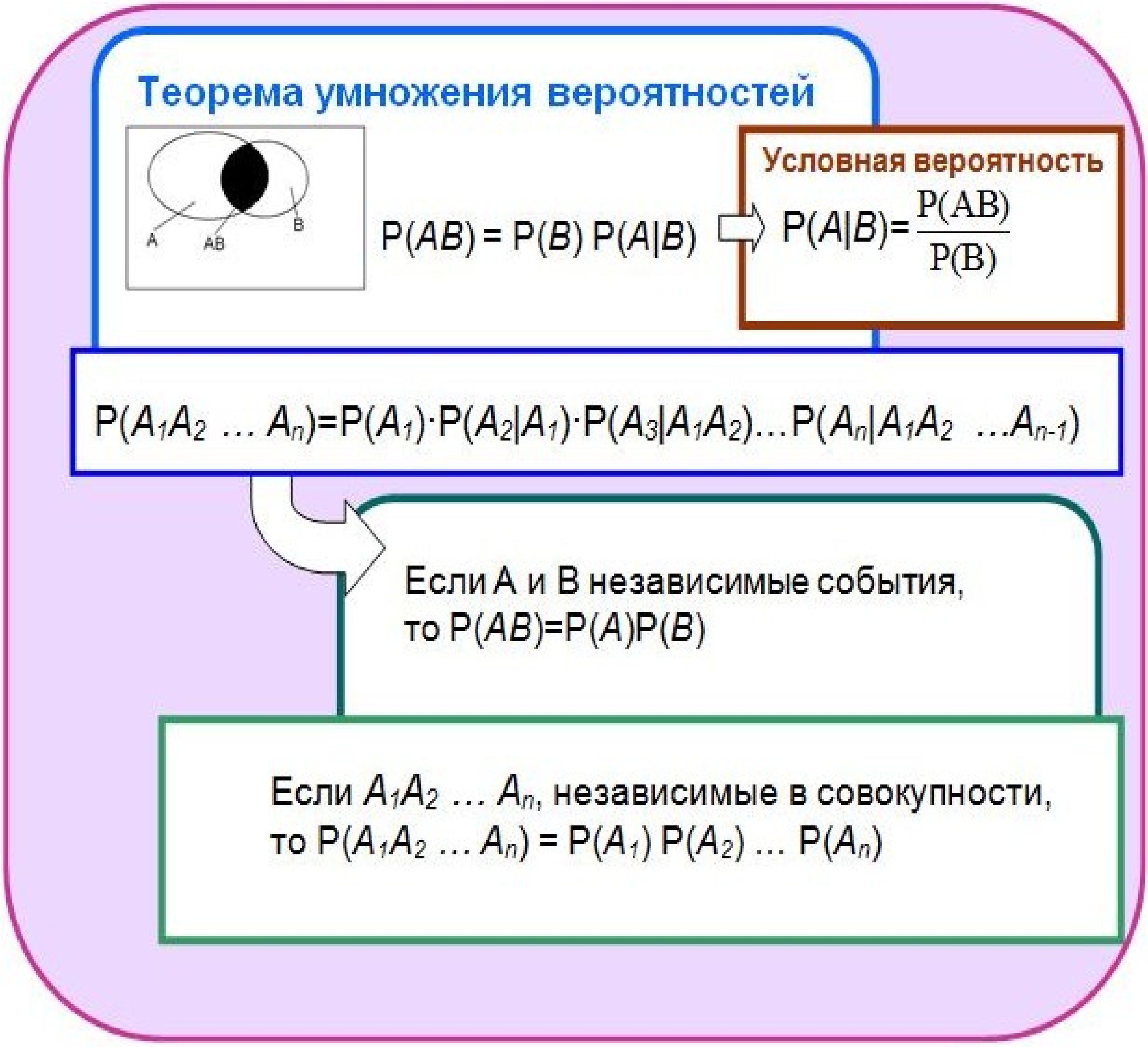

Теорема умножения вероятностей
A
AB
B
$P(AB) = P(B)\,P(A|B)$
Условная вероятность
$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$
$P(A_1A_2\ \ldots\ A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ \ldots A_{n-1})$
Если А и В независимые события,
то $P(AB)=P(A)P(B)$
Если $A_1A_2\ \ldots\ A_n$, независимые в совокупности,
то $P(A_1A_2\ \ldots\ A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\ \ldots\ P(A_n)$

Рис.2

Примеры решения задач

▶ **Пример 1**. Бросается игральная кость.

Найти вероятность того, что а) выпадет два очка; б) выпадет два очка, если известно, что выпало не более четырех очков.

Решение. На рис. 3 изображены рассматриваемые события.

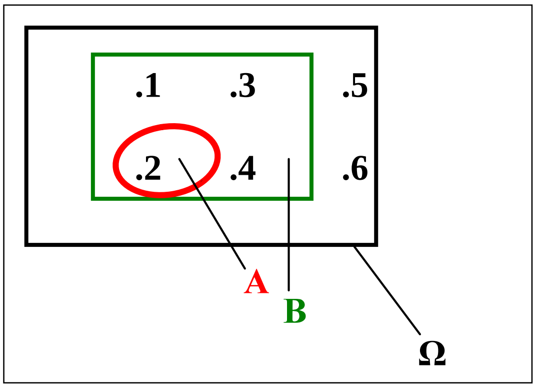


Рис. 3

Используем формулу классического определения вероятности.

N(Ω) = 6.

а) Найдем безусловную вероятность события A.

A = {выпадут два очка}={2}, $N(A) = 1$, $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

б) Найдем условную вероятность события A.

B = {выпадет не более 4 очков}={1, 2, 3, 4}, $N(B) = 4$ и $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{6}$.

AB = {выпадут два очка} = A, $P(AB) = P(A) = \dfrac{1}{6}$.

Искомая вероятность равна: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Безусловная вероятность события A равна 1/6, а условная вероятность − 1/4. Использование дополнительной информации (событие B) в нашем примере привело к тому, что вероятность события A изменилась в сторону увеличения по сравнению с безусловной вероятностью. ■

▶ **Пример 2.** Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков, если каждому стрелку дается по одному выстрелу.

Решение. Введем обозначение событий:

B_1 = {первый стрелок попал в цель},

B_2 = {второй стрелок попал в цель},

A = {в мишень попал хотя бы один из стрелков}.

$P(B_1) = 0{,}7$, $P(B_2) = 0{,}6$.

Эта задача может быть решена несколькими способами.

Способ 1. Событие «попал хотя бы 1 стрелок» включает в себя три возможных события:

$H_1 = B_1\overline{B}_2$ – первый стрелок попал, и одновременно второй – не попал.

$H_2 = \overline{B}_1B_2$ – первый стрелок не попал, и одновременно второй – попал.

$H_3 = B_1B_2$ – оба стрелка попали.

События H_1, H_2, H_3 являются несовместными (произойдет или событие H_1, или событие H_2, или событие H_3). В результате события A может произойти только одно из этих событий, поэтому мы можем использовать формулу (2):

$P(A) = P(H_1$ или H_2 или $H_3) = P(H_1 + H_2 + H_3) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = P(B_1\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1B_2) + P(B_1B_2)$.

Стрелки стреляют независимо друг от друга, следовательно, события B_1 и B_2, B_1 и $\overline{B}_2$, $\overline{B}_1$ и B_2 – независимы. Тогда по формуле (5):

$P(B_1\overline{B}_2) = P(B_1)P(\overline{B}_2) = 0{,}7 \cdot (1 – 0{,}6) = 0{,}28$,

$P(\overline{B}_1B_2) = P(\overline{B}_1)P(B_2) = (1 – 0{,}7) \cdot 0{,}6 = 0{,}18$,

$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$,

$P(A) = 0{,}28 + 0{,}18 + 0{,}42 = 0{,}88$.

Способ 2. Найдем вероятность события A через противоположное событие: $P(A) = 1 – P(\overline{A})$.

$\overline{A}$ = {никто не попал} и $\overline{A} = \overline{B}_1\overline{B}_2$.

Тогда $P(A) = 1 – P(\overline{B}_1\overline{B}_2) = 1 – P(\overline{B}_1)\,P(\overline{B}_2) = 1 – (1 – 0{,}7)(1 – 0{,}6) = 0{,}88$.

Способ 3. Событие A: «попал хотя бы один из стрелков» означает, что в мишень попал или первый стрелок, или второй стрелок, или оба стрелка, т.е. $A = B_1 + B_2$.

По формуле (1) сложения вероятностей получаем:

$P(A) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) – P(B_1B_2) = 0{,}7 + 0{,}6 – 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88$.

■

Пример 3. Слово «МАТЕМАТИКА» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами тщательно перемешиваются и из них извлекаются по очереди и раскладываются в ряд какие-то четыре карточки.

Какова вероятность получить таким путем слово «КАМА»?

Решение. Если бы мы хотели получить слово «КАМА», то первая буква, которую надо выбрать – это буква «К», вторая буква – «А» и т.д.

Введем обозначение событий:

A = {первой извлекается буква «К»},

B = {второй извлекается буква «А»},

C = {третьей извлекается буква «М»},

$Д$ = {четвертой извлекается буква «А»}.

Для получения слова «КАМА» события A, B, C, $Д$ должны произойти совместно.

P (получить слово «КАМА») = P(A и B и C и $Д$) = P($ABCД$).

События A, B, C, $Д$ зависимые, поэтому используем формулу (4):

$P(ABCД) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|AB)\,P(Д|ABC)$.

Вероятности событий находятся по формуле классического определения вероятности. Тогда, $P(A) = \frac{1}{10}$. После того как мы извлечем первую букву (букву «К»), у нас останется 9 букв, среди которых 3 буквы «А». Поэтому условная вероятность равна $P(B|A) = \frac{3}{9}$. Аналогично, $P(C|AB) = \frac{2}{8}$. Найдем последнюю вероятность $P(Д|ABC)$. После извлечения трех букв у нас останется 7 букв. Изначально было три буквы «А», но одну букву мы уже извлекли, поэтому этих букв осталось две.

Тогда $P(Д|ABC) = \frac{2}{7}$.

Искомая вероятность равна:

$$P(ABCД) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{420} = 0{,}002.$$ ■

? ***Контрольные вопросы***

1. Напишите формулу условной вероятности. Выведите ее из теоремы умножения вероятностей.
2. В каком случае будет справедливо равенство $P(A + B) = P(AB)$?

3. Как соотносятся между собой P($A + B$) и P(A)? Рассмотрите различные случаи.

4. Как соотносятся между собой P(AB) и P(A)? Рассмотрите различные случаи.

5. Изобразите с помощью диаграммы Эйлера−Венна события A и B, удовлетворяющие равенству P($A + B$) = P(AB).

Задачи к § 2

Задачи элементарного уровня

Бросается игральная кость. В задачах 1-3 укажите, какая формула будет использоваться для вычисления вероятности $A + B$.

1. A = {выпадет четное число очков}, B = {выпадет 1 или 3}

а) $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$,

б) $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

2. A = {выпадет не менее 3 очков}, B = {выпадет не более 4 очков}

а) $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$,

б) $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

3. A = {выпадет 2, 3, 4, 5 очков}, B = {выпадет 1, 4, 6 очков}

а) $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$,

б) $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

В урне находятся 2 белых и 5 синих шаров. В задачах 4, 5 определите, какая формула будет использоваться для вычисления указанной вероятности, если A = {из урны достали 1 белый шар},

B = {из урны достали 1 синий шар}.

4. P(AB)

а) $P(AB) = P(B)\ P(A|B)$,

б) $P(AB) = P(A)\ P(B)$.

5. P($A + B$)

а) $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$,

б) $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Задачи базового уровня

6. В некоторой школе 10% учащихся не сдали экзамены по математике, 12% − по физике, 2% «провалили» как математику, так и физику. Наугад выбирается один ученик. Будут ли события {этот ученик не сдал математику} и {этот ученик не сдал физику} независимы?

7. В некотором городе 60% населения имеют автомобиль, 10% − мотоцикл. Гаражи имеют 2/3 владельцев автомобилей, а среди мотоциклистов − только 1/4. Кроме того, 1/10 часть населения, не владеющая автотранспортом, так же имеет гаражи. Пусть A_1, A_2, A_3 − события, состоящие в том, что у человека есть соответственно автомобиль, мотоцикл и нет этих видов транспорта. Пусть B обозначает событие, что у человека есть гараж. Найдите а) $P(A_1)$, $P(A_1B)$, $P(A_1\overline{B})$; б) $P(B)$, $P(\overline{B})$, $P(A_2\overline{B})$. Опишите событие $A_1 \cup A_2 \cup \overline{B}$. Найдите вероятность этого события. В задаче предполагается, что человек владеет только одним видом транспорта.

8. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,7; вторым – 0,6. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй – 3. Определить вероятность того, что цель не поражена.

9. Монету бросают несколько раз либо до выпадения первого герба, либо до четырехкратного выпадения цифры. Если известно, что в первых двух бросаниях выпала цифра, найти вероятности того, что: а) монета была брошена 4 раза; б) монета брошена 3 раза.

10. В группе из ста человек 42 никогда не читали Шекспира, 58 никогда не летали на самолете, 29 читали Шекспира и летали на самолете. Что более вероятно: встретить читавшего Шекспира, но не летавшего на самолете, или летавшего на самолете и читавшего Шекспира?

11. Клиент автосервиса доверяет ремонт своего нового автомобиля только слесарю Петрову, который 80% всех заказов выполняет в срок и качественно. Согласно предварительному осмотру на ремонт потребуется 1-2 дня. Кроме того, вероятность того, что нужную деталь привезут, равна 0,6. Каковы шансы, что машина будет отремонтирована к пятнице, если слесарь Петров очень загружен работой и вероятность того, что он всю ее сделает раньше среды, равна 0,4.

12. Социологу предстоит выяснить, как относятся рыбаки к созданию платных мест для рыбалки. Чему равна вероятность того, что только шестой опрошенный окажется рыбаком, если известно, что любителями рыбной ловли являются 25% россиян (ВЦИОМ, 2011 г.)

Задачи среднего уровня

13. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй вопросы равны по 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) по крайней мере на два вопроса.

14. В ОТК обувной фабрики просматриваются 100 пар обуви, из них 70 пар – фасона «А», а 30 пар - фасона «Б». Определить вероятность того, что первые две просмотренные пары: а) одного фасона; б) разных фасонов.

15. Опрос Исследовательского центра портала SuperJob.ru 12 мая 2009 года показал, что 17% опрошенных узнаёт прогноз погоды по телевизору, 4% − по радио, 70% − в Интернете, 1% − от знакомых, 1% − по народным приметам, 7% − другое (точный прогноз погоды можно узнать только выйдя на улицу или взглянув на термометр, установленный за окном). Самым популярным Интернет-ресурсом, предоставляющим метеопрогнозы, оказался «Яндекс-погода» (39%). Каждый четвёртый респондент (25%) выбирает Gismeteo.ru, а 15% участников исследования – Mail.ru. Сервис «Rambler-погода» предпочитают 7% россиян, а сайт Гидрометцентра (meteoinfo.ru) – 2%. Остальные 12% используют другие Интернет- ресурсы. Найдите вероятность того, что а) случайно выбранный человек узнает метеопрогноз на «Яндекс-погода»; б) два случайно выбранных человека предпочитают традиционные СМИ (телевизор и радио); в) пять случайно выбранных человек используют разные Интернет-ресурсы (из списка самых популярных Интернет-ресурсов, предоставляющим метеопрогнозы).

16. Студент, оценивая свои возможности, пришел к выводу, что он может набрать не менее 8 баллов по первому тесту с вероятностью 0,8, по второму − с вероятностью 0,9 и по третьему − с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что студент хотя бы по одному тесту получит не менее 8 баллов.

17. В одном маленьком городке полиция разыскивает бродягу. Можно считать, что есть 4 шанса из 5, что он находится в одном из восьми баров городка, ни одному из которых он не отдает предпочтения. Двое полицейских посетили 7 баров, но бродягу не обнаружили. Каковы шансы найти его в восьмом баре?

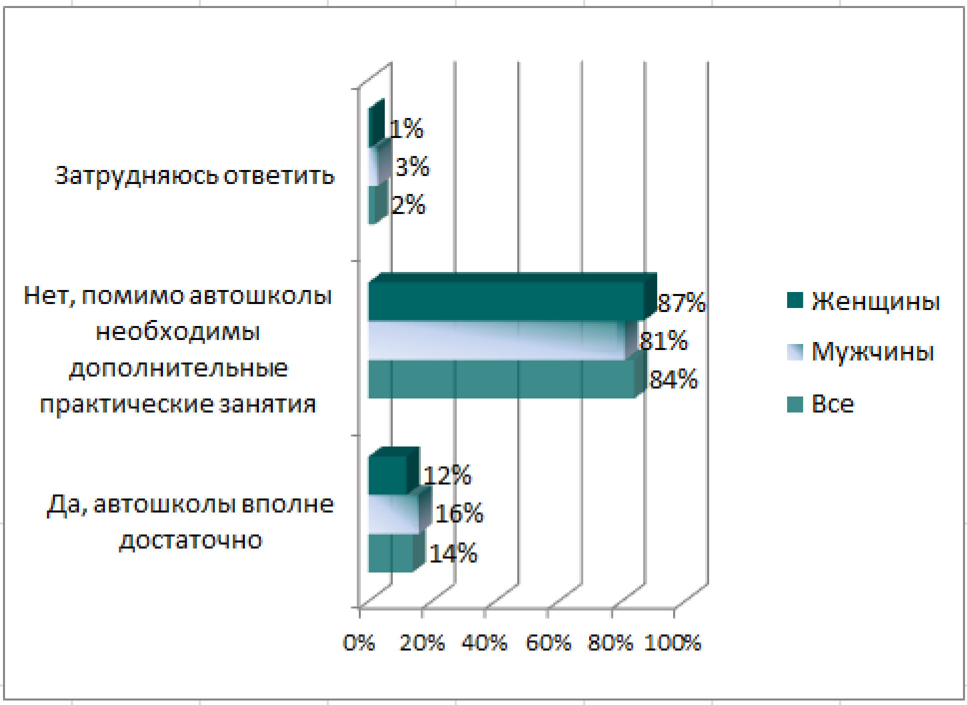
18. Вероятность того, что один студент решит задачу, равна 0,75, а другой студент – 0,50. Какова вероятность того, что задача будет решена, если оба студента будут решать ее независимо друг от друга?

19. Два стрелка по очереди стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Кто получит приз, если у каждого стрелка по 3 попытки? Найти вероятность того, что второй стрелок получит приз только после второй попытки.

20. Продолжение Примера 7, § 1. Семья Климентьевых собирается съездить на дачу. В техсервисе вероятность ремонта их автомобиля определяют, как 50/50 − либо подвезут запчасти, либо нет. Сами члены семьи Климентьевых оценивают шансы на ремонт более реалистично, поэтому они планируют добираться до дачи общественным транспортом. Причем тем транспортом, который подойдет первым, поскольку весь транспорт ходит с одинаковым интервалом. Найти вероятность того, что для поездки на дачу будет задействован а) только электротранспорт; б) только транспорт на бензиновом топливе.

21. Всем целым числам от единицы до n приписаны вероятности, пропорциональные этим числам. Найти эти вероятности.

22. Проведенный в январе 2010 г. Исследовательским центром рекрутингового портала SuperJob.ru опрос на тему «Как Вы считаете, для того чтобы выезжать на дорогу, достаточно ли пройти курс обучения в автошколе?» дал следующие результаты.



Случайным образом было выбрано 4 человека. Найти вероятность того, что половине опрошенных достаточно автошколы, а другая половина опрошенных нуждается в дополнительных практических занятиях. Найти эту же вероятность, если известно, что все опрошенные были а) мужчинами; б) женщинами.

23. На большой улице расположены один за другим 2 светофора. Каждый из них устроен так, что промежуток времени, когда в нем горит зеленый свет, составляет 2/3 всего времени работы светофора. Автомобилист заметил, что когда он, двигаясь с обычной скоростью, проезжает на зеленый свет первого светофора, то в трех случаях из четырех второй светофор его не задерживает. Пусть автомобилист проскочил первый светофор при красном свете. Чему равна вероятность того, что и на втором будет гореть красный свет?

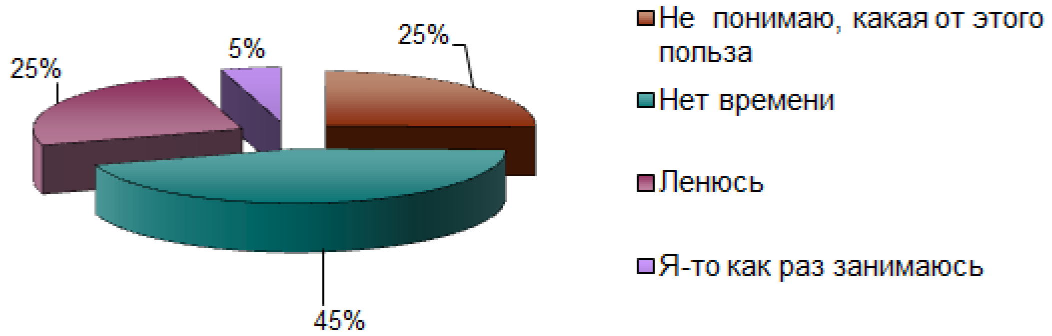
24. Некоторое событие может произойти в любой из дней недели с одинаковыми вероятностями. Рассмотрим для примера всем известное и не столь частое событие – проверку дымоходов в квартирах (или внеплановое отключение горячей воды). Предполагается, что день проверки дымоходов выбирается случайно и закономерности тут нет никакой. Пусть последние 12 проверок приходились либо на вторники, либо на четверги. Согласуется ли этот случай с нашим предположением о том, что событие может равновероятно случиться в любой день недели.

25. В условиях предыдущей задачи проверить вероятность гипотезы о равновероятности осуществления события в любой день недели, если при 12 осуществлениях событие ни разу не произошло в воскресенье.

26. *Задача о конкуренции*. В ванну, где содержатся 3 рыбы А, В и С, время от времени помещают кусочки пищи. Каждый раз, когда бросают кусочек, рыбы конкурируют за него. Допустим, что за длительный период наблюдения было установлено, что А или В добивались успеха в течение 1/2 времени, а А или С в течение 3/4 всего времени наблюдения. а) Какова вероятность того, что добивается успеха рыба А? б) Какая рыба накормлена лучше всех?

27. Студент сдает экзамен до первой удовлетворительной оценки, но не более 3 раз. Вероятность сдать экзамен с первой попытки равна 0,5, со второй попытки (после неудавшейся первой) − 0,7, а с третьей − 0,8. Какова вероятность сдать экзамен? Не сдать экзамен?

28. На интернет-сайтах проводился опрос на тему: «Почему вы не занимаетесь спортом?»:



25,3% - не понимаю, какая от этого польза,

44,9% - нет времени,

25,2% - ленюсь,

4,6% - я-то как раз занимаюсь.

Найти вероятность того, что три случайно выбранных человека а) занимаются спортом; б) не занимаются спортом из-за лени; в) большинство из них не видит в этом пользы; г) не занимаются спортом, причем по разным причинам.

29. Невыход автобуса в рейс может произойти по двум независимым причинам: из-за неисправности автобуса и, что случается значительно реже, из-за неявки водителя на работу. Вероятность неисправности автобуса равна 0,04, а неявки водителя – 0,01. Найти вероятность того, что автобус в рейс не выйдет.

30. Инвестор решил вложить поровну средства в три предприятия при условии возврата ему через определенный срок 150% от вложенной суммы каждым предприятием. Вероятность банкротства каждого из предприятий 0,2. Найти вероятность того, что по истечении срока кредитования инвестор получит обратно по крайней мере вложенную сумму.

31. Имеется электроприбор, который может выходить из строя (перегорать) только в момент включения. Если прибор включался k-1 раз и не перегорел, то условная вероятность того, что он перегорит при k-м включении, равна α_k. Найти вероятность того, что а) прибор выдержит не менее 3 включений; б) прибор выдержит не более n включений; в) прибор перегорит точно при n-м включении.

Задачи повышенной сложности

32. Доказать, что $P(A_1 \cdots A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_k|A_1 \cdots A_{k-1})$.

33. Доказать, что $P(A|B) \geq 1 - P(\overline{A})/P(B)$.

34. Доказать, что если независимы события A и B, то независимы события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

35. Доказать, что если $P(A) = 0{,}9$ и $P(B) = 0{,}8$, то $P(A \mid B) \geq 0{,}875$.

36. После экзамена на столе преподавателя осталось n зачеток тех студентов, которые не сдали экзамен. Какова вероятность того, что, наугад забирая зачетки, хотя бы один студент возьмет свою зачетку?

Творческие задачи

37. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все 3 вопроса.

Решите задачу двумя способами: используя классическое определение вероятности и формулу условной вероятности.

38. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее.
Задача. Выпускник вуза оценивает свои шансы быть принятым на работу в госкомпанию в 0,6, а в частную − 0,5. Найти вероятность того, что выпускник будет принят на работу.
Тема: теорема умножения вероятностей.

39. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. Сбой в работе мобильного телефона в 70% случаев происходит по причине плохой связи, в 25% − из-за технической неисправности телефона, в 5% − из-за вирусов.
Тема: теорема сложения вероятностей.

40. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. Из 20 студентов группы 6 студентов предпочитают почтовые услуги на www.mail.ru, а остальные − www.yandex.ru.
Тема: теорема умножения вероятностей.

3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Ключевые слова: полная группа событий, формула полной вероятности, априорная вероятность, апостериорная вероятность, формула Байеса.

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют *полной группой событий*, если
а) они несовместны: $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j,\ i, j = 1..n$;
б) покрывают все пространство элементарных исходов:

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega.$$

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Вероятность события A можно найти по следующей формуле.

Формула полной вероятности: $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{H}_i)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_i)$.

Поскольку заранее не известно, какое из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ произойдет, то эти события принято называть гипотезами по отношению к событию A. Гипотезы и событие A изображены на рис. 1.

Безусловные вероятности $P(H_i)$ трактуются как *доопытные* (*априорные*) вероятности гипотез. Допустим, событие A осуществилось. Какова *послеопытная (апостериорная)* вероятность осуществления

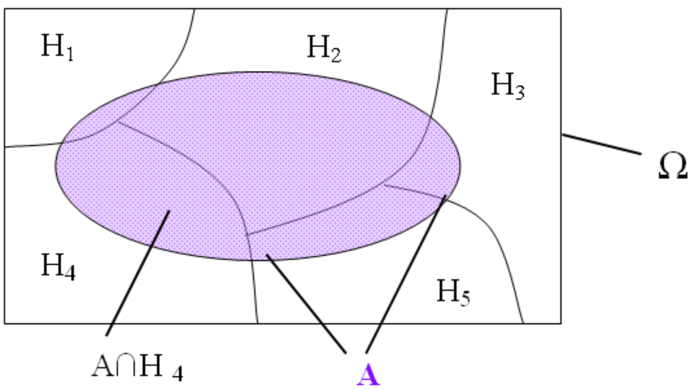


Рис. 1

гипотезы H_i при условии, что событие A имело место? Ответ дает *формула Байеса*:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

где $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$ − формула полной вероятности.

На рис. 2 изображены основные формулы этого раздела.

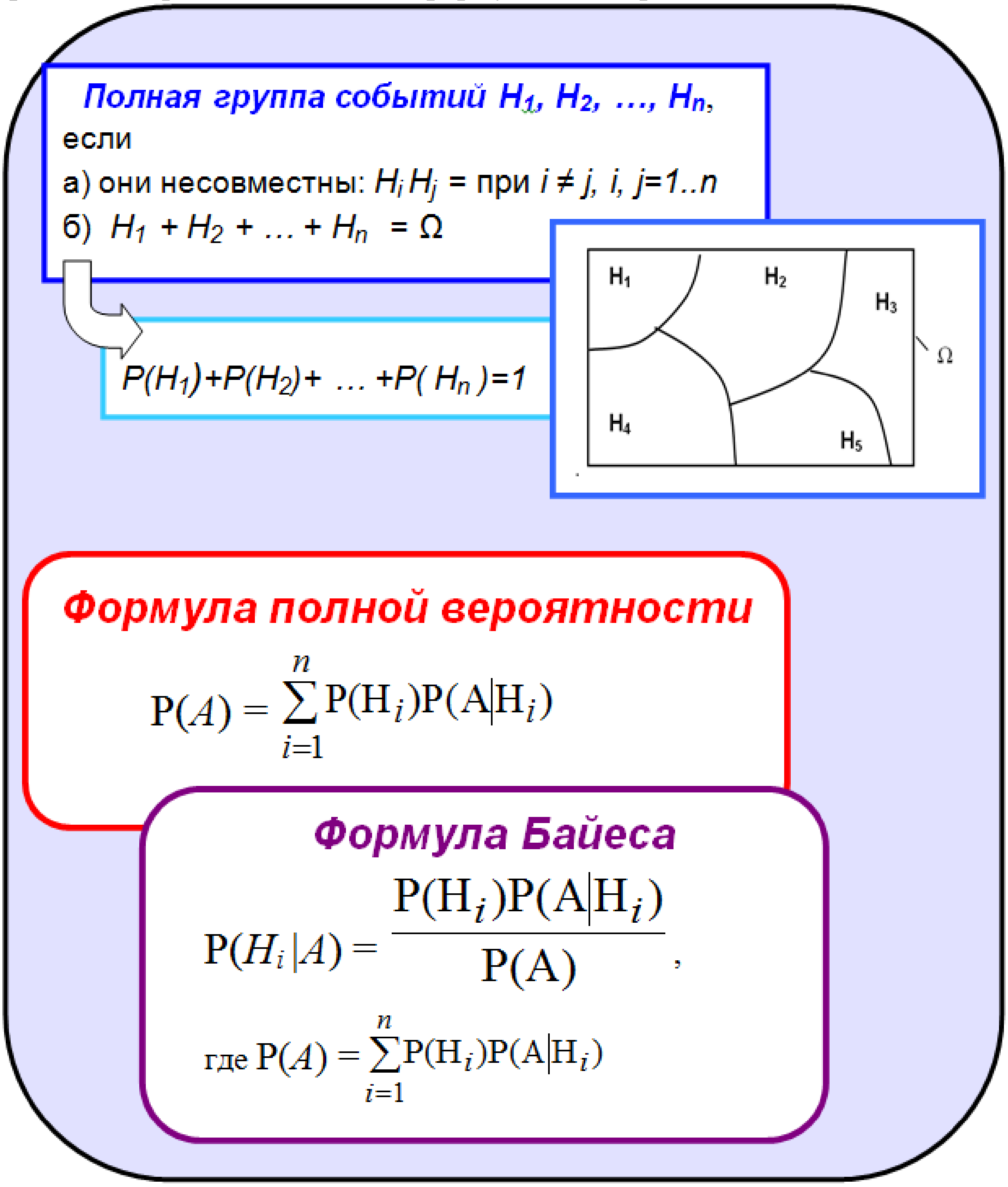


Рис. 2

Примеры решения задач

Пример 1. Часы, относящиеся к сегменту бюджетных моделей, поступают в магазин с трех заводов. Завод I поставляет 35% всей продукции, завод II − 45% и завод III − 20%. Доля бракованной продукции составляет для них соответственно 6%, 4% и 7%.
а) Какова вероятность того, что купленные часы окажутся бракованными?
б) Купленные часы оказались бракованными. Какова вероятность того, что эти часы произведены заводом I ?

Решение. Представим исходные данные в виде таблицы.

	Завод I	Завод II	Завод III
Доля продукции	35%	45%	20%
Брак (%)	6%	4%	7%

а) Пусть A = {часы бракованные},
H_1 = {часы произведены заводом I},
H_2 = {часы произведены заводом II},
H_3 = {часы произведены заводом III}.

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий, т.к. часы производятся только одним заводом. Поскольку доля завода I в ассортименте магазина (для бюджетных часов) составляет 35%, то безусловная вероятность равна $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}35$.
Аналогично, $\mathrm{P}(H_2) = 0{,}45$ и $\mathrm{P}(H_3) = 0{,}20$.

Завод I производит 5% брака, следовательно, вероятность случайно выбрать бракованные часы при условии, что они произведены заводом I, равна $\mathrm{P}(A|H_1) = 0{,}06$.

$\mathrm{P}(A|H_2) = 0{,}04$ и $\mathrm{P}(A|H_3) = 0{,}07$.

Применяя формулу полной вероятности, получаем

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{P}(A|H_2) + \mathrm{P}(H_3)\,\mathrm{P}(A|H_3) = 0{,}35 \cdot 0{,}06 + 0{,}45 \cdot 0{,}04 + 0{,}20 \cdot 0{,}07 = 0{,}053$.

б) Вероятность того, что бракованные часы произведены заводом I, будем искать по формуле Байеса:

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}|H_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}06}{0{,}0495} = 0{,}396.$$ ■

Пример 2. Имеются 2 урны, содержащие белые и черные шары. В первой урне – 3 белых и 2 черных шара, во второй – 5 белых и 6 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекается шар и перекладывается во 2 урну. Затем из второй урны наудачу извлекается шар.

Найти вероятность того, что из второй урны вынули белый шар.

Решение. Представим условие задачи в виде следующей схемы (рис. 3).

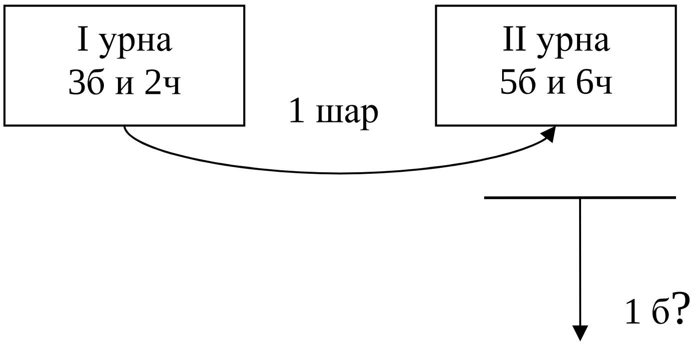


Рис. 3

Эта задача решается по формуле полной вероятности.

A = {из урны II вынули белый шар}.

Мы не знаем, какой шар переложили из первой урны во вторую, поэтому за гипотезы возьмем следующие события.

H_1 = {из урны I в урну II переложили белый шар} и

H_2 = {из урны I в урну II переложили черный шар}.

Вероятность из урны I вынуть белый шар равна $P(H_1) = \frac{3}{5}$, а черный – $P(H_2) = \frac{2}{5}$. Условная вероятность вынуть из урны II белый шар, если мы положили туда белый шар, равна $P(A|H_1) = \frac{6}{12}$. Если же в урну II мы положим черный шар, то всего шаров в урне стало 12, а белых шаров осталось прежнее количество – 5 шаров. Поэтому

$P(A|H_2) = \frac{5}{12}$.

$P(A) = P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{12} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{7}{15}$. ■

► **Пример 3.** Три стрелка произвели залп, причем только одна пуля поразила мишень. Найти вероятность того, что попал третий стрелок, если вероятности попадания первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,4.

Решение. Пусть A = {один стрелок попал в мишень}.

В качестве гипотез возьмем следующие события:

H_1 = {третий стрелок попал в цель} и

$H_2 = \overline{H}_1$ = {третий стрелок промахнулся}.

По условию, $P(H_1) = 0{,}4$ и $P(H_2) = 1 - P(\overline{H}_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Событие $\{A|H_1\}$ означает, что было одно попадание в мишень, причем попал третий стрелок. Следовательно первый и второй стрелки промахнулись и, используя теорему умножения для независимых событий, получаем $P(A|H_1) = P(\overline{1}\ и\ \overline{2}) = (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7) = 0{,}12$.

Найдем условную вероятность $P(A|H_2)$. Событие $\{A|H_2\}$ означает, что в мишень попал один стрелок, причем третий стрелок промахнулся. Это означает, что либо первый стрелок попал и второй промахнулся, либо первый стрелок промахнулся и второй стрелок попал. Тогда (аналогично Задаче 2, § 2).

$P(A|H_2) = P(1\ и\ \overline{2}\ или\ \overline{1}\ и\ 2) = 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}7) + (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}7 = 0{,}46.$

Применяя формулу Байеса, получаем

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}12}{0{,}4 \cdot 0{,}12 + 0{,}6 \cdot 0{,}46} = \frac{4}{27} = 0{,}15.$$

Таким образом, с вероятностью 0,15 можно ожидать, что в мишень попал третий стрелок. ■

? ***Контрольные вопросы***

1. Каким условиям должны удовлетворять события, составляющие полную группу?
2. В каких случаях используется формула полной вероятности?
3. В каких случаях используется формула Байеса?
4. В чем различие между априорной и апостериорной вероятностью?.
5. Как связаны между собой формула полной вероятности и формула Байеса?

Задачи к § 3

Задачи элементарного уровня

1. Укажите, какой набор событий не является полной группой событий.

а) $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}6$, $P(H_3) = 0{,}6$;

б) $P(H_1) = 0{,}3$, $P(H_2) = 0{,}5$, $P(H_3) = 0{,}2$;

в) $P(H_1) = 0,1$, $P(H_2) = 0,4$, $P(H_3) = 0,2$.

2. События H_1, H_2, H_3, H_4 образуют полную группу событий. Найдите $P(H_3)$, если $P(H_1 + H_2 + H_4) = 0,7$.

а) 0,2; б) 0,3; в) 0,7.

3. Для проверки качества продукции выбрали 3 детали.

H_1 = {все детали качественные},

H_2 = {одна бракованная деталь},

H_3 = {две бракованные детали}.

Укажите гипотезу H, которая дополняет набор событий до полной группы.

а) H = {все детали бракованные},

б) H = {хотя бы две детали бракованные},

в) H = {три детали бракованные}.

Задачи базового уровня

4. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную − 0,05. Определить вероятность, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

5. Россияне крайне отрицательно относятся к использованию в продуктах питания ГМО − генномодифицированных организмов (опрос портала SuperJob.ru, ноябрь 2009 г.). Причем женщины в этом вопросе немного более категоричны, чем мужчины (60% и 57% соответственно). Доля опрошенных, которые характеризуют свою позицию, как «скорее отрицательно», равна 25% (мужчины) и 27% (женщины). Найти вероятность того, что случайно выбранный человек относится к использованию ГМО а) крайне отрицательно; б) скорее отрицательно. Считать, что мужчин − 46%, а женщин − 54%.

6. В магазине продается 4 модели утюга. Вероятность того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно равны: 0,91; 0,95; 0,9; 0,94. Найти вероятность того, что взятый наудачу утюг выдержит гарантийный срок.

7. В продажу поступают телевизоры с трех заводов. Продукция первого завода содержит 4% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 3%, третьего – 2%. 1) Какова вероятность приобрести неисправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% – со второго и 50% – с третьего. 2) Купленный телевизор оказался неисправным. Найти вероятность того, что этот телевизор произведен а) первым заводом; б) вторым заводом.

8. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. 1) Найти вероятность того, что случайно выбранный стрелок попадет в мишень. 2) Случайно выбранный стрелок попал в мишень. Найти вероятность того, что стрелял первый стрелок.

9. Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддается диагностике. Один грубый тест на это заболевание дает положительный результат (указывает на наличие заболевания) в 85% случаев, когда пациент действительно болен и в 10% случаев, когда у пациента нет этого заболевания. Пусть для конкретного пациента этот тест дает положительный результат. Какова вероятность, что у него действительно есть заболевание?

10. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,67. Вероятность того, что товар будет пользоваться спросом на рынке при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,42. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение интересующего нас периода, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

11. Обычно Олег дарит Татьяне к каждому празднику букет цветов: в 30% случаев − из гвоздик, в 70% случаев − из роз. В зимний период букет из роз может простоять неделю с вероятностью 0,4, а букет из гвоздик − с вероятностью 0,9. Татьяна сообщила Олегу, что в этот раз букет простоял целую неделю. Какие цветы наиболее вероятно были подарены?

12. Определяя свой главный стимул к работе, 39% мужчин и 54% женщин признают, что лучше всего к работе их стимулирует похвала начальства (опрос SuperJob.ru, 16.02.2010). Учитывая, что доля женщин составляет 55,8%, найти вероятность того, что случайно выбранный человек так же считает похвалу самым действенным стимулом.

13. Две машинистки печатали рукопись, посменно заменяя друг друга. Первая в конечном итоге напечатала 1/3 всей рукописи, а вторая − остальную часть. Первая машинистка делает ошибки с вероятностью 0,15, а вторая — с вероятностью 0,1. При проверке на 13-й странице обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка.

Задачи среднего уровня

14. Среди деталей, поступающих на сборку с первого станка, бракованными являются 0,1% деталей, со второго − 0,2%, с третьего − 0,5%. Производительности станков относятся как 4:3:2 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь была изготовлена на 3-м станке.

15. Для сдачи экзамена студентам было необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8 – 25 вопросов, 5 – 20 вопросов, 2 – 15 вопросов. Вызванный студент ответил на поставленный вопрос. Найти вероятность того, что он подготовил все вопросы.

16. На одном производстве было установлено, что 3% рабочих являются алкоголиками с показателями прогулов втрое выше, чем у остальных рабочих. Если случайно выбранный рабочий отсутствует на работе, то какова вероятность того, что он алкоголик?

17. Чтобы узнать, как избиратели относятся к деятельности народного депутата А, исследователи общественного мнения выбрали для опроса три города. В первом городе проживает 50 000 избирателей, во втором − 150 000, в третьем − 500 000. Оказалось, что в первом городе депутата поддерживают 10% избирателей, во втором − 30%, в третьем − 70%. Найти вероятность, что наудачу выбранный избиратель, проживающий в одном из этих трех городов, поддерживает депутата А.

18. Вероятность того, что случайно выбранный мужчина имеет проблемы с системой кровообращения, равна 0,25. Мужчина, имеющий такие проблемы, является курильщиком в два раза чаще, чем мужчина, у которого нет проблем с системой кровообращения. Чему равна вероятность того, что мужчина, который курит, имеет проблемы с системой кровообращения?

19. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. 1) Найти вероятность того, что случайно выбранный стрелок два раза подряд попадет в мишень. 2) Случайно выбранный стрелок два раза подряд попал в мишень. Найти вероятность того, что стрелял первый стрелок.

20. Продолжение Примера 7 (§1) и задачи №20 (§2). Семья Климентьевых собирается съездить на дачу. В техсервисе им пообещали отремонтировать их автомобиль с вероятностью 50/50. В семье Климентьевых трое детей. Старший сын Василий не любит ездить на дачу. Поэтому, когда семья добирается на дачу общественным транспортом, то в каждом четвертом случае Василий находит «возможность» потеряться по дороге. Найти вероятность того, что семья в полном составе доберется на дачу.

21. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, второго − 0,03, третьего − 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего в 2 раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет обработана на третьем станке, если она оказалась бракованной.

22. Компания владеет 3 легковыми и 19 грузовыми автомобилями. Вероятность поломки легковых автомобилей равна 0,2, а грузовых − 0,4. Найти вероятность того, что не потребуется услуг автосервиса 1) одному случайно выбранному автомобилю; 2) двум случайно выбранным автомобилям.

23. Согласно опросу Исследовательского центра рекрутингового портала SuperJob.ru (май 2009 г.) женщины, занимающие руководящие должности, чаще мужчин-руководителей, считают, что карьерный рост подрывает здоровье (38% против 32%). В то время как о положительном влиянии карьеры на здоровье говорят примерно равные количества респондентов − 45% мужчин и 44% женщин. В одной компании на руководящих должностях заняты 62 мужчины и 25 женщин. Найти вероятность того, что два случайно выбранных руководителя а) согласны с мнением, что интересная работа «лечит лучше любых лекарств»; б) придерживаются противоположных точек зрения.

24. Вероятность боя стеклянных банок при транспортировке консервов на автомашинах равна 0,01, а по железной дороге – в 5 раз меньше. Определить вероятность того, что наудачу взятая банка оказалась разбитой, если на автомашинах перевезено консервов в 4 раза меньше, чем по железной дороге.

25. В одной урне 2 белых и 3 черных шара, в другой − 3 белых и неизвестное количество черных шаров. Из каждой урны извлекается по одному шару. Вероятность извлечь из этих двух шаров белый шар равна 25/70. Сколько было черных шаров во второй урне?

26. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находятся 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах − по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность, что выбрана пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

27. Как часто Вы курите?

(ВЦИОМ, май, 2010 г.,%).

Вариант ответа	Все	Образование			
		Начальное или ниже, неполное среднее	Среднее (школа или ПТУ)	Среднее специальное (техникум)	Незаконченное высшее (не менее 3-х курсов вуза), высшее
Одну пачку в день или больше	21	18	24	22	16
Несколько сигарет почти каждый день	16	12	16	15	17
Иногда несколько сигарет в неделю или в месяц	4	3	4	5	4
Я бросил(а) курить и не курю уже более 3 месяцев	8	12	6	8	9
Я никогда не курил(а)	51	56	49	50	54

На предприятии трудятся 840 человек. Из них 140 человек имеют высшее образование, 550 − среднее специальное, 100 − среднее и 50 человек имеют начальное образование. Руководство, беспокоясь о здоровье работников, решило выяснить приблизительное количество курящих. Не надеясь на искренность ответов работников в случае анкетного опроса, руководство решило воспользоваться выше изложенным исследованием ВЦИОМ.

К каким выводам пришло руководство?

28. Имеются 2 урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй − 2 белых и 3 черных. Из первой урны переложили во вторую 2 шара, а затем извлекли из второй урны один шар, Он оказался белым. Какой цвет переложенных шаров наиболее вероятен?

29. В одной урне находятся 6 белых и 4 черных шара, во второй − 3 белых и 2 черных. Из первой урны извлекают 3 шара. Шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну. После этого из второй урны вынимают шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

30. Выбирают букву из слов ГОД. Если выбранной оказалась гласная буква, то выбирают 2 буквы из слова САД. Если выбрана согласная буква, выбирают 2 буквы из слова РОЙ. Какова вероятность сложить из трех выбранных букв трехбуквенное существительное?

31. На предприятии работают 10 рабочих шестого разряда, 15 рабочих пятого разряда и 5 рабочих четвертого разряда. Вероятность того, что изделие, изготовленное рабочим соответствующего разряда, будет одобрено ОТК, равна, соответственно, 0,95, 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что изделие, проверенное ОТК, будет одобрено, при условии, что производительность всех рабочих одинакова.

32. В колледже учится n студентов, из них на 1 курсе учится n_1 студент, на 2-м курсе − n_2 студент, на 3-м курсе − n_3 студент. Оказалось, что из двух наудачу выбранных студентов один студент учится дольше. Какова вероятность, что этот студент учится 3-й год?

33. Вероятность того, что лось переносит зиму, оценивается в 80%, если лось здоров, и в 30%, если лось болен. а) Если в популяции больны 20% лосей, то какая доля популяции перенесет зиму?

б) Если волки убивают 80% здоровых и 70% больных лосей из тех, что не выживают за зиму, то какую долю убитые волками за зиму лоси составляют во всей популяции?

34. В страховой компании изучалась вероятность попадания в аварию хотя бы один раз в год для различных возрастных категорий водителей. Результаты исследования приведены в таблице.

Номер Группы	Возраст водителя	Вероятность хотя бы одной аварии в год
1	до 25 лет	0,15
2	от 26 до 30 лет	0,08
3	от 31 до 50 лет	0,04
4	старше 50 лет	0,05

В фирме, занимающейся грузоперевозками, работают водители, возраст которых равен: 19, 28, 46, 35, 32, 27, 32, 45, 51, 56. Руководство фирмы интересует, насколько велика вероятность того, что водитель фирмы попадет в аварию хотя бы один раз на протяжении года.

35. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказной работы прибора при отсутствии повреждений равна 0,99, при перегреве − 0,95, при вибрации − 0,9, при вибрации и перегреве − 0,8. Найти а) вероятность отказа этого прибора во время работы в жарких странах (вероятность перегрева − 0,2, вибрации − 0,1); б) вероятность отказа этого прибора в передвигающейся лаборатории (вероятность перегрева − 0,1, вибрации − 0,3), если считать перегрев и вибрацию независимыми событиями.

Задачи повышенной сложности

36. Две урны содержат красные и черные шары, не различимые на ощупь. Урна A содержит 2 красных и 1 черный шар, урна B − 101 красный и 100 черных шаров. Наудачу выбирается одна из урн. Игрок получает награду, если правильно называет урну после извлечения из нее двух шаров. После извлечения первого шара и определения его цвета игрок решает, вернуть ли в урну этот шар перед вторым извлечением. Какой должна быть стратегия, максимизирующая полную вероятность правильного ответа?

37. Портфель страховщика состоит из независимых рисков, не обладающих последействием. Эти риски можно разбить на два однородных класса: A и B; в классе A в два раза больше рисков, чем в классе B. Среднее число страховых случаев в течение года для одного риска из класса A (B) равно 0,22 (соответственно 0,11). В течение года по каждому риску может наступить только один страховой случай. Статистические свойства распределения ущерба после наступления страхового случая приведены в следующей таблице.

Размер ущерба	Вероятность	
	Класс A	Класс B
50 000	0,60	0,36
100 000	0,40	0,64

Суммарный убыток за два года по наудачу выбранному риску составил 100 000. Найдите вероятность того, что этот риск принадлежит классу A.

38. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 1/4, выжить − с вероятностью 1/4 и разделиться на две − с вероятностью 1/2. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой, независимо от ее «происхождения», происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями может существовать к концу второго промежутка времени?

Творческие задачи

39. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее. Задача. Три друга считают, что хорошо знают предмет и высоко оценивают свои шансы сдать экзамен: 0,7; 0,8; 0,9. Найдите вероятность того, что экзамен сдадут только двое.
Тема: формула полной вероятности.

40. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее.
Задача. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,03, а для второго – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей с первого станка поступает в два раза больше, чем со второго. Какова вероятность того, что наудачу выбранная деталь будет бракованной?
Тема: формула Байеса.

41. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. Производитель А гарантирует работу холодильника с вероятностью 96%, а производитель В − с вероятностью 94%.
Тема: формула Байеса.

42. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. Имеется 10 пальто, 35 курток и 20 плащей. Вероятность того, что пальто с дефектами равно 0,03, куртка − 0,04, плащ − 0,02.
Тема: формула полной вероятности.

4. Повторные испытания: биномиальное и полиномиальное распределения

Ключевые слова: схема Бернулли, биномиальное распределение, полиномиальное распределение.

До сих пор мы изучали вероятности, связанные с одним проведением какого-либо эксперимента. В данной главе мы рассмотрим ситуацию, когда один и тот же эксперимент выполняется несколько раз подряд. Рассмотрим случайный эксперимент с двумя исходами A и $\overline{A}$, где A будем условно считать «успехом», а противоположное событие $\overline{A}$ – «неудачей». Допустим, что при одном проведении эксперимента вероятность «успеха» есть p, а вероятность «неудачи» есть $q = 1 - p$.

Схема повторных независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p, не зависящей от номера испытания, называется *схемой Бернулли*.

Вероятность того, что в схеме Бернулли при n независимых испытаниях событие A наступит k раз, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (1)$$

Эта формула носит название *формулы Бернулли*, а соответствующее распределение – *биномиальное*.

В схеме Бернулли число k_0 называют *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не менее) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np + p - 1 \leq k_0 < np + p, \qquad (2)$$

причём: а) если число $np + p - 1$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np + p - 1$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и $k_0 + 1$;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Биномиальное распределение применимо к повторным испытаниям для эксперимента с двумя исходами. Рассмотрим общий случай, когда результатом эксперимента может быть любой из m исходов $A_1, A_2, ..., A_m$ и $p_i = P(A_i)$. Вероятность того, что в n испытаниях событие A_1 появится k_1 раз, A_2 – k_2 раз и т.д., находится по формуле полиномиального распределения:

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}, \tag{3}$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$.

Биномиальное распределение − это частный случай полиномиального распределения.

На рис. 1 (с. 58) изображены основные формулы этого раздела.


Повторные независимые испытания
Полиномиальное распределение
Результатом испытания может быть любой из m исходов $A_1, A_2, \ldots, A_m$
$p_i = \mathrm{P}(A_i)$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$
k_i – число появлений события A_i
n – число испытаний
$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$$
$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$
Частный случай: m=2
Биномиальное распределение
(формула Бернулли)
Результатом испытания являются любой из 2 событий: A, $p = \mathrm{P}(A)$
$\overline{A}$, $q = \mathrm{P}(\overline{A})$, $p + q = 1$
k – число появлений события A
$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$
k_0 – наивероятнейшее число появления A
$np + p - 1 \le k_0 < np + p$

Рис. 1

Примеры решения задач

Пример 1. Игральная кость бросается семь раз. Найти вероятность того, что пять очков выпадет: а) два раза; б) не менее двух раз и не более четырех раз; в) хотя бы один раз. Найти наивероятнейшее число выпадения пяти очков.

Решение. Так как в условии задачи два возможных исхода (либо выпадет пять очков, либо нет), то эта задача на формулу Бернулли (1). Обозначим за «успех» выпадение 5 очков.

A = {выпадет 5 очков } и p = P(A) = 1/6,

$\overline{A}$ = {выпадет 1 или 2 или 3 или 4 или 6 очков}, q = 5/6.

n = 7.

а) k = 2.

P(5 очков выпадет 2 раза в 7 испытаниях) $= P_7(2) = C_7^2 p^2 q^{7-2} =$

$$= \frac{7!}{2!5!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}233\,.$$

б) $2 \le k \le 4$.

Применяем теорему сложения вероятностей

$P_7(2 \le k \le 4) = P_7(k = 2 \text{ или } k = 3 \text{ или } k = 4) = P_7(k = 2) + P_7(k = 3) +$ $+P_7(k = 4) = C_7^2 p^2 q^{7-2} + C_7^3 p^3 q^{7-3} + C_7^4 p^4 q^{7-4} =$

$$\frac{7!}{2!5!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{7!}{3!4!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{7!}{4!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}092.$$

в) $k \ge 1$.

Найти вероятность этого события можно двумя способами. Первый способ – как в предыдущем пункте.

$$P_7(k \ge 1) = P_7(1) + P_7(2) + \ldots + P_7(7).$$

Этот способ довольно трудоемкий, поэтому в данном случае предпочтительнее искомую вероятность выразить через противоположное событие:

$$P_7(k \ge 1) = 1 - P_7(k < 1) = 1 - P_7(0) = 1 - C_7^0 p^0 q^{7-0} = 1 - \frac{7!}{0!7!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^7 =$$

$=1 - 0{,}0965 = 0{,}9035$.

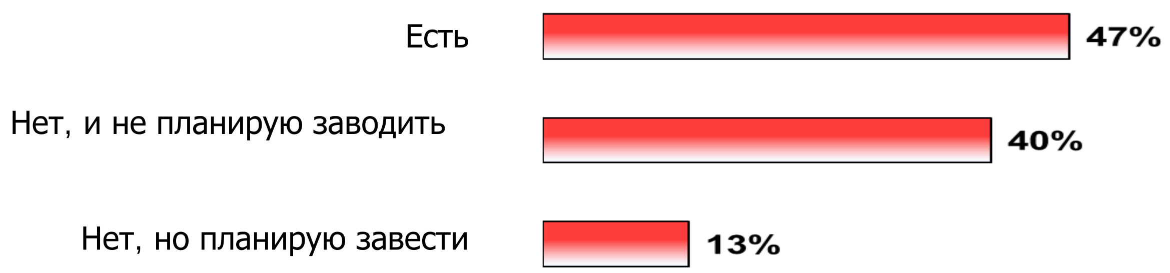
Найдём наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства

$$np + p - 1 \le k_0 < np + p.$$
$$7 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 1 \le k_0 < 7 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{6} \le k_0 \le \frac{8}{6}.$$

Так как число k_0 – это количество «успехов», следовательно, число k_0 может быть только целым. В полученном интервале $\left[\frac{2}{6}; 1\frac{2}{6}\right]$ находится единственное целое число – 1. Следовательно, k_0 = 1. Таким образом, если игральная кость бросается семь раз, то пять очков, вероятнее всего, выпадут только один раз. ■

► **Пример 2.** Аналитический Центр Юрия Левады (Левада-Центр) в феврале 2011 г. провел опрос, в ходе которого, в частности, задавался следующий вопрос.

Есть ли у Вас банковская карточка? Если нет, то планируете ли Вы ее завести?



(Опрошено 1600 человек в 130 населенных пунктах 45 регионов России.)

Найти вероятность того, что среди 12 случайно выбранных людей а) четыре человека не имеют банковской карточки, трое − имеют и еще пять человек планируют завести;
б) равные количества имеют и планируют завести банковскую карточку;
в) все являются владельцами банковской карточки.

Решение. Для решения задачи используем формулу полиномиального распределения (3).

A_1 ={случайно выбранный человек имеет банковскую карточку} и p_1=0,47,

A_2 = { .... не имеет банковской карточки} и p_2 = 0,40,

A_3 = { .... не имеет, но планирует завести} и p_3 = 0,13,

$n = 12$.

а) $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$.

$$P_{12}(3, 4, 5) = \frac{12!}{3!\,4!\,5!}(0{,}47)^3 \cdot (0{,}40)^4 \cdot (0{,}13)^5 = 0{,}0027.$$

б) $k_1 = k_3 = 6$, $k_2 = 0$.

$$P_{12}(6, 0, 6) = \frac{12!}{6!\,0!\,6!}(0{,}47)^6 \cdot (0{,}40)^0 \cdot (0{,}13)^6 = \frac{12!}{6!\,6!}(0{,}47)^6 \cdot (0{,}13)^6 = 0{,}000048.$$

в) $k_1 = 12$, $k_2 = k_3 = 0$.

$$P_{12}(12,0,0) = \frac{12!}{12!\,0!\,0!}(0{,}47)^{12} \cdot (0{,}40)^0 \cdot (0{,}13)^0 = (0{,}47)^{12} = 0{,}0001.$$

Здесь мы, фактически, рассматривали два противоположных события: люди, которые имеют банковскую карточку (их 47%), и люди, которые не имеют банковской карточки (53%). Поэтому эту вероятность можно было вычислить и по формуле Бернулли ($n = 12$; $k = 12$; $p = 0{,}47$; $q = 0{,}53$). ■

? ***Контрольные вопросы***

1. В чем суть схемы Бернулли?
2. Каково минимальное возможное число «успехов» в схеме Бернулли?
3. Каково максимальное возможное число «успехов» в схеме Бернулли?
4. Как вы понимаете «наивероятнейшее» число появлений события A в схеме Бернулли?
5. Как связаны между собой биномиальное и полиномиальное распределения?

Задачи к § 4

Задачи элементарного уровня

1. В автопарке имеются 6 грузовых машин. Вероятность того, что машине потребуется ремонт в течение дня, равна 0,01. Найти вероятность того, что четырем машинам потребуется ремонт.

1.1. Из условия задачи 1 определите событие, которое может быть принято за «успех».

а) A = «успех» = {машине нужен ремонт},

б) A = «успех» = {четырем машинам нужен ремонт}.

1.2. Из условия задачи 1 выберите правильные варианты обозначения события, которое может быть принято за «успех», вероятности «успеха» и количество k появлений «успеха».

а) A=«успех»={машине нужен ремонт}, $p = 0{,}01$, $k = 4$;

б) A=«успех»={четырем машинам нужен ремонт},
$p = C_5^4 0{,}01^4 0{,}99^1$, $k = 1$;

в) A=«успех»={машине не нужен ремонт}, $p = 0{,}99$, $k = 2$.

2. Вероятность брака в производстве часов составляет 4%. Найти вероятность, что из 10 случайно выбранных часов будет двое бракованных.

Выберите правильные варианты обозначения события, которое может быть принято за «успех», вероятности «успеха» и количество k появлений «успеха».

а) A = «успех» = {часы бракованные}, $p = 0{,}04$, $k = 2$;

б) A =«успех»={двое бракованных часов}, $p = C_{10}^2 0{,}01^2 0{,}99^8$, $k = 1$;

в) A = «успех» = {часы качественные}, $p = 0{,}96$, $k = 8$;

г) A = «успех» = {8 качественных часов}, $p = 0{,}96$, $k = 1$

Задачи базового уровня

3. Лечение одного заболевания приводит к выздоровлению в 75% случаев. Лечилось 4 больных. Какова вероятность того, что а) вылечатся все четверо; б) не вылечится ни один; в) вылечатся 3 человека?

4. Известно, что в среднем 3/5 всего числа выпускаемых заводом телефонных аппаратов является продукцией 1 сорта. Найти наивероятнейшее число аппаратов 1 сорта в партии из 200 аппаратов.

5. Отдел надзора отделения центрального банка курирует деятельность ряда коммерческих банков. При сдаче квартальной отчетности серьезные финансовые нарушения обнаруживаются в среднем у 5% банков. На проверку выбрано шесть банков. Найти наиболее вероятное число банков, не имеющих серьезных нарушений финансовой отчетности среди выбранных.

6. Согласно опросу Исследовательского центра портала SuperJob.ru (октябрь 2008 г., 1800 респондентов из семи округов РФ), почти каждый второй участник опроса (48%) не сомневается в пользе рекламы. Причем некоторые считают, что пользу получают скорее рекламодатели, чем потребители рекламируемых товаров и услуг.

«23 октября – День работников рекламы. По Вашему мнению, реклама приносит больше пользы или вреда?»

Больше пользы	48%	
Больше вреда	25%	
Затрудняюсь ответить	27%	

Найти вероятность того, что из четырёх случайно выбранных людей а) все считают, что реклама полезна; б) двое считают полезной, один – вредной и еще один не определился с ответом; в) половина считает полезной, а другая половина не согласна с этим мнением.

7. Найти вероятность того, что из четырёх пассажиров купе а) все являются некурящими; б) половина пассажиров является сторонниками здорового образа жизни и не курят, а другая половина − курящие. При вычислении вероятностей следует принять во внимание, что 32% россиян признают себя курильщиками.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Каждому стрелку дается по 5 попыток. 1) Найти вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень 3 раза. 2) Найдите наивероятнейшее число попаданий в мишень второго стрелка.

9. Продолжение Примера 7 (§1) и задач №20 (§§2, 3). Старший сын Василий, по мнению родителей, не проявляет должного усердия к учебе. Поэтому родители решили применить принцип материальной заинтересованности для повышения мотивации к учебе. Если Василий получит только положительные оценки («хор» и «отл») за 4 экзамена, то родители подарят ему новый мобильный телефон (10 000 д.е.), а старый телефон Василий отдаст младшему брату Виталию (тот должен ехать в летний лагерь). Если не все оценки будут положительными, то родители будут класть на счет мобильного телефона каждый месяц по 1 000 д.е. (количество месяцев равно числу положительных оценок). Кроме того, родителям придется купить младшему сыну Виталию новый мобильный телефон (3 000 д.е.). Сам Василий оценивает свои шансы сдать экзамен на положительную оценку как 0,7 (одинаковую для всех экзаменов). Какую сумму вероятнее всего потратят родители?

10. Средний процент невозвращения в срок кредита, выдаваемого банком, составляет 8%. Сколько «проблемных» кредитов вероятнее всего добавит последний месяц, в котором было выдано 80 кредитов?

11. По оценкам волк, в одиночку нападающий на лося, добивается успеха в 8% столкновений. Какова вероятность того, что в пяти столкновениях ни один лось не станет добычей волка?

12. К Новому году группа получила ответственное поручение – сформировать праздничные подарки. В каждом пакете должно быть 4 конфеты. Конфеты выбирают наугад из большой коробки, где 2/3 конфет – «Барбарис» и 1/3 – «Дюшес». Найти вероятность того, что в подарке будет: а) одна конфета «Дюшес» и три – «Барбарис»; б) конфет поровну.

13. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4, независимо от заявок от других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

14. Проведенный ВЦИОМ в ноябре 2007 г. опрос молодых россиян (18-35 лет) показал, что современная молодежь достаточно скептически оценивает перспективы своего карьерного роста. В частности, отвечая на вопрос «Как Вы считаете, легко ли сегодняшним молодым людям сделать карьеру, добиться успеха в административной деятельности, сфере управления?», респонденты дали следующие ответы:

14% − достаточно легко;

50% − достаточно сложно;

24% − практически невозможно;

12% − затрудняюсь ответить.

В группе учатся 12 студентов. Найти вероятность того, что а) равные количества опрошенных придерживаются разных точек зрения; б) половина опрошенных являются оптимистами, полагая, что сделать карьеру достаточно легко, 4 человека смотрят пессимистично на свою будущую карьеру и 2 человека затруднились ответить.

15. Портал SuperJob.ru в январе 2011 г. проводил опрос на тему «Довольны ли Вы своей нынешней профессией (той, по которой работаете сейчас)?». Ответы представлены в таблице, с.62.

Найти наиболее вероятное число людей, довольных своей профессией среди 1500 человек, имеющих профессию а) экономиста; б) врача; в) менеджера по туризму.

Профессия /специальность	Варианты ответов, %		
	да	нет	Затрудняюсь ответить
Архитекторы	64	24	12
Программисты	61	19	20
Врачи	57	23	20
Юристы	50	29	21
Аудиторы	46	31	23
Квалифицированные рабочие	43	29	28
Психологи	41	32	27
Учителя, преподаватели	39	34	27
Менеджеры по туризму	32	50	18
Менеджеры по логистике	31	41	28
Кладовщики	25	41	34
Экономисты	25	45	30

16. Каждое изделие, изготавливаемое заводом, с вероятностью 0,03 (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре изделия дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью 0,9. Для контроля продукции завода выбираются 10 изделий. Чему равна вероятность того, что а) ни в одном изделии не обнаружено дефекта; б) ровно в двух обнаружены дефекты.

Задачи среднего уровня

17. Из последовательности чисел 1, 2, 3, 4,..9, 10 выбирают произвольно 6 чисел по схеме выборки с возвращением. Какова вероятность того, что из них 3 числа будут кратны 3?

18. В помещении имеется 6 лампочек. Вероятность перегореть для каждой из них равна 0,25. Определить вероятность того, что будут гореть а) ровно 4 лампочки; б) более 4-х ламп; в) хотя бы одна лампочка. Найдите наивероятнейшее число работающих лампочек.

19. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Каждому стрелку предоставляется по 5 попыток. Найти вероятность того, что 1) оба стрелка попадут в мишень по 3 раза; 2) оба стрелка будут иметь одинаковое число попаданий.

20. Продолжение Примера 7 (§1) и задач №20 (§§2, 3). Когда семья Климентьевых добирается на дачу общественным транспортом, то в каждом четвертом случае старший сын Василий находит «возможность» потеряться по дороге и приезжает на дачу только на следующий день. Найти наивероятнейшее число дней, в течение которых Василий будет на даче за весь сезон (май-сентябрь). При расчете следует учитывать только поездки на выходные (суббота, воскресенье). Также будем полагать, что поведение Василия не изменится.

21. Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0,01. Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0,95?

22. Прогноз стоимости акции был поручен трем независимым экспертам, имеющим одинаковую квалификацию. Считается, что эксперты с одинаковой вероятностью p ошибаются в прогнозе. Найти p, если вероятность того, что хотя бы один из них ошибается, равна 0,271.

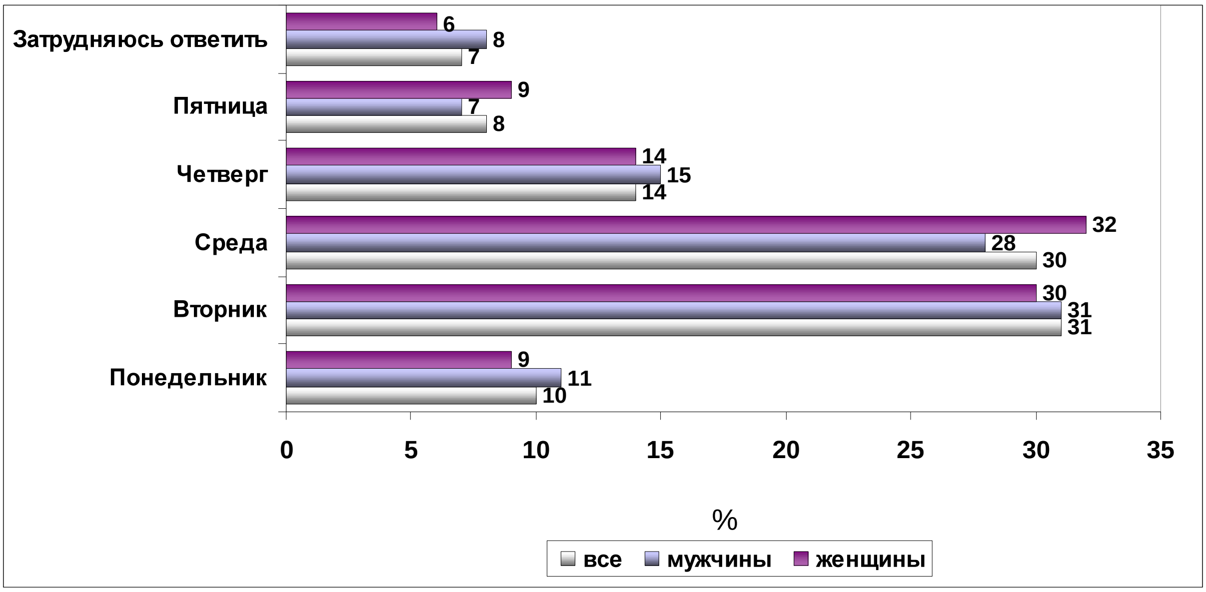
23. Регулярно проверяют свое здоровье, проходят диспансеризацию 9% мужчин и 14% женщин (всероссийский опрос ВЦИОМ, апрель 2009 г). Найти наиболее вероятное число людей регулярно проверяющих свое здоровье и проходящих диспансеризацию среди 4500 человек, если известно, что в исследовании принимают участие а) только мужчины; б) только женщины; в) мужчины составляют третью часть опрошенных.

24. На текстильном производстве для бесперебойной работы необходимо 150 постоянно работающих станков. Практика последних лет показывает, что обычно 5 станков из 100 находятся в ремонте. Какое количество станков необходимо для непрерывного производственного процесса.

25. Фирма рассылает рекламные проспекты восьми потенциальным партнерам. В результате такой рассылки в среднем у каждого пятого потенциального партнера возникает интерес к фирме. Найти вероятность того, что это произойдет: а) в трех случаях; б) не более чем в трех.

26. При каком числе лотерейных билетов наивероятнейшее число выигрышей равно 16, если вероятность выигрыша для каждого билета равна 0,01?

27. Исследовательский центр портала SuperJob.ru провел опрос на тему «Какой день недели, по Вашему мнению, является самым продуктивным рабочим днём?».



Руководитель отдела решил назначить обсуждение нового проекта на среду. Учитывая, что в отделе работают 12 человек, определите наивероятнейшее число людей, которые считают этот день самым продуктивным для себя. Как изменится этот показатель, если известно, что женщины составляют четвертую часть всех сотрудников.

28. В рекламных целях фирма «А», изготавливающая бытовую технику, в каждую 20-ю коробку с СВЧ-печью положила подарочный купон. А фирма «В» − в каждую 30-ю. Найти наивероятнейшее число подарочных купонов, которые будут предъявлены, если в магазин поступило 50 коробок фирмы «А» и 60 коробок фирмы «В».

29. Только 6% россиян считают, что иметь регистрацию в социальных сетях («Одноклассники», «ВКонтакте», и т.д.) полностью безопасно (опрос портала SuperJob.ru). Противоположного мнения придерживаются 10% респондентов («однозначно опасно»). Более осторожно высказываются 38% − «скорее опасно», а 46% считают, что «скорее безопасно». Найти вероятность того, что три случайно выбранных человека будут иметь разные точки зрения по этому вопросу.

30. Руководство компании, недовольное постоянными опозданиями с обеденного перерыва, решило ввести систему штрафов. За каждое опоздание с обеда более, чем на 10 мин будет налагаться штраф 10 д.е. Наблюдения предыдущих месяцев показало, что ежедневно опаздывают с обеда в среднем 70 человек из 150 работников.

Социологические исследования показывают, что после введения подобных штрафов на 2-й месяц количество опозданий уменьшается на 42%, а на 3-й − еще на 20% (т.е. от уровня 1-го месяца на 62%). Какая сумма вероятнее всего будет возвращена компании в виде штрафов за 3 месяца? При расчетах следует полагать, что в месяце 24 рабочих дня.

31. Лицензия отбирается у любого торгового предприятия, как только торговая инспекция в третий раз обнаружит серьезное нарушение правил торговли. Найти вероятность того, что лицензия будет отобрана после пятой проверки. Известно, что вероятность обнаружения нарушения при одной проверке равна 0,2 и не зависит от результатов предыдущих проверок.

32. Некоторое слово состоит из нескольких букв «К», нескольких букв «Л» и нескольких букв «О». Из букв, составляющих это слово, с возвращением трижды выбирается буква. Известно, что вероятность дважды выбрать «О» и один раз выбрать букву «К» равна 54/543, а вероятность дважды выбрать «К» и один раз выбрать букву «О» равна 36/343. Восстановите слово.

Задачи повышенной сложности

33. В схеме Бернулли p = 0,5. Доказать, что

а) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \le P_{2n}(n) \le \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{2n}(n+h)}{P_{2n}(n)} = e^{-t^2}, t = \dfrac{h}{\sqrt{n}}, 0 \le t < \infty.$

34. Проведено n независимых испытаний. Вероятность появления события A в i-м испытании равна p_i. Докажите, что

а) $\dfrac{P_n(1)}{P_n(0)} \ge \dfrac{P_n(2)}{P_n(1)} \ge \ldots \ge \dfrac{P_n(n)}{P_n(n-1)}$;

б) $P_n(m)$ сначала возрастает, а затем убывает, если только $P_n(0)$ или $P_n(n)$ сами не являются максимальными.

Творческие задачи

35. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее.
Задача. Футболист Иванов забивает гол в одном случае из трех, а Петров − в двух случаях из четырех. Найти вероятность того, что мяч побывает в воротах.
Тема: формула Бернулли.

36. В автомобильных гонках участвуют 5 машин. Для каждой машины вероятность добраться до финиша составляет 0,8. Найти вероятность того, что большинство машин дойдет до финиша.
Решите задачу двумя способами.

37. Из 100 деталей, хранящихся в ящике, 4 детали являются бракованными. Случайным образом выбрали 3 детали. Найти вероятность того, что все детали качественные.

Решите задачу тремя способами: 1) по формуле Бернулли; 2) по формуле условной вероятности; 3) по формуле классического определения вероятностей. Сравните ответы.

38. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные: В октябре 2010 г. Левада-Центр провел опрос на тему «Что, прежде всего, влияет в Вашей семье на приобретение различных товаров?». Ответы распределились следующим образом: 20% − высокое качество, 24% − низкая цена, 10% − известные марки, 2% − реклама, 32% − собственный опыт, 8% − рекомендации знакомых.

Тема: полиномиальное распределение.

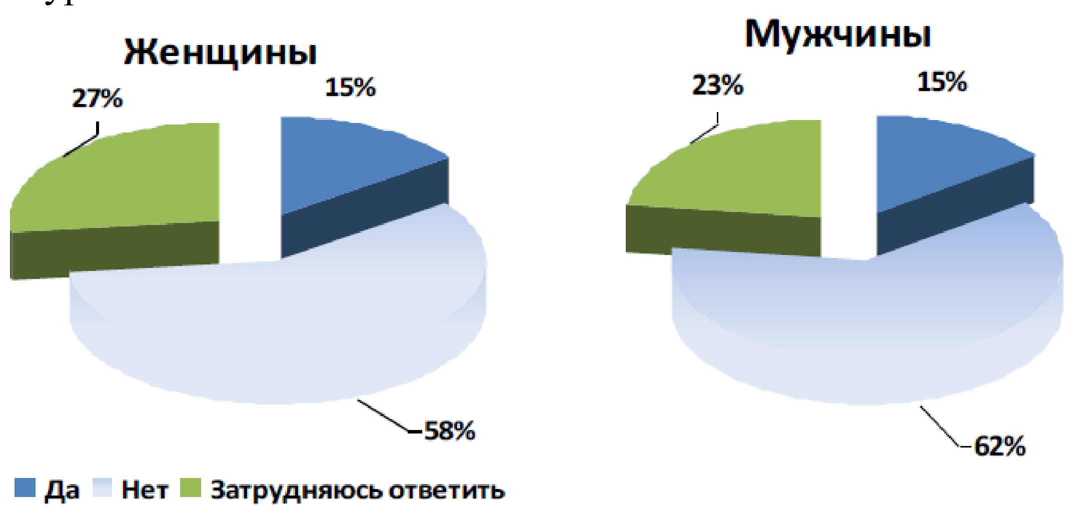
39. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные. Вероятность того, что пальто имеет дефект равно 0,03, куртка – 0,04, плащ − 0,02.

Тема: формула Бернулли.

40. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные. Опрос SuperJob.ru, май 2012г. «Глава Минздравсоцразвития Татьяна Голикова подписала приказ, согласно которому через год в России на пачках сигарет будут печатать устрашающие графические изображения, рассказывающие о вреде курения. Может ли появление на пачках сигарет устрашающих картинок заставить Вас бросить курить?»



Тема: формула Бернулли, теорема сложения вероятностей.

5. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Ключевые слова: теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра−Лапласа.

Рассмотрим повторные независимые испытания, когда число испытаний n достаточно велико. Вычисления по формуле Бернулли для большого числа испытаний достаточно трудоемко. В этой ситуации удобнее использовать приближенные формулы для биномиального распределения: теорему Пуассона, локальную и интегральную теоремы Муавра−Лапласа.

Теорема Пуассона. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \to \lambda$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна значению

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (1)$$

где k − любое целое неотрицательное число.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Пусть вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (2)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ − функция плотности нормального распределения, и $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции φ(x) приведены в табл. 1 Приложения, график функции φ(x) изображен на рис.1.

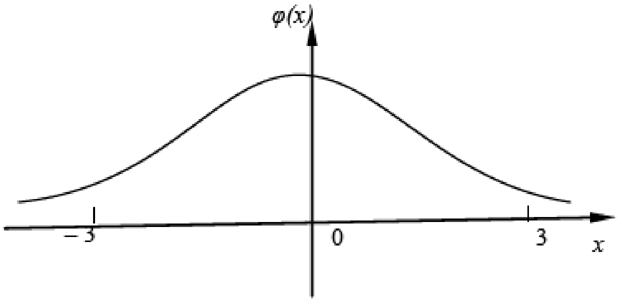


Рис.1.

Свойства функции плотности φ(x).

1. Функция φ(x) монотонно убывающая при положительных значениях x и монотонно возрастающая при отрицательных значениях x.

2. При $x \to \infty$ $\varphi(x) \to 0$ (практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$).

3. Функция φ(x) является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пусть вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что событие A в n испытаниях появится от k_1 до k_2 раз, при достаточно большом числе n приближенно равна:

$$\mathrm{P}(k_1 \le m < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (3)$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ − функция нормального распределения.

Значения функции Φ(x) приведены в таблице 2 Приложения, график функции Φ(x) изображен на рис. 2.

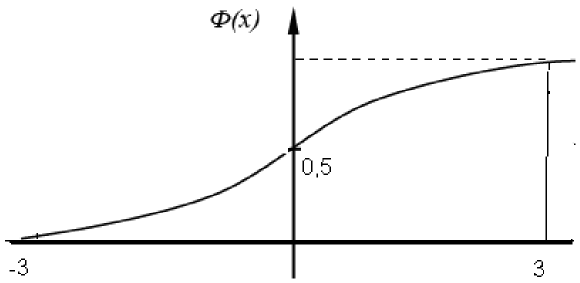


Рис. 2

Свойства функции распределения $\Phi(x)$.

1. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая.
2. При $x \to -\infty$ $\Phi(x) \to 0$.

При $x \to +\infty$ $\Phi(x) \to 1$ (практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\Phi(x) \approx 1$).

3. Функция $\Phi(x)$ симметричная, т.е. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Замечание 1. В ряде учебников функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа и записывается следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{или } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Свойства этих функций отличаются от изложенных выше.

Замечание 2.

1. Если $p < 0{,}1$ и $\lambda = np < 10$, то применяется теорема Пуассона.

2. Если $\lambda = np \geq 10$, то применяются локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

На рис. 3,4 (с.73, 74) изображены основные формулы этого раздела.

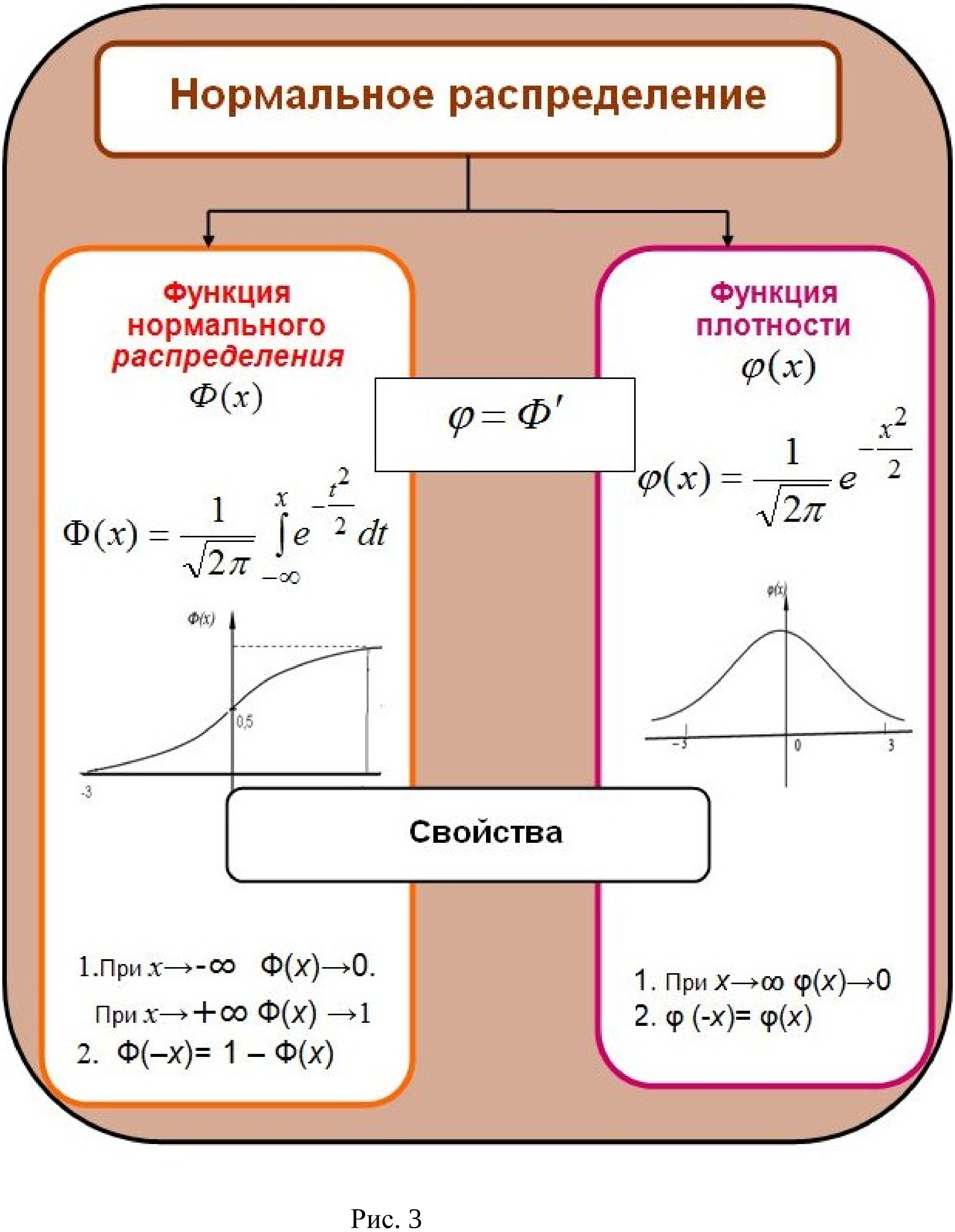
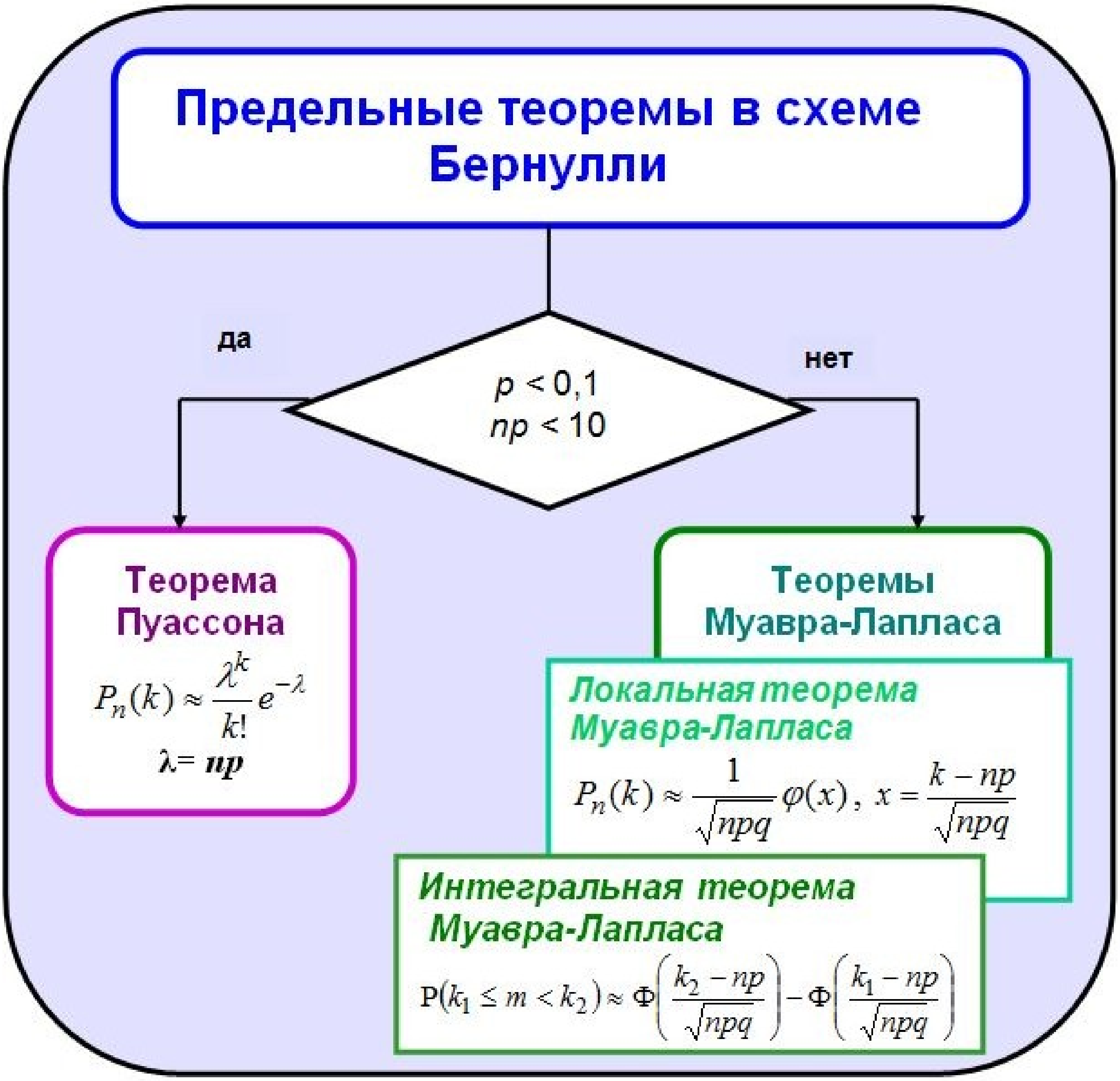

Нормальное распределение
Функция нормального распределения
$\Phi(x)$
$\varphi = \Phi'$
Функция плотности
$\varphi(x)$
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
Свойства
1.При $x \to -\infty$ $\Phi(x) \to 0$.
При $x \to +\infty$ $\Phi(x) \to 1$
2. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
1. При $x \to \infty$ $\varphi(x) \to 0$
2. $\varphi(-x) = \varphi(x)$

Рис. 3

.



Предельные теоремы в схеме Бернулли
да
нет
$p < 0,1$
$np < 10$
Теорема Пуассона
$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
$\lambda = np$
Теоремы Муавра-Лапласа
Локальная теорема Муавра-Лапласа
$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$
Интегральная теорема Муавра-Лапласа
$\mathrm{P}(k_1 \le m < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$

Рис. 4

Примеры решения задач

Пример 1. Вакцина против гриппа не формирует иммунитет в 0,02% случаев. Вакцинацию прошли 10 000 человек.

Найти вероятность того, что а) ровно 3 человека не приобрели иммунитет; б) все приобрели иммунитет.

Решение. За «успех» обозначим отсутствие иммунитета:

A = {нет иммунитета} и p = 0,0002,

$\overline{A}$ = {есть иммунитет}, q = 0,9998.

n = 10 000.

Так как $p = 0{,}0002 < 0{,}1$ и $\lambda = np = 10\,000 \cdot 0{,}0002 = 2 < 10$, то используем теорему Пуассона (1).

а) $k = 3$.

$$P_{10\,000}(2) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0{,}18045 \text{ (по табл. 3 Приложения)}.$$

б) $k = 0$.

$$P_{10\,000}(0) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0{,}1353.$$

Пример 2. Исследовательский центр рекрутингового портала SuperJob.ru (июнь 2010 г.) провел опрос более 1000 представителей отечественных организаций и предприятий из всех округов страны. Социологов, в частности, интересовал ответ на вопрос «Берете ли Вы на работу выпускников вузов без опыта работы?»:

58% – да (прокомментируйте, на какие позиции);

32% – нет;

10% – затрудняюсь ответить.

Найти вероятность того, что из 2000 случайно выбранных выпускников без опыта работы будут трудоустроены: а) ровно 1100 выпускников; б) более 60% выпускников; в) от 1100 до 1230 выпускников.

Решение. Определим X как число трудоустроенных выпускников, не имеющих опыта работы.

A = {выпускник будет трудоустроен } и p = 0,58,

$\overline{A}$ = {выпускник не будет трудоустроен}, q = 0,42.

n = 2 000.

Поскольку $np = 2\,000 \cdot 0{,}58 = 1160 \geq 10$, то для решения задачи будут применяться локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

а) Используем локальную теорему Муавра-Лапласа (2):
$k = 1100$.

$$\mathrm{P}(X = 1100) = \mathrm{P}_{2000}(1100) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$npq = 2\,000 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}42 = 487{,}2, \; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1100 - 1160}{\sqrt{487{,}2}} = 2{,}72.$$

По табл. 1 Приложения находим φ(2,72) = 0,0096.

Тогда $\mathrm{P}(X = 1100) \approx \frac{1}{\sqrt{487{,}2}} \varphi(2{,}72) = \frac{0{,}0096}{22{,}07} = 0{,}00043.$

б) Применяем интегральную теорему Муавра-Лапласа (3).
60% выпускников составляет $k = 2\,000 \cdot 0{,}60 = 1200$ человек.

$$\mathrm{P}(X > 1200) = \mathrm{P}(1201 \le X < 2000) \approx \Phi\left(\frac{2000 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{1201 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2000 - 1160}{\sqrt{487{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{1201 - 1160}{\sqrt{487{,}2}}\right) = \Phi(38{,}06) - \Phi(1{,}81)$$

Находим по Приложению 2 значение Ф(1,81) = 0,9646. Значение Ф(38,06) = 1, т. к. функция Ф(x) неубывающая и все значения функции, превосходящие 3,49 (максимальное значение аргумента в таблице, Ф(3,49) = 0,9999), будут равны 0,9999, т.е. практически «1».

Тогда искомая вероятность равна P(X > 1200)=1 − 0,9646=0,0354.

в) По формуле (3):

$$\mathrm{P}(1100 \le X < 1230) \approx \Phi\left(\frac{1230 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{1100 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1230 - 1160}{\sqrt{487{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{1100 - 1160}{\sqrt{487{,}2}}\right) = \Phi(3{,}17) - \Phi(-2{,}72) =$$

$$= \Phi(3{,}17) - (1 - \Phi(2{,}72)) = 0{,}9992 - (1 - 0{,}9967) = 0{,}9959.$$ ■

► **Пример 3.** В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии составляет 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 д.е. страховых взносов и в случае аварии получает от компании 1000 д.е.

Найти вероятность того, что по истечении года работы страховая компания получит убыток.

Решение. Компания получит убыток, если страховые выплаты превысят суммы страховых взносов. За год сумма страховых взносов составила 10 000 · 12 = 120 000 д.е. Так как выплата по страховому случаю составляет 1 000 д.е., то компания получит убытки, если произойдет более 120 аварий.

Пусть X − число аварий. Нам нужно найти следующую вероятность

P(компания понесет убытки) = $P(X > 120) = P(120 < X < 10\,000)$.

Число аварий X имеет биномиальное распределение.

За «успех» примем наступление страхового случая (аварии):

A = {произойдет страховой случай} и $p = 0{,}006$,

$\overline{A}$ = {страховой случай не произойдет}, $q = 0{,}994$.

Так как $np = 10\,000 \cdot 0{,}006 = 60 \geq 10$, то для решения задачи будем использовать интегральную теорему Муавра-Лапласа (3).

Вычислим $npq = 10\,000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994 = 59{,}64$.

$P(120 < X < 10\,000) = P(121 \leq X < 10\,000) \approx$

$$\approx \Phi\left(\frac{10\,000 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{121 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{10\,000 - 60}{\sqrt{59{,}64}}\right) - \Phi\left(\frac{121 - 60}{\sqrt{59{,}64}}\right) =$$

$$= \Phi(1287{,}56) - \Phi(7{,}9) = 1 - 1 = 0.$$

Таким образом, если предположение компании о вероятности страховых случаев верно, то можно сказать, что вероятность убытков сведена к нулю. К сожалению, мы не можем утверждать, что компания полностью гарантировала себя от убытков, потому что всегда существует такой неконтролируемый фактор как «случайность». ■

? *Контрольные вопросы*

1. В чем суть использования предельных теорем в схеме Бернулли?
2. В каких случаях применяется теорема Пуассона?
3. Чему равен параметр λ в теореме Пуассона?
4. В каких случаях применяются теоремы Муавра-Лапласа?
5. Как связаны между собой локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа?

Задачи к § 5

Задачи элементарного уровня

1. Определите, какие формулы будут использованы, если p =0,01 и n = 2500.
а) теорема Пуассона; б) теоремы Муавра-Лапласа.

2. Определите, какие формулы будут использованы, если p =0,02 и n = 600.
а) теорема Пуассона; б) теоремы Муавра-Лапласа.

3. По таблице плотности стандартного нормального распределения найдите $\varphi(1{,}55)$.
а) 0,1714; б) 0,1604; в) 0,1497.

4. По таблице плотности стандартного нормального распределения найдите $\varphi(-2{,}3)$.
а) 0,0283; б) – 0,0283; в) 0,9717.

5. По таблице плотности стандартного нормального распределения найдите $\varphi(5{,}4)$.
а) 0; б) 1; в) 0,5.

6. Выберите правильную формулу:
а) $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
б) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$;
в) $\varphi(-x) = 1-\varphi(x)$;

Задачи базового уровня

7. Вероятность заболеть некоторым инфекционным заболеванием составляет 0,04%. Карантин объявляется, когда число заболевших превысит 3%. Какова вероятность введения карантина в городе с населением 150 000 человек?

8. Эксперты считают, что новая модель стиральной машины очень надежна и вероятность ее поломки не превышает 2,5% в течение первых двух лет эксплуатации. Найти вероятность того, что из партии 5 тыс. машин потребуют ремонта а) 90 машин; б) менее 90 машин.

9. Как Вы думаете, кому, прежде всего, нужны результаты социологических исследований, опросов общественного мнения. (ВЦИОМ, 2010).

Политикам, органам власти	48
Самим социологам, проводящим исследования с научной целью	34
Средствам массовой информации	25
Деловым людям, предприятиям и бизнес-компаниям	24

Всем гражданам, интересующимся мнением других людей	23
Общественным объединениям и организациям	12
Никому по-настоящему не нужны	7
Другое	0
Затрудняюсь ответить	7

Найти вероятность того, что из 250 случайно выбранных людей а) половина считает, что социологические исследования нужны, прежде всего, органам власти; б) менее 30% полагают, что социологические исследования нужны, прежде всего, средствам массовой информации.

10. При механизированной уборке картофеля повреждается в среднем один клубень из десяти. Найти вероятность того, что в случайной выборке из 200 клубней картофеля повреждено от 15 до 50 клубней.

11. По данным Национального агентства финансовых исследований (НАФИ, апрель 2011 г.) 35% респондентов осуществляют платежи (оплата услуг ЖКХ, телефона, штрафов, кредитов и др.) через платежные терминалы (Элекснет, Киви и др.). Найти вероятность того, что среди 15 000 жителей микрорайона будут пользоваться терминалом а) не менее трети всех жителей; б) 5-6 тыс. человек.

12. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке оценивается в 10^{-8} . В течение рабочей недели банк оперирует с $8{\cdot}10^{8}$ банкнотами. Определите вероятность встретить в ходе обработки 0; 1; 2; 3 фальшивые банкноты?

13. Исследовательский центр портала SuperJob.ru (октябрь 2007 г, 1800 респондентов из всех округов РФ) провел опрос на тему: «Как Вы считаете, должен ли студент дневного отделения работать?»

Да	39%	
Нет	44%	
Затрудняюсь ответить	17%	

Найти вероятность того, что среди 450 случайно выбранных людей а) не менее 180 и не более 200 считают, что студент дневного отделения должен работать; б) более половины уверены, что работа студентов – это их учеба; в) число противников работы студентов находится в интервале от 175 до 220.

14. Выход цыплят в инкубаторе составляет 75% от числа заложенных яиц. Определите вероятность того, что из 800 заложенных яиц вылупятся а) ровно 580 цыплят; б) от 590 до 640 цыплят.

15. Опрос, проведённый Исследовательским центром портала SuperJob.ru в феврале 2009 г. на тему «Готовы ли Вы сейчас к переквалификации?», показал, что почти четверть опрошенных (23%) готовы к повышению квалификации, но только в своей сфере. 29% не исключают обучение смежным с специальностям. Готовы осваивать новую специальность с нуля 35%, причем доля женщин несколько выше − 37%, а мужчин − 34%. Чему равна вероятность того, что более 30% из 460 человек готовы осваивать новую специальность с нуля, если а) опрашиваются только мужчины; б) среди опрошенных мужчин и женщин одинаковые количества.

16. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 400 пассажиров и вероятность этого числа опоздавших.

17. В среднем каждый 60-й телевизор, выпускаемый заводом, выходит их строя до окончания гарантийного срока. Чему равна вероятность того, что из 300 выпущенных данным заводом телевизоров не более 10 поступит в гарантийный ремонт?

Задачи среднего уровня

18. Автомобильный завод имеет 3 филиала по производству комплектующих деталей. Вероятность брака составляет 2%. Найти вероятность того, что а) в партии из 10 000 деталей окажется от 160 до 190 бракованных деталей; б) в каждом из 3 филиалов количество бракованных деталей будет не более 170 шт. на партию из 10 000 деталей.

19. Вакцина против инфекционного заболевания вызывает нежелательную реакцию в 0,1% случаев и не формирует иммунитет в 0,2% случаев. Предположим, что эти эффекты независимы. Вакцина назначена 10 000 человек. Найти вероятность того, что а) не возникло ни одной нежелательной реакции и все люди приобрели иммунитет; б) произошла ровно одна нежелательная реакция и ровно двое не приобрели иммунитета.

20. Цех производит в месяц 1000 изделий, из них в среднем 40 изделий оказываются бракованными. Какова вероятность того, что в течение 5 месяцев количество бракованных изделий не будет превышать 30 изделий ежемесячно.

21. Считается, что на коэффициенты смертности от острой сердечной недостаточности влияет жесткость местной питьевой воды. При анализе годичных коэффициентов смертности от острой сердечной недостаточности на 1 000 000 человек оказалось, что в 2000 случаях вода была мягкой и в 1200 случаев − жесткой. Предположим, что два схожих поселка насчитывают по 1000 человек, причем в поселке I вода мягкая, а в поселке II − жесткая. Какова вероятность того, что в течение данного года в обоих поселках не будет случаев острой сердечной недостаточности (со смертельным исходом)? Что произойдет по два таких случая в каждом поселке?

22. Среди 10 000 сеянцев ячменя в среднем 2 из 100 сеянцев не имеют обычной зеленой окраски в результате спонтанных мутаций, влияющих на хлорофилл. Какова вероятность того, что из 10 000 случайно отобранных сеянцев ячменя ровно у двух не окажется обычной зеленой окраски.

23. Почти половина опрошенных (44%) пользователей сайта www.aif.ru при ответе на вопрос «Кино какого жанра вы предпочитаете?» предпочли комедию, 18% – мелодраму, 14% – фантастику, а боевики хотят смотреть только 8%. Найти вероятность того, что более половины из 850 случайно выбранных людей будут любителями комедии, а оставшаяся часть любит мелодраму.

24. В банке, осуществляющем кредитование населения, 1000 клиентов. Каждому из клиентов выдан кредит 500 тыс. д.е. при условии возврата 110% от этой суммы. Вероятность невозврата кредита каждым из клиентов в среднем составляет p = 0,01. Какая прибыль гарантирована банку с вероятностью: а) 0,8; б) 0,995?

25. Фирма спортивных товаров решила провести следующую рекламную акцию во время спортивного соревнования. Зрители, день рождения которых совпадет с датой основания фирмы, получат в подарок велотренажер (2 000 д.е.). Если же день рождения совпадает с датой открытия летних олимпийских игр (ближайших), то подарком будет беговая дорожка (3 000 д.е.). Какова вероятность, что фирма вручит подарков на 7 000 д.е., если на соревнования было продано 200 билетов?

26. Машина состоит из 10 000 деталей. Каждая деталь независимо от других может оказаться неисправной с вероятностью 0,0003 для

1 000 деталей, 0,0002 для 2 000 деталей, 0,0001 для 7 000 деталей. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы 2 детали. Чему равна вероятность, что машина не будет работать?

Задачи повышенной сложности

27. Театр, вмещающий 1000 зрителей, имеет два входа. У каждого входа имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает с вероятностью 0,5 любой из подъездов.

28. Планируя свою деятельность по одному из видов рискового страхования с размером страховой суммы 1000 д.е., нетто-ставкой 0,02 и вероятностью наступления страхового события 0,01, страховая компания желала бы получить прибыль не менее 100 000 д.е. Какое минимальное число договоров нужно заключить, чтобы получить указанный размер прибыли с вероятностью не менее 0,99, если размер страхового взноса равен 50 д.е.

29. Портфель страховой компании состоит из 1000 договоров, заключенных 1 января и действующих в течение текущего года. При наступлении страхового случая по каждому из договоров компания обязуется выплатить 2000 д.е. Вероятность наступления страхового события по каждому из договоров равна 0,05 и не зависит от наступления страховых событий по другим контрактам. Каков должен быть совокупный размер резерва страховой компании для того, чтобы с вероятностью 0,99 она могла удовлетворить требования, возникающие по указанным договорам.

Творческие задачи

30. Переформулируйте задачу на указанную тему и решите ее.

Задача. Опрос 150 казанцев в январе 2003 г. на тему «Что для вас телевидение?» дал следующие результаты: 45% – источник информации, 23% – развлечение, 11% – член семьи, 10% – неизбежное зло, 11% – затрудняюсь ответить. Найти вероятность того, что число людей, воспринимающих телевидение как развлечение, среди 600 случайно опрошенных будет а) не более трети из них; б) не менее 10 человек.

Тема: локальная теорема Муавра-Лапласа.

31. При штамповке изделий из пластмассы на каждые 6 изделий приходится одно дефектное. Найти вероятность того, что из 80 изготовленных изделий число стандартных будет в пределах от 10 до 12. Решите задачу тремя способами: по формулам Бернулли, локальной теореме Муавра-Лапласа, интегральной теореме Муавра-Лапласа.

32. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. 70% россиян считают новогодние скидки обманом.
Тема: интегральная теорема Муавра-Лапласа.

33. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. Вероятность отказа датчика противопожарной безопасности в течение месяца равна 0,01. Всего установлено 10 000 датчиков.
Тема: локальная теорема Муавра-Лапласа.

34. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. На предприятии работают 700 рабочих. Вероятность несчастного случая на производстве равна 0,0002.
Тема: теорема Пуассона.

35. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. Опрос SuperJob.ru, август 2012 г.

Тема: интегральная теорема Муавра-Лапласа.

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

6. Случайные величины. Распределение случайных величин

Ключевые слова: *случайная величина, функция распределения, дискретное распределение, закон распределения, непрерывное распределение, плотность вероятностей.*

Случайная величина (коротко с. в.) является некоторой функцией, приписывающей действительные числа каждому исходу эксперимента. В предыдущих главах мы занимались случайными величинами, не употребляя этого термина. Например, случайными величинами являются: число выпадений «герба» при n подбрасываниях монеты, число «успехов» в n испытаниях схемы Бернулли.

Чтобы избежать путаницы, будем обозначать случайные величины греческими буквами (ξ, η, ζ) или прописными латинскими буквами (X, Y, Z), а принимаемые ими значения – строчными латинскими (x, y, z).

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$.

Свойства функции распределения $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
3. $F(x)$ – неубывающая функция;
4. $F(x)$ – непрерывна слева.

Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, заключенное в интервале $[a; b]$, определяется формулой

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Обычно рассматривают два типа случайных величин: дискретные и непрерывные.

Случайная величина ξ имеет *дискретное распределение*, если множество всевозможных значений $\{x_1, x_2, ...\}$ конечно или счетно.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Закон распределения можно задать в виде таблицы:

ξ	x_1	x_2	...
p	p_1	p_2	...

,

где $P(\xi = x_i) = p_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Случайная величина ξ имеет *непрерывное распределение*, если её функция распределения представлена в виде

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (или *плотностью вероятностей*).

Плотность вероятностей обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

$$P(a \leq \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

Дискретные случайные величины принимают в результате испытания одно значение из некоторого дискретного множества. Непрерывные случайные величины в результате испытания могут принимать любые значения из некоторого интервала.

Примеры решения задач

Пример 1. Стрелок попадает в цель в одном случае из пяти. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа попаданий в цель, если охотнику предоставляется четыре попытки. Найти вероятность того, что число попаданий будет не более одного.

Решение. Случайная величина ξ (число попаданий в цель) является дискретной и принимает следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни одного попадания), $x_2 = 1$ (одно попадание), $x_3 = 2$ (два попадания), аналогично $x_4 = 3$ и $x_5 = 4$.

Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью $p = 1/5$, причём результаты выстрелов никак между собой не зависят, следовательно, случайная величина ξ имеет биномиальное распределение. За «успех» обозначим событие A = {охотник попал в цель},

$$p = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ и } q = 1 - p = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

По условию у охотника четыре попытки, следовательно, $n = 4$.

$P(\xi = 0) = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^{4-0} = (0{,}8)^4 = 0{,}4096;$

$P(\xi = 1) = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^{4-1} = \frac{4!}{1!3!}\, 0{,}2\cdot(0{,}8)^3 = 0{,}4096;$

$P(\xi = 2) = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4!}{2!2!}\, (0{,}2)^2\cdot(0{,}8)^2 = 0{,}1536;$

$P(\xi = 3) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!1!}\, (0{,}2)^3\cdot(0{,}8) = 0{,}0256;$

$P(\xi = 4) = P_4(4) = C_4^0 p^0 q^{4-0} = (0{,}2)^4 = 0{,}0016.$

Для большей наглядности представим закон распределения в виде следующей таблицы:

ξ	0	1	2	3	4
p_i	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

По определению закона распределения должно выполняться равенство $\sum_i p_i = 1$.

Сделаем проверку: $\sum_i p_i = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 + 0{,}0016 = 1.$

Для вычисления вероятности следующего события

A = {число попаданий не более 1} = {ξ ≤ 1} будем использовать теорему сложения:

$P(\xi \le 1\} = P(\xi = 0 \text{ или } \xi = 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192.$ ■

▶ **Пример 2.** Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0; & x<-1\\ a(x+1); & -1\le x\le \dfrac{1}{3}\\ 1; & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения *f(x)*; б) коэффициент *a*; в) вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (0; 1/4); г) вероятность, что случайная величина ξ примет значение не меньшее 1/5.

Решение. а) Согласно определению:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0; & x<-1\\ a; & -1\le x\le \dfrac{1}{3}\\ 0; & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

б) Коэффициент *a* легче искать, используя свойство 2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Так как функция *f(x)* имеет разрывы в точках – 1 и 1/3, то исходный интеграл будет распадаться на три интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{1/3}adx+\int_{1/3}^{+\infty}0dx=\int_{-1}^{1/3}adx=ax\Big|_{-1}^{1/3}=a\frac{4}{3}=1$$

Отсюда $a=\frac{3}{4}$. (Формулы для вычисления интегралов даны в Приложении, с.100.)

в) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (0; 1/4), то есть $P(0<\xi<1/4)$, можно найти двумя способами.

Способ 1. Используем формулу (1).

$$P\left(0<\xi<\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)-F(0)=\frac{3}{4}(x+1)\Big|_{x=1/4}-\frac{3}{4}(x+1)\Big|_{x=0}=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)-\frac{3}{4}(0+1)=\frac{3}{16}.$$

Способ 2. Используем формулу (2).

$$P\left(0<\xi<\frac{1}{4}\right)=\int_0^{1/4} f(x)dx=\int_0^{1/4}\frac{3}{4}dx=\frac{3}{4}x\Big|_0^{1/4}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{3}{16}.$$

г) Найдём $P(\xi\le 1/5)$. Если мы представим условие в виде двойного неравенства $1/5\le \xi<+\infty$, то можно использовать любой из указанных выше способов.

Для разнообразия найдём искомую вероятность через противоположное событие:

$$P\left(\xi\ge\frac{1}{5}\right)=1-P\left(\xi<\frac{1}{5}\right)=1-F\left(\frac{1}{5}\right)=1-\frac{3}{4}(x+1)\Big|_{x=\frac{1}{5}}=1-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}+1\right)=\frac{1}{10}.$$ ■

? *Контрольные вопросы*

1. Что представляет собой случайная величина?
2. Какие существуют типы случайных величин?
3. Что представляет собой закон распределения случайной величины?
4. Для каких случайных величин используется функция распределения?
5. Для каких случайных величин используется функция плотности?

Задачи к § 6

Задачи элементарного уровня

1. Определите, какие из приведенных таблиц могут быть законами распределений.

а)

ξ	1	2	3	4
p	0,4	0,1	0,3	0,3

б)

ξ	0	1	4	6
p	0,4	0,2	0,3	0,1

В задачах 2, 3 вычислите неизвестную вероятность в законе распределения дискретной случайной величины.

2.

ξ	0	2	3	5
p	0,1	p_2	0,4	0,3

а) 0,1; б) 0,2; в) 0,3.

3.

ξ	3	5	8	9
p	0,2	0,2	p_3	0,3

а) 0,1; б) 0,2; в) 0,3.

4. Определите, какие из функций не являются функциями распределения.

а) $g(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & 0\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$; б) $g(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x^2}{3}, & 1\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$;

в) $g(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -2x, & 0\le x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$.

Задачи базового уровня

5. «Коррупция в принципе непобедима» − так считают 58% россиян (опрос ВЦИОМ, апрель 2009 г.). Случайным образом было выбрано 4 человека. Составьте закон распределения случайной величины X – числа людей, не согласных с этим мнением. Найти вероятность того, что более половины респондентов будут иметь другое мнение по этому вопросу.

6. Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым − 0,8. Составить закон распределения случайной величины X − числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен, если он его первый раз не сдал.

7. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,9. При изготовлении такой детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовили две детали, а на втором – одну. Составить закон распределения числа первосортных деталей. Чему равна вероятность того, что хотя бы две детали будут первосортными?

8. В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 5000 д.е., четыре телевизора стоимостью по 250 д.е., пять ноутбуков стоимостью по 200 д.е. Всего продано 1000 билетов по 7 д.е. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

9. Опрос студентов в сентябре 2008 г. показал, что 18% респондентов хотят работать в органах муниципальной и государственной власти. Случайным образом было выбрано 3 студента. Составить закон распределения случайной величины X − числа студентов, желающих работать в органах муниципальной и государственной власти.

10. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что первый вызов будет принят, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4.

Составить закон распределения числа отправленных вызовов, если после первого же принятого вызова прием заканчивается.

11. Фермер содержит 15 коров, 5 из которых дают удои более чем 4500 л в год. Случайным образом отобраны 3 принадлежащие этому фермеру коровы. Составить закон распределения случайной величины X – числа коров, дающих указанные высокие удои среди отобранных.

12. В группе из 10 спортсменов 7 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) двух спортсменов. Составить закон распределения случайной величины X − числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Какова вероятность, что отобрали только мастеров спорта?

13. Стрелок начинает стрелять по движущейся цели до первого попадания, имея четыре патрона. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, а при каждом последующем уменьшается вдвое. Составить закон распределения числа сделанных выстрелов. Найти вероятность того, что выстрелов будет не более двух.

14. Вероятность того, что человек обучается выполнению некоторого задания в среднем за x минут, оценивается как $1-(1+x)^{-1}$. Чему равна вероятность того, что на обучение потребуется менее 10 минут? Менее 1 ч?

15. Известно, что среднее время ожидания очередного покупателя, подошедшего к кассе, равно 0,2 минуты. Время ожидания кассиром очередного покупателя можно считать случайной величиной, имеющей показательный закон распределения. Кассиру нужно сменить ленту кассового аппарата. На это ему требуется две минуты. Какова вероятность того, что за это время не образуется очередь?

16. Вероятность того, что кошка поймает мышь, со временем погони возрастает и задается величиной $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/10}$, где t выражается в минутах. Допустим, что после 15 минут погони кошка всегда устает и отказывается от преследования. Какой процент мышей избегает поимки? Чему равны в процентах доли мышей, пойманных за 5, 10 и 15 мин?

17. Случайная величина X задана следующим распределением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2 \\ 0{,}3, & \text{если } 2 < x \le 3 \\ 0{,}5, & \text{если } 3 < x \le 4 \\ 1, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

Вычислить $P\{X \ge 3{,}5\}$ и $P\{|X| < 2{,}5\}$.

18. Вероятность дозвониться до аварийной службы составляет 0,8. В квартире прорвало трубу отопления и надо срочно вызвать специалистов. Постройте закон распределения числа попыток дозвониться. С какого по счету звонка вероятнее всего дозвониться до аварийной службы.

19. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. 1) Составить закон распределения случайной величины X − числа попаданий в мишень второго стрелка, если у него было 3 попытки. 2) Составить закон распределения случайной величины Y − числа попаданий в мишень, если у первого стрелка было 2 попытки, а у второго − только одна. Чему равна вероятность того, что в мишени будет не более одной пробоины?

В задачах 20, 21 требуется найти неизвестную константу в выражении для функции распределения, определить функцию плотности и вероятность указанного интервала.

20.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}, & -2\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

[– 1; 1]

21.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a(1-\cos x), & 0\le x\le \pi \\ 1, & x>\pi \end{cases}$$

[0; π/4]

Задачи среднего уровня

22. Из каждой сотни изделий 90 являются первосортными. Случайным образом отобраны 5 изделий. Составить закон распределения с.в. ξ, равной числу изделий первого сорта.

23. Дискретная с. в. X задана таблицей распределения:

X	– 2	– 1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

а) для с. в. $Y = X^2$ найти: 1) закон распределения; 2) вероятность попадания с.в. Y в интервал (0,5; 1,5); 3) вероятность того, что с. в. Y не превосходит 3.

б) для с.в. $Z=|X|$ найти: 1) закон распределения; 2) вероятность того, что с.в. Z принадлежит интервалу (– 1; 1.2); 3) вероятность того, что с. в. Z не превосходит 1,5.

24. Число претензий по качеству продукции за один месяц моделируется случайной величиной X с распределением

$$P(X=n)=\frac{1}{(n+1)(n+2)},\ \ \mathrm{n}\geq 0.$$

Найти вероятность того, что за месяц будет предъявлена хотя бы одна претензия, если известно, что число подобных случаев за месяц не превосходит 4.

25. Для некоторого вида договоров известно, что

$$P(X=0)=\frac{1}{2},\ P(X=1)=\frac{1}{3},\ P(X>1)=\frac{1}{6},$$

где $X-$ число страховых случаев в течение года по одному договору.

Пусть Y − суммарное страховое возмещение за один год по одному договору. Если X = 1, то Y имеет экспоненциальное распределение со средним 5, а если X > 1, то X имеет экспоненциальное распределение со средним 8. Найдите $P(4 < X < 8)$.

В задачах 26-29 требуется найти неизвестную константу в выражении для функции плотности, определить функцию распределения и вероятность указанного интервала. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях с. в. ξ примет ровно два раза значения, заключенные в указанном интервале.

26.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ a(3-x), & 3\leq x\leq 5\\ 0, & x>5\end{cases}$$

(3; 14)

27.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a(3x-x^2), & 0\leq x\leq 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

(1; 2)

28.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 2, & 2\leq x\leq 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

(2,7; 3)

29.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & a\leq x\leq 2{,}8\\ 0, & x>2{,}8\end{cases}$$

(2; 3)

30. Ущерб от возможного пожара в магазине моделируется случайной величиной Y с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0{,}005(20-x), & \text{если } 0<\mathrm{x}<20,\\ 0, & \textit{в противном случае}\end{cases}$$

Если ущерб от пожара больше 8, чему равна вероятность того, что ущерб больше 16?

Задачи повышенной сложности

31. В небольшом приморском городе годовые потери из-за штормов, пожаров и хищений являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами со средними значениями 1, 1,5 и 2,4 соответственно. Найдите вероятность того, что максимальный из этих ущербов будет больше чем 3.

32. Найти неизвестную константу в выражении для функции распределения, определить функцию плотности и вероятность указанного интервала.

$$F(x) = C + \frac{x^3 - |x^3|}{1 + 2|x^3|},$$ интервал [– 2; 2]

33. Распределение дискретной с. в. X равно

$$P(X = k) = \frac{C}{k(k+1)(k+2)}, \ k = 1,2,...$$

Найти а) неизвестную константу С; б) $P(X \geq 3)$; в) $P(n_1 \leq X \leq n_2)$.

34. Пусть ξ и η − независимые случайные величины с плотностями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$.

Найти функцию плотности с.в. ς, если а) ς = *max*(ξ, η); б) ς = *min*(ξ, η).

Творческие задачи

35. Найдите неизвестную константу С в выражении для функции распределения двумя способами (по свойству 2 для *F(x)* и по свойству 2 для *f(x)*):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{Cx}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$$

36. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные. Согласно опросу НАФИ (2011 г.) 71% опрошенных не согласились бы оформить кредитную карту, если бы банк предложил.

Тема: закон распределения.

37. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные. Вероятность правильного оформления накладной при передаче товара равна 0,9.
Тема: закон распределения.

38. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.
Исходные данные. Имеются 6 кепок белого цвета, 7 − цвета «хаки», 4 − синего.
Тема: закон распределения.

7. Числовые характеристики случайных величин

Ключевые слова: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение (или среднее квадратическое отклонение).

В предыдущем разделе мы видели, что наиболее полная характеристика случайной величины дается её функцией распределения. Если она известна, то мы можем сказать, какие значения принимает случайная величина и с какими вероятностями. Однако при решении некоторых задач такая подробная информация не требуется, нам достаточно некоторого суммарного представления. Для этой цели служат различные числовые характеристики случайной величины. Наиболее важные из них – математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием (средним) дискретной случайной величины ξ называют число

$$\mathsf{E}\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots = \sum_k x_k p_k . \tag{1}$$

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$

$$\mathsf{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx . \tag{2}$$

Математическое ожидание показывает «средний» исход эксперимента, то есть какие значения случайной величины являются наиболее характерными.

Свойства математического ожидания.

1. Если C – постоянная, то $\mathsf{E}C = C$.
2. Если C – постоянная, то $\mathsf{E}\,(C\xi) = C\,\mathsf{E}\,\xi$.
3. $\mathsf{E}(\xi + \eta) = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta$.
4. Если ξ, η – независимы, то $\mathsf{E}(\xi \cdot \eta) = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$.

Если $\eta = g(\xi)$ есть функция от случайной величины ξ, то математическое ожидание случайной величины η находится по следующим формулам.

$$\mathrm{E}\eta = \mathrm{E}g(\xi) = \sum_k g(x_k)p_k \text{, если } \xi \text{ – дискретная с.в.}$$

$$\mathrm{E}\eta = \mathrm{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \text{, если } \xi \text{ – непрерывная с.в.}$$

Математическое ожидание или ожидаемое значение дает среднее тех значений, которые принимаются случайной величиной, если эксперимент повторяется много раз. Это дает нам важную, но не достаточную информацию. Часто бывает необходимо знать, насколько широко разбросаны значения случайной величины относительно её математического ожидания. Так как отклонения значений случайной величины от её математического ожидания могут быть как положительными, так и отрицательными, то мы будем рассматривать квадрат отклонения.

Дисперсией с. в. ξ называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной ξ и ее математическим ожиданием:

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2.$$

Стандартным отклонением (или средним квадратическим отклонением) называется положительный квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi} = \sqrt{\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2}.$$

Дисперсия и стандартное отклонение характеризуют рассеяние (разброс, вариативность) значений случайной величины. Чем меньше дисперсия, тем меньше рассеяние значений случайной величины и тем «ближе» они к своему математическому ожиданию.

Свойства дисперсии.

1. $\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$.
2. Если C – постоянная, то $\mathrm{D}C = 0$.
3. Если C – постоянная, то $\mathrm{D}(C\xi) = C^2\mathrm{D}\xi$.
4. Если ξ и η – независимы, то $\mathrm{D}(\xi \pm \eta) = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta$.

Запишем формулы дисперсии с.в. ξ согласно определению и свойству 1.

Для дискретной с. в. ξ

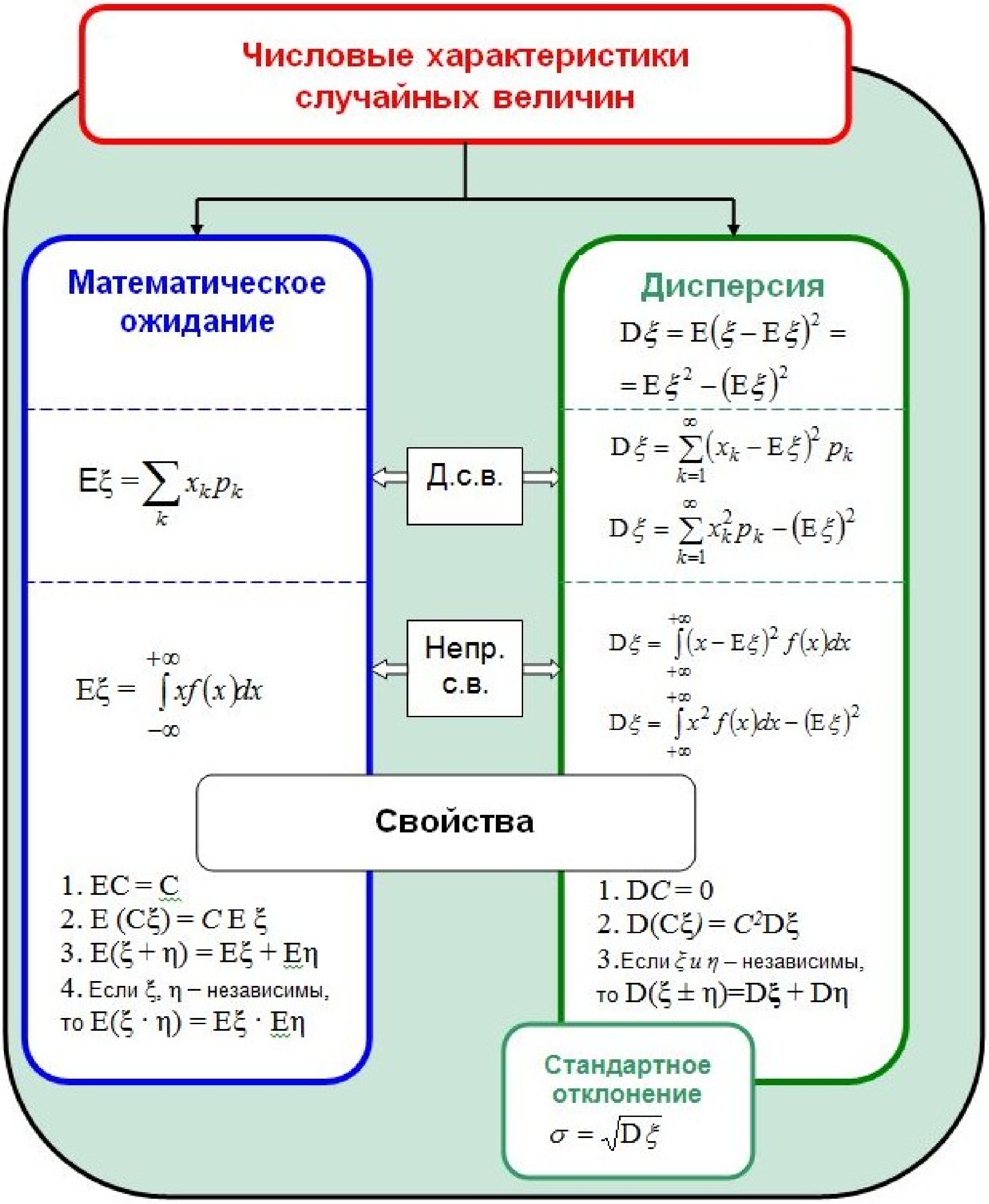
$$\mathrm{D}\xi = \sum_{k} \left(x_k - \mathrm{E}\xi\right)^2 p_k = \sum_{k} x_k^2 p_k - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2. \tag{3}$$

Для непрерывной с. в. ξ с плотностью распределения *f(x)*

$$\mathrm{D}\xi = \int_{+\infty}^{+\infty} \left(x - \mathrm{E}\xi\right)^2 f\left(x\right)dx = \int_{+\infty}^{+\infty} x^2 f\left(x\right)dx - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2. \tag{4}$$

Для некоторых распределений выведены более простые формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии. Например, если ξ имеет биномиальное распределение: ξ ~ *Bin(n; p)*, то Eξ = *np* и Dξ = *npq*, где *n* – число экспериментов, *p* – вероятность «успеха».

На рис. 1 (с. 98) изображены основные формулы этого раздела.



Обозначения: Д.с.в. − дискретная случайная величина,
Непр.с.в. − непрерывная случайная величина,
С − постоянная

Рис. 1

Примеры решения задач

Пример 1. Найти математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение с.в. ξ, заданной следующим законом

ξ	1	4	6
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Так как ξ – дискретная случайная величина, то используем формулы (1) и (3).

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k = 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}6 + 6\cdot 0{,}3 = 4{,}3.$$

$$\mathrm{D}\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 p_k - (\mathrm{E}\xi)^2 = \left(1^2\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}6 + 6^2\cdot 0{,}3\right) - (4{,}3)^2 = 2{,}01.$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi} = \sqrt{2{,}01} = 1{,}42.$$ ■

Пример 2. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0; & \tilde{o} < 2 \\ 6 - 2x; & 2 \le x \le 3. \\ 0; & x > 3 \end{cases}$$

Для с.в. ξ найти а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) стандартное отклонение, г) используя свойства математического ожидания и дисперсии, найти математическое ожидание и дисперсию с. в. $Y = 3X + 2$.

Решение. С.в. ξ имеет непрерывное распределение, поэтому мы будем использовать формулы (2) и (4).

$$\text{а) } \mathrm{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{2} 0 + \int_{2}^{3} x(6-2x)dx + \int_{3}^{+\infty} 0 = \int_{2}^{3}\left(6x - 2x^2\right)dx = \left.\frac{6x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right|_2^3 =$$

$$= \left(3\cdot 3^2 - 2\cdot\frac{3^3}{3}\right) - \left(3\cdot 2^2 - 2\cdot\frac{2^3}{3}\right) = \frac{7}{3}.$$

$$\text{б) } \mathrm{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathrm{E}\xi)^2 = \int_{2}^{3} x^2(6-2x)dx - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \int_{2}^{3}\left(6x^2 - 2x^3\right)dx - \frac{49}{9} =$$

$$= \left.\frac{6x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right|_2^3 - \frac{49}{9} = \left(2\cdot 3^2 - \frac{3^4}{2}\right) - \left(2\cdot 2^3 - \frac{2^4}{2}\right) - \frac{49}{9} = \frac{1}{18}.$$

в) $\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0{,}24$.

г) Найдем математическое ожидание с.в. Y. Используем свойства 1-3 математического ожидания:

$EY = E(3X + 2) = E(3X) + E(2) = 3E(X) + 2 = 3\cdot\frac{7}{3} + 2 = 9$.

Аналогично (по свойствам дисперсии 2-4) вычислим дисперсию случайной величины *Y:*

$DY = D(3X + 2) = D(3X) + D(2) = 3^2 D(X) + 0 = 9\cdot\frac{1}{18} = 2$. ■

► **Пример 3**. Всероссийский центр изучения общественного мнения (ВЦИОМ) в феврале 2009 г. провел опрос о том, какие автомобили − отечественные или иностранные − планируют покупать наши сограждане. Результаты опроса представлены в следующей таблице.

Какой автомобиль Вы хотите приобрести? (закрытый вопрос, один ответ, от тех, кто собирается покупать автомобиль,%)		
	2006	**2009**
Новый, отечественной марки	35	12
Подержанный, отечественной марки	19	10
Новую «иномарку»	19	24
Подержанную «иномарку»	20	25
затрудняюсь ответить	7	29

Согласно прогнозу маркетингового исследования, количество потенциальных покупателей составляет 8600 человек для данного региона.

1. Каково ожидаемое число покупателей данного региона, предпочитающих новые отечественные автомобили (2009 г.)? Найдите дисперсию и стандартное отклонение.

2. Каково предполагаемое число людей, планирующих приобрести «иномарку»? Сравните показатели за 2006 и 2009 гг.

Решение. 1) Пусть с. в. ξ – число людей, которые собираются купить новый отечественный автомобиль. Поскольку с. в. ξ имеет биномиальное распределение, то $E\xi = np$, $D\xi = npq$.

В нашей задаче $n = 8600$; $p = 0{,}12$; $q = 0{,}88$ и, следовательно,

$$E\xi = 8600 \cdot 0{,}12 = 1032;\ D\xi = 8600 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88 = 908{,}16;$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{908{,}16} = 30{,}14.$$

Таким образом, в 2009 г. из 8600 потенциальных покупателей в среднем 1032 человека предполагали купить новый отечественный автомобиль.

2) Пусть η – число людей, планирующих приобрести «иномарку».

В 2006 г. приобрести новую «иномарку» собирались 19% покупателей и еще 20% − подержанную «иномарку». Следовательно, в целом 19% + 20% = 39% покупателей планировали приобрести «иномарку». Тогда p = 0,39; Eη = 8600 · 0,39 =3354.

Аналогично для 2009 г.: p = 0,49; Eη = 8600 · 0,49 = 4214.

Итак, ожидаемое число покупателей «иномарок» за 3 года увеличилось с 3354 до 4214 человек.

Примечание. Давая экономическую интерпретацию данной задачи, следует упомянуть следующий факт. С целью поддержки отечественного автопрома были введены льготы на покупку отечественный автомобилей, что в значительной степени увеличило объемы их продаж. ■

▶ **Пример 4.** Магазин продает металлические двери нескольких моделей, каждая по 10 тыс. д.е. Количество проданных дверей за день (X) описывается следующим законом распределения:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,05	0,1	0,15	0,3	0,3	0,1

Текущие расходы (аренда помещений, зарплата сотрудников, налоги и т.д.) составляют в день 11 тыс. д.е. Найти ожидаемое значение ежедневной прибыли магазина.

Решение. Ежедневная прибыль магазина (П) определяется по формуле П = 10 ·X − 11.

Тогда по свойствам математического ожидания имеем:

EП=E(10 · X − 11) = 10EX − 11.

Найдем EX: EX =0·0,05+1·0,1+2·0,15+3·0,3+4·0,3+5·0,1=3 (двери).

Ожидаемая ежедневная прибыль магазина равна

EП = 10 · 3 − 11 = 19 тыс. д.е. ■

Контрольные вопросы

1. Какие характеристики рассчитываются для случайных величин?
2.Что характеризует математическое ожидание?
3. Назовите основные свойства математического ожидания.
4. Что характеризует дисперсия?
5. Назовите основные свойства дисперсии.
6. Как связаны между собой дисперсия и стандартное отклонение?

Задачи к § 7

Задачи элементарного уровня

В задачах 1-4 определите, какие из приведенных значений математического ожидания являются ошибочными для указанных законов распределений.

1.

ξ	1	2	4	6
p	p_1	p_2	p_3	p_4

а) – 1; б) 2,5; в) 10.

2.

ξ	3	5	7
p	p_1	p_2	p_3

а) 0; б) 4; в) 8.

3.

ξ	– 1	0	2	5
p	p_1	p_2	p_3	p_4

а) 0; б) – 4; в) 4,2.

4.

ξ	13	14	18
p	p_1	p_2	p_3

а) 0; б) 15; в) 24.

В задачах 5, 6 определите, какие из приведенных значений дисперсии являются ошибочными.

5.

ξ	–1	0	3	4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

а) – 1; б) 500; в) 2.

6.

ξ	2	6	7
p	p_1	p_2	p_3

а) 0; б) – 2; в) – 7.

Задачи базового уровня

7. В партии 6% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа нестандартных деталей среди трех отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию числа нестандартных деталей.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Стрелкам предоставляется по 8 попыток. Найти среднее ожидаемое число попаданий в мишень а) первого стрелка; б) второго стрелка.

9. Для обновления оборудования предприятие закупило 50 станков. Модель станка была выбрана по принципу «соотношение: цена/качество». По результатам первого года эксплуатации, в течение которого 10% станкам потребовался ремонт, руководство предприятия признало закупку данного оборудования ошибочной. В свою очередь специалисты доказали, что даже при таком уровне поломок, закупленное оборудование обеспечивает непрерывную работу предприятия. Какой довод привели специалисты, если для функционирования предприятия необходимо 44 работающих станка?

В задачах 10 – 15 требуется найти неизвестные вероятности, математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение, вероятность указанного интервала.

10.

ξ	0	1	2
p	?	0,5	0,3

[–0,5; 1,5]

11.

ξ	2	5	8
p	0,2	?	0,5

[1,4; 6,8]

12.

ξ	3	4	5
p	0,2	0,6	?

[2,5; 4,5]

13.

ξ	8	10	12
p	0,3	0,6	?

[8; 11]

В задачах 14,15 перейти к новой переменной η.

14.

ξ	10	20	30
p	0,1	0,5	?

[15; 25]

15.

ξ	100	150	200	250	300
p	0,4	0,3	0,2	?	0,05

[132; 259]

16. Найти неизвестную вероятность и дисперсию. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. Z = 2ξ + 4.

ξ	0	1	2
p	?	0,6	0,1

17. Найти среднее и дисперсию с.в. Z, если известны средние и дисперсии независимых с.в. X и Y : а) $Z = X + 3Y + 2$, $EX = 4$, $EY = 5$, $DX = 4$, $DY = 2$; б) $Z = 6X – 2Y – 6$, $EX = 3$, $EY = 6$, $DX = 8$, $DY = 6$.

18. 60% россиян не могут прожить без мобильного телефона ни дня (опрос ВЦИОМ, проведенный по заказу исследовательской компании IFORS в августе 2009 г.). Случайно выбирают 2 человека. Построить закон распределения числа людей, согласных с этим мнением. Найти среднее, дисперсию и стандартное отклонение числа людей, не мыслящих свою жизнь без мобильного телефона.

19. В качестве эксперимента в городе были установлены 10 платежных терминалов. Практика показала, что для города с населением 17200 человек такого количества терминалов явно недостаточно. Фирма решила дополнительно установить терминалы из расчета на 1000 человек − 2 терминала. За основу для расчетов количества потенциальных пользователей платежными терминалами было решено взять количество пользователей сотовой связью, как более привычной к электронным услугам части населения. Сколько следует дополнительно установить платежных терминалов, если по оценкам Левада-центр сотовый телефон в России имеют 86 % населения?

20. Вероятность связаться с абонентом по телефону при каждой попытке равна 0,7. Составить закон распределения числа попыток до первого ответа абонента, если известно, что число попыток не превосходит четырех. Найти вероятность того, что попыток будет не менее двух. Каково математическое ожидание числа попыток?

21. У торгового агента имеется пять потенциальных покупателей, к которым он обращается по списку с предложением приобрести реализуемый фирмой товар. Вероятность согласия потенциальных покупателей оценивается как 0,5; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,25. Покупатели принимают решение о покупке товара независимо друг от друга. Агент обращается к ним в порядке снижения шансов на покупку, пока кто-нибудь из них не согласится приобрести товар. Чему равна вероятность того, что агенту «повезет» только с третьим покупателем? Найти математическое ожидание и дисперсию числа покупателей, к которым обратился агент.

22. Только 13% жителей Казани делают прививку против гриппа. Такие данные были получены в ходе социологического опроса «Что вы делаете для того, чтобы уберечься от гриппа и ОРЗ?» (октябрь 2002 г., опрошено 150 человек). Почти половина опрошенных (43%)

предпочитают испытанные народные средства – налегают на лук и чеснок. Около 24 % заранее принимают лекарства и 20 % - вообще ничего не предпринимают. Каково среднее ожидаемое число людей, имеющих прививку против гриппа среди 30 000 жителей Казани? Сколько в среднем из них просто надеются на лучшее (то есть ничего не предпринимают)?

23. Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

24. Согласно опросу ВЦИОМ в июле 2008 г. на вопрос «Что предпринимается Вами, членами Вашей семьи для того, чтобы улучшить материальное положение?» 18 % респондентов ответили, что работают дополнительно (по совместительству, по контракту, по устной договоренности и т. п.). Для описания ситуации на рынке труда определите предполагаемое число людей, работающих дополнительно, среди 15 000 жителей микрорайона.

25. По оценкам специалистов некоторый вид пищи вызывает аллергическую реакцию у 0,01% человек. Каково предполагаемое число аллергических реакций у 100 000 людей, принимающих эту пищу?

26. Исследовательский центр портала SuperJob.ru в июне 2006 г. проводил опрос на тему: «Ваша работа для Вас, прежде всего...». Были получены следующие результаты.

45% − средство зарабатывания денег для возможности развития ВНЕ профессиональной деятельности; в более важных мне областях (семья, увлечения и т.п.);

46% − средство самореализации, раскрытия своего потенциала ВНУТРИ тпрофессиональной деятельности, которая меня привлекает;

9% − затрудняюсь отвеить.

Каково среднее ожидаемое число людей, которые больше нацелены на раскрытие своего профессионального потенциала, среди 700 человек. Сравните полученный результат с аналогичным исследованием аналитической компании Ipsos во Франции (2006 г.). Для французских респондентов материальное благополучие и развитие вне профессиональной деятельности оказалось гораздо важнее самореализации на работе (64% против 34%).

В задачах 27, 28 необходимо найти а) неизвестный параметр a; б) функцию распределения; в) числовые характеристики случайной величины; г) вероятность указанного интервала.

27. $f(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ a(3x-x^2); & 0\le x\le 3\\ 0; & x>3\end{cases}$ [1; 2]

28. $f(x)=\begin{cases}0; & x<3\\ a(3-x); & 3\le x\le 5\\ 0; & x>5\end{cases}$ [3; 14]

В задачах 29, 30 необходимо найти: а) неизвестный параметр a; б) функцию плотности; в) числовые характеристики случайной величины; г) вероятность указанного интервала; д) зная EX и DX и используя свойства среднего и дисперсии, найти среднее и дисперсию с.в. Y = 2X + 5.

29. $F(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ ax^2(8-\mathrm{x}^2); & 0\le x\le 2\\ 1; & x>2\end{cases}$ [1; 15]

30. $F(x)=\begin{cases}0; & x<2{,}5\\ ax-5; & 2{,}5\le x\le 3\\ 1; & x>3\end{cases}$ [1; 3]

Задачи среднего уровня

31. Составить закон распределения дискретной случайной величины ξ, которая может принимать только два значения: x_1 с вероятностью p_1 = 0,1 и x_2 с вероятностью p_2, причём $x_1 < x_2$. Математическое ожидание равно 5,5, а дисперсия – 2,25.

32. Случайная величина ξ принимает три возможных значения: x_1 = 4 с вероятностью p_1 = 0,5; x_2 = 6 с вероятностью p_2 = 0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, если известно, что $\mathrm{E}\xi = 8$.

33. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Стрелкам предоставляется по 8 попыток. Найти среднее ожидаемое число и дисперсию одновременных попаданий в мишень.

34. Продолжение Примера 7 (§1) и задач №20 (§§2-4). Когда семья Климентьевых добирается на дачу общественным транспортом, то в каждом четвертом случае старший сын Василий находит «возможность» потеряться по дороге и приезжает на дачу уже на следующий день. Родители в воспитательных целях с июля решили наложить на Василия штраф: за каждый день отсутствия на даче Василий должен отработать по 4 часа на огороде. Каково среднее ожидаемое число человеко-часов, которые Василий отработает на благо семьи, если частота «прогулов» останется прежней. При расчете следует учитывать только поездки на выходные (суббота, воскресенье) с июля по сентябрь включительно.

35. Даны законы распределения двух независимых с.в. X и Y:

а)

X	0	1	3	4
P	0,1	0,6	0,2	0,1

б)

Y	1	2	4
p	0,5	0,3	0,2

Составить закон распределения с.в. Z = X + Y. Проверить справедливость свойства дисперсии суммы.

36. Частота туберкулеза в большой популяции оценивается как 4 случая на 10 000 человек. Предположим, что случайно выбирают 20 000 человек и проверяют их на туберкулез с помощью некоторого теста, указывающего на заболевание в 95% случаев, когда оно есть, и в 5% случаев, когда его нет.
1) Каково среднее ожидаемое число людей в этой выборке, у которых имеется заболевание? 2) Каково среднее ожидаемое число людей, у которых этот тест укажет наличие заболевания (и которым потребуется дальнейшая проверка)? 3) Каково среднее ожидаемое количество людей с туберкулезом, который не обнаружится с помощью данного теста? 4) Какова вероятность того, что в этой выборке не будет пропущен ни один случай туберкулеза?

37. Пусть X − суммарная годовая премия, собранная страховой компанией, а Y − общий размер страховых возмещений, выплаченных в течение этого года. Отношение $r = \dfrac{Y}{X}$ часто используется в качестве простейшей характеристики успешности ведения страхового бизнеса в течение года. Допустим, что X и Y являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами со средними значениями 2 и 1 соответственно. Найдите среднее значение величины r.

38. Годовой возврат (процент доходности) акции А представлен распределением с.в. ξ, а для акции В − с.в. η.

ξ	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,02	0,04	0,26	0,28	0,21	0,1	0,08	0,01

η	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,03	0,06	0,25	0,25	0,22	0,1	0,08	0,01

Какие акции предпочтительнее купить? (Указание: найдите средний годовой возврат и дисперсию по каждому типу акции.)

39. Владелец автомобиля застраховал его на случай повреждения в аварии. Договор предусматривает простой вычет d = 250 (понятие «вычет» объясняется в задаче 43, §7). Найдите среднее значение и стандартное отклонение величины страхового возмещения, если стоимость ремонта автомобиля равномерно распределена от 0 до 1500.

40. Ребро куба x измерено приближенно в интервале (3, 4). Найти математическое ожидание и дисперсию объема куба, если его ребро рассматривать как случайную величину X с равномерным распределением на указанном интервале.

Задачи повышенной сложности

41. Договор группового страхования покрывает медицинские расходы сотрудников небольшой компании. Суммарные годовые выплаты страховщика, V, определяются формулой

V = 100 000Y,

где Y − случайная величина с плотностью вида (k − некоторая константа): $f(x)=\begin{cases} k(1-y)^4, & \text{если } 0<y<1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Чему равна вероятность того, что V превысит 40 000, при условии, что V больше, чем 10 000?

42. Время от момента приобретения оборудования до момента его отказа имеет экспоненциальное распределение со средним 10 лет. Владелец оборудования решил застраховать свое оборудование на случай раннего отказа. По условиям договора страховая компания выплачивает сумму x в случае отказа в течение первого года эксплуатации, 50% от этой суммы в случае отказа в течение второго или третьего года эксплуатации и не платит ничего, если оборудование проработает без поломок три года.

Известно, что ожидаемые выплаты страховой компании составляют 1000. Найдите размер страховой суммы x.

43. Для того чтобы покрыть потери Y, которые равномерно распределены на отрезке [0, 1000], рассматривается договор страхования. Чтобы уменьшить премию, страховая компания предложила заключить договор страхования чрезмерных потерь, в соответствии с которым страхователь самостоятельно покрывает потери вплоть до некоторого предела d, а остальное оплачивает страховщик. Иначе говоря, страховщик оплачивает потери за вычетом суммы d (и не платит ничего, если потери меньше, чем d). На каком уровне нужно установить вычет d, чтобы средняя тяжесть страхового случая снизилась в 4 раза?

44. Число страховых случаев по одному договору страхования в течение года распределено по закону Пуассона. Для половины договоров среднее число страховых случаев в год равно 2, а для другой половины − 4. По случайно выбранному договору два года подряд было заявлено по 4 страховых случая в год. Сколько в среднем можно ожидать страховых случаев по этому договору в следующем году?

45. Случайная составляющая дохода равна $2X$, а случайная составляющая затрат равна $50Y$. Найти ожидаемое значение прибыли и дисперсию прибыли при условиях: величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}5$; величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$; случайные величины X и Y являются независимыми.

46. *Принятие решений в условиях неопределенности.* Магазин «Натуральные продукты» реализует торты, изготовленные без консервантов. Обработав результаты по ежедневным продажам в будние дни в течение нескольких месяцев, владелец магазина составил распределение спроса на торты: с.в. X − количества проданных тортов в день.

X	0	1	2	3	4	5	6
p	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

С каждого торта магазин получает 4,80 д.е. прибыли. Магазин дорожит своей репутацией и продает только свежие торты. Если торт не продан в течение дня, то он должен быть выброшен, при этом магазин теряет 3,20 д.е. Владелец магазина хочет максимизировать средний дневной доход. Сколько тортов он должен заказывать каждый день?

47. Распределение размера страхового возмещения для договоров страхования автомобилей задается следующей таблицей.

Размер страхового возмещения	20	30	40	50	60	70	80
Вероятность	0,15	0,10	0,05	0,20	0,10	0,10	0,30

Какова доля страховых возмещений, которые отличаются от своего среднего значения меньше чем на одно стандартное отклонение?

Творческие задачи

48. Вероятность перегрева мотора трактора при $t = 37^0$С равна 0,2. На поле работают три трактора. Найдите среднее число неработающих тракторов и дисперсию двумя способами (с помощью формул (1, 3) и формул среднего и дисперсии для биномиального распределения).

49. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные.

X	0	1	4
p	p_1	p_2	p_3

Тема: математическое ожидание с.в. Z=Z(X).

50. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

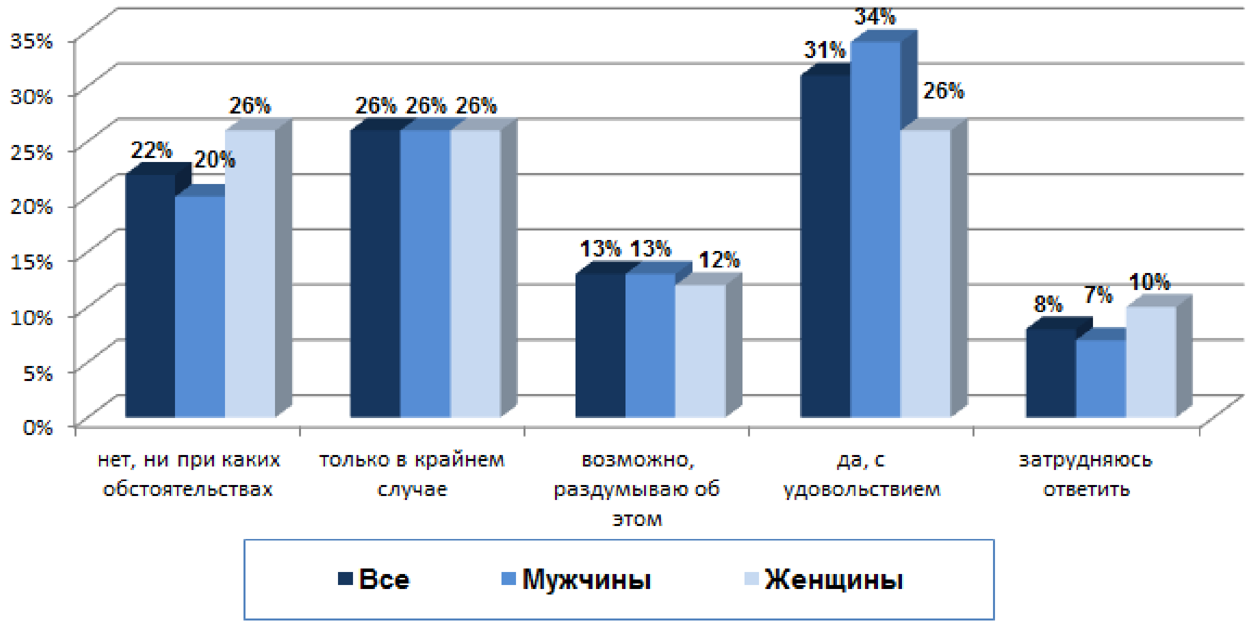
Исходные данные. Из 20 студентов группы 6 студентов предпочитают почтовые услуги на www.mail.ru, а остальные − www.yandex.ru.

Тема: математическое ожидание и дисперсия.

50. Сформулируйте задачу по исходным данным на указанную тему и решите ее.

Исходные данные. Опрос SuperJob.ru, сентябрь 2012 г.

«22 сентября – Международный день без автомобилей. Готовы ли вы отказаться от личного автомобиля?»



Тема: математическое ожидание и дисперсия.

Приложение

Таблица 1

Плотность стандартного нормального распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,398	0,3977	0,3973
0,1	0,397	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,391	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,379	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,341	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,323	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,292
0,8	0,2897	0,2874	0,285	0,2827	0,2803	0,278	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,242	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,12	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,104	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,094	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,079	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,062	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,054	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,044	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,031	0,0303	0,0297	0,029
2,3	0,0283	0,0277	0,027	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,018
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,011	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,006	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,005	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,004	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,003	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,002	0,002	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,001	0,001	0,001	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Таблица 2

Стандартное нормальное распределение $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6164	6103	6141
0,3	6179	6217	6293	6255	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	0736	6772	6808	6844	6974
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	8517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	81 06	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8389	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8963	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	5921	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9G86	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,6	9974	9973	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9495
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Таблица 3

Распределение Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1638	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,049	0,0613
4			0,0003	0,0007	0,0016	0,003	0,005	0,0077	0,0111	0,0153
5					0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6							0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7									0,0001	0,0001

k \ λ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0004	0,0002
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,005	0,0023	0,001
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,015	0,0076	0,0037
4	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189	0,0102
5	0,036	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378	0,0224
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,149	0,1221	0,0911	0,0631	0,0411
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,149	0,1396	0,1171	0,0909	0,0646
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,113	0,0888
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,101	0,1241	0,1318	0,1251	0,1085
10		0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,071	0,0993	0,1186	0,1251	0,1193
11		0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0451	0,0722	0,0970	0,1137	0,1194
12			0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948	0,1094
13			0,0002	0,0013	0,005	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729	0,0926
14			0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521	0,0728
15				0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347	0,0534
16				0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,011	0,0217	0,0367
17					0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128	0,0237
18						0,0002	0,0009	0,0029	0,0071	0,0145
19						0,0001	0,0004	0,0014	0,0037	0,0084
20							0,0002	0,0007	0,0019	0,0046
21							0,0001	0,0003	0,0009	0,0024
22								0,0001	0,0004	0,0012
23									0,0002	0,0006
24									0,0001	0,0003
25										0,0001

Формулы по теме «Случайные события»

Число перестановок из n объектов равно $P_n = n!$.
Число размещений из n объектов k равно $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
Число сочетаний из n объектов по k равно $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Классическое определение вероятности: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}$, где $N(A)$ − число элементарных исходов, благоприятствующих событию A, $N(\Omega)$ − общее число элементарных исходов.
Теорема сложения вероятностей: $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$. Для несовместных событий $\mathrm{P}(AB) = 0$ и $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
Теорема умножения вероятностей: $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A\|B)$. Если события A и B независимые, то $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.
События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют *полной группой событий*, если а) они несовместны: $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j=1..n$; б) покрывают все пространство элементарных исходов: $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$. *Формула полной вероятности*: $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P(H}_i)\mathrm{P(A}\mid\mathrm{H}_i)$. *Формула Байеса*: $\mathrm{P}(H_i \mid A) = \dfrac{\mathrm{P(H}_i)\mathrm{P(A}\mid\mathrm{H}_i)}{\mathrm{P(A)}}$.
Формула Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, *где* n − число независимых испытаний, p − вероятность «успеха», k − число «успехов». *Наивероятнейшее число* k_0: $np + p - 1 \leq k_0 < np + p$
Полиномиальное распределение: $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, где n − число независимых испытаний, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ − вероятности событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ соответственно, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ − число появлений событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ соответственно.

Теорема Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где k − любое целое неотрицательное число, $\lambda = np$.
Локальная теорема Муавра−Лапласа: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ − функция плотности нормального распределения, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.
Интегральная теорема Муавра−Лапласа: $\mathrm{P}(k_1 \le m < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ − функция нормального распределения.

Интегралы

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \; F'(x) = f(x).$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k - const.$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C.$$

$$\int cos(x)dx = \sin(x), \quad \int \sin(x)dx = -\cos(x).$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

$$\int xe^{ax} dx = \frac{ax - 1}{a^2} e^{ax} + C, \quad \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx)e^{ax} + C.$$

Формулы по теме «Случайные величины»

<table>
<tr><td>ξ – дискретная с. в.</td><td>ξ – непрерывная с. в.</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{c|ccc} \xi & x_1 & x_2 & \dots \\ \hline \mathrm{p_i} & p_1 & p_2 & \dots \end{array}$$ $\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$</td><td>$\xi \in \mathrm{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F(x) = \mathrm{P}\ (\xi < x)$</td></tr>
<tr><td>$F(x) = \sum\limits_{k:\, x_k < x} p_k$</td><td>$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$</td></tr>
<tr><td>$P(a \le \xi < b) = \sum\limits_{k:\, a \le x_k < b} p_k$</td><td>$P(a \le \xi < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{E}\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$</td><td>$\mathrm{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\eta = \mathrm{g}(\xi)$,
$\mathrm{E}\eta = \mathrm{Eg}(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$</td><td>$\eta = \mathrm{g}(\xi)$,
$\mathrm{E}\eta = \mathrm{Eg}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k - \mathrm{E}\xi)^2 p_k$
$\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - (\mathrm{E}\xi)^2$</td><td>$\mathrm{D}\xi = \int\limits_{+\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}\xi)^2 f(x)dx$
$\mathrm{D}\xi = \int\limits_{+\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathrm{E}\xi)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi}$</td></tr>
</table>

Ответы

Глава 1

§ 1

1.в. **2.** а. **3.** б. **4.** а. **5.** б. **6.** б. **7.** в. **9.** Р(А)=Р(В). **10.** а) 0,28; б) 0,25; в) 0,17. **11.** а) 3/7; б) 5/7. **12.** 303600 **13.** 0,2. **14.** а) 2/5; б) 3/5; в) 1/5; г) 1/5; д) 1/5; е) 2/5; ж) 3/5; з)2/5. **15.** а) 0,0066; б) 0,17; в) 0,045. **16.** 13/32. **17.** 1680; 140. **18.** а) 0,007; б) 0,098; в) 0,39. **19.** 151200. **20.** а) 495; б) 794. **21.** 9/14. **22.** а) 0,1; б) 0,026. **23.** а) $1/6^n$; б) $n/6^n$. **24.** 0,6. **25.** 0,033. **26.** 0,692. **27.** 0,0005. **28.** 0,31. **29.** 0,689. **30.** а) 0,9; б) 0,998. **31.** 0,48. **32.** 0,4. **33.** а) $2\cdot 10^{16}$; б) $14348907\cdot 10^{15}$. **34.** 2160. **35.** а) 0,5; б) 0,645; в) в 1,8раза. **36.** 26. **37.** 1365. **38.** 42. **39.** 220; 164; 115; 105. **40.** 210; 7; 35; 21. **41.** а) 0,008; б)0,096; в) 0,384. **44.** $\frac{1}{n+1}$.

45. а) $\frac{1}{(2n-1)!!}$; б) $\frac{n!}{(2n-1)!!}$. **46.** Да, т.к. Р(А)=0,018 − очень маленькая вероятность.

§2

1.б. **2.** а. **3.** а. **4.** а. **5.** б. **6.** События зависимые. **7.** а) 0,6; 0,4; 0,2; б) 0,455; 0,545; 0,075; в) 0,97. **8.** 0,0058. **9.** а) 1/8; б) 1/8. **10.** Вероятности равны. **11.** 0,192. **12.** 0,059. **13.** а)0,648; б)0,954. **14.** а) 0,58; б) 0,42. **15.** а) 0,273; б) 0,0441; в) 0,0004 . **16.** 0,992. **17.** 0,333. **18.** 0,875. **19.** а) Вероятнее всего приз получит первый стрелок, т.к вероятность выиграть приз для первого стрелка равны 0,79, а у второго − 0,204. б) 0,02. **20.** При вычислении положимся на мнение техсервиса относительно вероятности ремонта. а) 0,0625; б) 0,6875. **21.** Р(число k_i)=р·k_i , р=2/(n(n+1)). **22.** 0,083; а) 0,1; б) 0,065 **23.** 0,5. **24.** $\left(\frac{2}{7}\right)^{12} = 3\cdot 10^{-7}$. Т.к. эта вероятность мала, то этот случай не согласуется с гипотезой о рав-

новероятности. **25.** $\left(\frac{6}{7}\right)^{12} \approx \frac{1}{6}$. Согласуется с гипотезой о равновероятности. **26.** а) P(A)=1/4; б) P(C)=1/2. Рыбе С достается вдвое больше пищи, чем каждой из двух других. **27.** 0,97; 0,03. **28.** а) 0,0001; б) 0,016; в) 0,16; г) 0,87. **29.** 0,0496. **30.** 0,896; **31.** а) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$;
б) $\alpha_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\alpha_3 + \ldots + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots(1-\alpha_{n-1})\alpha_n$;
в) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_{n-1})\alpha_n$. **36.** $1-e^{-1}$. **37.** 0,5.

§ 3

1. а,в. **2.** б. **3.** а. **4.** 0,99. **5.** а) 0,586; б) 0,26. **6.** 0,925. **7.** 1) 0,028; 2) а) 0,43; б) 0,21. **8.** а) 0,65; б) 0,54. **9.** 0,31. **10.** 0,58. **11.** Наиболее вероятно были подарены розы. **12.** 0,47. **13.** 0,43. **14.** 0,22. **15.** 1) 0,476. **16.** 0,085. **17.** 0,571. **18.** 0,4. **19.** 1) 0,425; 2)0,576. **20.** 0,875. **21.** 0,18. **22. 1)** 0,627; 2) 0,41. **23.** а) 0,197; б) 0,22. **24.** 0,0036. **25.** 4 шара. **26.** 0,2. **27.** Если учитывать людей, которые выкуривают несколько сигарет в неделю или в месяц, то курильщиками вероятнее всего являются 40,9% работников предприятия, т.е. 344 человека. **28.** Наиболее вероятно, что были переложены белый и черный шары (0,6). **29.** 0,62. **30.** 0,33. **31.** 0,9. **32.** $\frac{n_1 n_2 + n_2 n_3}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}$. **33.** а) 0,7; б) 0,226. **34.** 0,061. **35.** а) 0,0282; б) 0,0428. **36.** Красный шар следует вернуть в урну, черный шар не возвращать. **37.** 0,7. **38.** 0-0,344; 1-0,125; 2-0,281; 3-0,125; 4-0,125

§ 4

1.1 а.**1.2** а.в. **2.** а.в. **3.** а) 0,316; б) 0,004; в) 0,42. **4.** 120. **5.** 0. **6.** а) 0,053; б) 0,187; в) 0,0864. **7.** а) 0,21; б) 0,284. **8.** а) 0,309; б) 3. **9.** 6000 д.е. **10.** 7. **11.** 0,659. **12.** а) 0,395; б) 0,296. **13.** 4; 0,2575. **14.** а) 0,014; б) 0,0012. **15.** а) 375; б) 855; в) 480. **16.** а) 0,76; б) 0,026. **17.** 0,185. **18.** а) 0,3; б) 0,53; в) 0,99976; 5. **19.** а) 0,1066; б) 0,246. **20.** 35 дней. **21.** 298. **22.** 0,1. **23.** а) 405; б) 630; в) 555. **24.** 157. **25.** а) 0,147; б) 0,94. **26.** $1599 \le n \le 1699$. **27.** а) 3; б) 3. **28.** 5. **29.** 0,198. **30.** 5040 д.е.. **31.** 0,03. **32.** Колокол. **37.** 1) 0,8847; 2) 0,8836; 3) 0,8836.

§ 5

1.б. **2.** а. **3.** б. **4.** а. **5.** б. **6.** а. **7.** 0. 3. **8.** а) $2\cdot10^{-5}$; б) 0,0008. **9.** а) 0,005; б) 0,966. **10.** 0,881.**11.** а) 0,999; б) 0,999. **12.** 0,00034; 0,00268; 0,01073; 0,02863. **13.** а) 0,32; б) 0,005; в) 0,97. **14.** а) 0,0007; б) 0,79. **15.** а) 0,96; б) 0,89. **16.** 4; 0,1. **17.** 0,99. **18.** а) 0,24; б) 0,000004. **19.** а) 0,05; б) 0,1. **20.** 0,68. **21.** 0,41; 0,059. **22.** 0,271. **23.** 0,0002. **24.** 44,5 млн д.е. 40,5 млн д.е. **25.** 0,027. **26.** 0,408. **27.** 556.
28. $n \geq 2882$. **29.** $S \geq 132\,117$ д.е.

Глава 2

§ 6

1. б. **2.** б. **3.** в. **4.** а, в.

5.

X	0	1	2	3	4
p	0,113	0,328	0,356	0,171	0,031

P(X > 2) = 0.44

6.

X	0	1	2
p	0,0036	0,123	0,874

7.

ξ	0	1	2	3
p	0,02	0,044	0,306	0,648

P(X ≥ 2) = 0,954

8.

X	-7	193	243	4993
p	0,990	0,005	0,004	0,001

9.

X	0	1	2	3
p	0,55	0,36	0,08	0,006

10.

ξ	0	1	2	3
p	0.336	0.2	0.24	0,224

11.

X	0	1	2	3
p	0,263	0,495	0,22	0,022

12.

X	0	1	2
p	0,06	0,47	0,47

P=0,47.

13.

ξ	1	2	3	4
p	0.8	0.08	0.024	0.096

$P(\xi \le 2) = 0.88$

14. 10/11 ≈ 0,909; 60/61 ≈ 0,984. **15.** 0,33. **16.** 22,3%; 39,3%; 63,2%; 77,7%. **17.** 1/2; 0.3.

18.

ξ	1	2	3	4	…	κ	…
p	0,8	0,16	0,032	0,0064	…	$0{,}2^{\kappa-1}0{,}8$	…

Вероятнее всего дозвониться с первого звонка.

19.

19(1).

X	0	1	2	3
p	0,064	0,288	0,432	0,216

19(2).

Y	0	1	2	3
p	0,036	0,222	0,448	0,294

P(Y≤1)=0,258.

20. a=4; p=0.5;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{4}, & -2 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}.$$

21. a=0,5; p=$(2 - \sqrt{2}) / 4$;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} Sinx & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}.$$

22.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,00001	0,0005	0,008	0,073	0,33	0,59

23. а)

Y	0	1	4
p	0.3	0.3	0.4

2) 0,3; 3) 0,6.

б)

Z	0	1	2
p	0.3	0.3	0.4

2) 0,6; 3) 0,6.

24. 0,4. **25.** 0,1222.

26. a= - 0.5; p=0.25; $P_3(2) = 0.141$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ \frac{(x-3)^2}{4}, & 3 \le x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}.$$

27. a=2/9; p=13/27; $P_3(2)$ =0.359;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 \frac{(9-2x)}{27}, & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

28. a= 2.5; p=0.6; $P_3(2) = 0.432$;

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2{,}5 \\ 2x-5, & 2{,}5\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}.$$

29. a=1.8; p=0.8; $P_3(2) = 0.384$;

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1{,}8 \\ x-1{,}8, & 1{,}8\le x\le 2{,}8 \\ 1, & x>2{,}8 \end{cases}.$$

30. 1/9. **31.** 0,414. **32.** C=1/4, $\dfrac{1+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}}{2}$; $\dfrac{13}{20}$. **33.** C=1; 0,79; $\dfrac{n_2-n_1+1}{n_1(n_2+1)}$.

34. а) $f_\xi(z)F_\eta(z)+f_\eta(z)F_\xi(z)$; б) $f_\xi(z)(1-F_\eta(z))+f_\eta(z)(1-F_\xi(z))$.

35. C=1

§ 7

1. а,в. **2.** а,в. **3.** б. **4.** а,в. **5.** а,б. **6.** б,в.

7.

X	0	1	2	3
p	0,83	0,16	0,01	0,0002

Eξ =0,18; Dξ =0,169.

8. а) EX =5,6; б) EY =4,8. **9.** Среднее ожидаемое число работающих станков равно 45. **10.** p_i = 0.2; Eξ = 1,1; Dξ = 0,49; σ = 0,7; P = 0,7. **11.** p_i = 0.3; Eξ = 5,9; Dξ = 5,49; σ = 2,34; P = 0,5. **12.** p_i = 0.2; Eξ = 4; Dξ=0,4; σ=0,63; P=0.8. **13.** p_i=0,1; Eξ=9,6; Dξ=1,44; σ=1,2; P = 0,9. **14.** p_i = 0,1; Eξ = 23; Dξ=41; σ = 6,4; P = 0,5. **15.** p_i = 0,05; Eξ=152,5; Dξ=3118,75; σ=55,86; P=0,55. **16.** p_i =0.3; Dξ=0,36; EZ =5,6; DZ = 1,44 **17.** а) EZ = 21; DZ = 22; б) EZ = 0; DZ = 312.

18.

ξ	0	1	2
p	0,16	0,48	0,36

Eξ = 1,2; Dξ = 0,48; σ = 0,69.

19. 20.

20.

X	1	2	3	4
p	0,7	0,21	0,063	0,0189

P=0,3; Eξ =1,38. **21.** P=0,12; Eξ = 1,63; Dξ =1,36. **22.** 3900; 6000. **23.** 8. **24.** 2700. **25.** 10. **26.** В России − 322, во Франции − 238.

27. а) 2/9; в) EX = 1,5; DX = 0,45; σ = 0,67; г)13/27;

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{27}(9-2x), & 0\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}.$$

28. а) – 0.5; в) EX = 13/3; DX = 2/9; σ = 0,47; г) 0.25;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & 3\le x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$$

29. а) 1/16; в) EX = 16/15; DX = 44/225; σ = 0,44; г) 9/64;

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{16}(4x-x^3), & 0\le x\le 2\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases};$$

д) EY = 107/15; DY = 176/225.

30. а) 2; в) 0.019; σ = 0,1378; г)0.4;

$$f(x)=\begin{cases}2, & 2{,}5\le x\le 3\\ 0, & x\notin[2{,}5;3]\end{cases};$$

д) EY = 10.5; DY =0.076.

31.

ξ	1	6
p	0.1	0.9

32. x_3 = 21; p_3 = 0.2. **9.** а)11; 9; б)30; 82.
33. EX = 3,36; DX =1,95. **34.** 12 человеко-часов.

35.

Z	1	2	3	4	5	6	7	8
p	0,05	0,33	0,18	0,12	0,23	0,03	0,04	0,02

36. 1) 8; 2) 8; 3) 0,4; 4) 0,67. **37.** E(r) = +∞. Хотя $\frac{EY}{EX}=0{,}5$, т.е. средний размер страховых возмещений в течение года составляет 50% от среднего объема собранных премий за этот год. **38.** Акция В более рисковая, лучше приобрести акции А, т.к. Eξ >Eη и Dξ<Dη. **39.** 520,83 и 403,44. **40.** EX = 43,75; DX = 114,08. **41.** 0,13. **42.** 5644,23. **43.** 500. **44.** 3,65. **45.** 0; 5100. **46.** 3. **47.** 45%.

Глоссарий

Дискретная случайная величина – случайная величина, множество возможных значений которой конечно или счётно.

Дисперсия случайной величины $D\xi$ − это математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Достоверное событие Ω − это событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания.

Закон распределения случайной величины − это всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Математическое ожидание $E\xi$ *дискретной случайной величины* ξ – это сумма произведений всех её значений на соответствующие им вероятности.

Невозможное событие $\varnothing$ − это событие, которое при данном комплексе условий некоторое событие заведомо не может произойти.

Непрерывная случайная величина – случайная величина, функция распределения которой непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек; множество возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно или несчётно.

Несовместные события – это события, которые в результате данного испытания не могут произойти вместе.

Объединение событий A и B $(A \cup B)$ − это событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A и B.

Пересечением событий A и B (AB или $A \cap B$) это событие, состоящее в их совместном появлении.

Перестановка из n объектов есть упорядочение этих объектов, то есть расположение n объектов в определенном порядке.

Плотность вероятности (*плотность распределения* или просто *плотность*) $f(x)$ непрерывной случайной величины ξ − это производная ее функции распределения.

Противоположным к A событием $(\overline{A})$ называется событие, состоящее в непоявлении события A.

Размещение из n объектов по k есть любой выбор k объектов, взятых в определенном порядке из n объектов.

Разность событий $A \backslash B$ − это событие, состоящее в том, что происходит событие A, но не происходит событие B.

Случайное событие (или просто: *событие*) − это любой исход эксперимента, который может произойти или не произойти.

Случайная величина (коротко с.в.) − это некоторая функция, приписывающая действительные числа каждому исходу эксперимента.

Сочетание из n объектов по k – это любой выбор k объектов из n безотносительно к порядку выбора.

Схема Бернулли − это схема повторных независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p, не зависящей от номера испытания.

Теория вероятностей − математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

Функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ − это функция, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее x.

Литература

1. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1998. – 400с., ил.
2. *Каштанова Е.К.* Сборник задач по теории вероятностей для студентов гуманитарных факультетов – Казань: Казанский университет, 2003. – 43с.
3. *Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон*. Введение в конечную математику. – 2-е изд. – М.: Мир, 1965.
4. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учеб. − 2-е изд., испр. − М.: Дело, 2001, 688 с.
5. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ, 2006, 573 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика // Под общ. ред. А.В.Ефимова. – 2-е изд. – М: Наука, 1990, 428 с.
7. *Тимофеева Л.К., Суханова Е.И., Сафиуллин Г.Г.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Самара: Изд-во Самарского экономического института, 1992. – М.: МГУ, 1994.
8. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Введение в актуарную математику. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994, – 140с.
9. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Теория риска для актуариев в задачах: для студентов вузов, обучающихся по специальности 010200 "Приклад. математика и информатика" и по направлению 510200 "Приклад. математика и информатика" − 2-е изд, испр. и доп.—М.: Мир: Науч. мир, 2004, – 240с.
10. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – 3-е изд. – М.: Наука, 1987, 240 с.

Открытые электронные образовательные ресурсы

1. *Блатов И.А., Старожилова О.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций. – Самара: ГОУ ВПО ПГУТИ, 2010. – 286 с. http://window.edu.ru/resource/896/74896/files/uch-pos-tv.pdf
2. *Борисова Е.В.* Формирование и математическая обработка данных в социологии: учебное пособие. – Тверь:ТГТУ, 2006. – 120 с. http://window.edu.ru/resource/621/58621
3. *Васько О.Н., Капустин Е.И.* Теория вероятностей и математическая статистика: Опорный конспект и сборник задач. – Невинномысск: Невинномысский химический колледж, 2005. – 24 с. http://window.edu.ru/resource/945/53945/files/tv.pdf
4. *Выск Н.Д.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – М.: МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2011. – 168 с. http://window.edu.ru/resource/889/76889/files/tv2011.pdf
5. *Орлов А.И.* Математика случая Вероятность и статистика – основные факты. Учебное пособие. М.: МЗ-Пресс, 2004. http://www.aup.ru/books/m155/
6. *Романовский Р.К., Романовская А.М.* Элементы теории вероятностей и математической статистики (теория и задачи): учебное пособие. – Омск: издатель ИП Скорнякова Е.В., 2012. – 189 с. http://window.edu.ru/resource/991/79991/files/romanovsky.pdf