THE POSSIBILITY OF APPLYING INFORMATION TECHNOLOGIES IN THE PROCESS OF LEARNING DISCRETE MATHEMATICS IN THE SCHOOL

A.A. Evseeva

Some opportunities for learning solution exercise on graphs in SCA Mathematica is described.

Keywords: Mathematica 6.0., graphs, mathematics in school.

УДК 517.53

ПРИМЕНЕНИЕ СКМ MAPLE ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Н.В. Зайцева[1], Е.С. Ульянова[2]

1 *n.v.zaiceva@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *smeshinka193@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе описаны возможности системы компьютерной математики Maple при изучении некоторых важнейших разделов теории функции комплексного переменного, а именно: приложения теории вычетов к вычислению интегралов и разложения функций в ряды Лорана.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, ряд Лорана, особые точки, функция комплексного переменного, интеграл, теорема Коши о вычетах.

Введение

При решении многих математических задач система компьютерной математики Maple, разработанная в 1980 году канадскими исследователями, является неоценимым помощником, которая позволяет освободиться от рутинных математических вычислений. Этот пакет широко используется во многих учебных заведениях мира, в том числе и в России и в последнее время получает все большее распространение среди студентов и преподавателей не только физико-математического направления. Командный язык Maple прост и понятен, чем и объясняется коммерческий успех данного пакета. Следует отметить быстроту в работе и экономичное использование памяти. К тому же Maple работает с большинством операционных систем и имеет широкие возможности для преобразования рабочих документов во всевозможные форматы. Это делает программу незаменимым помощником не только при выполнении вычислений, но и при оформлении документов.

С помощью пакета Maple можно решать самые разнообразные задачи: вычислять производные от явно заданных функций, от параметрически и неявно заданных функций, производные высших порядков, вычислять пределы, суммы числовых рядов, неопределенные и определенные интегралы, раскладывать функции в ряды Тейлора и Фурье, решать обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных и многое другое.

В данной работе продемонстрировано использование программы Maple при разложении функций в ряд Лорана, нахождении и определении характера особых точек, вычислении интегралов с помощью теории вычетов. В работе интегрируются знания, полученные при изучении дисциплин: математический анализ, теория функции комплексного переменного и информационные технологии. Материал, содержащийся в работе, будет полезен студентам математических специальностей для систематизации и углубления знаний по высшей математике и информационным технологиям.

Разложение функции в ряд Лорана

Найдем разложение функции $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(z+2)}$ в ряд Лорана.

Функция $f(z)$ регулярна в областях:

$$D_1 : |z| < 1, \qquad D_2 : 1 < |z| < 2, \qquad D_3 : |z| > 2.$$

Представим сначала функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\right).$$

Если $|z| < 1$, то согласно [1]: $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$,

если $|z| > 1$, то $\dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{z^n}$.

Аналогично, если $|z| < 2$, то имеем следующее разложение

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},$$

а если $|z| > 2$, то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}.$$

Тогда в области D_1 функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right),$$

который представляет собой ряд Тейлора.

В области D_2 разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},$$

который содержит как положительные, так и отрицательные степени переменной z.

Наконец, в области D_3 функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1} - 1}{z^n},$$

который содержит только отрицательные степени переменной z.

Продемонстрируем выполнение данного примера средствами пакета Maple. Сначала опишем функцию:

```
>f:=z->1/((1-z)*(z+2));
```

$$f := z \to \frac{1}{(1-z)(z+2)}$$

Составим процедуру, зависящую от следующих параметров: самой функции u, равенства, определяющего переменную и точку разложения VarPoint, степени остаточного члена n.

```
>F:=proc(u,VarPoint,n) local t;
t:=lhs(VarPoint);
convert(series(u(t),VarPoint,n),polynom);
end proc:
```

Второй параметр процедуры будем рассматривать, как равенство. Локальной переменной t присваивается левая часть этого равенства. Далее процедура выполняет разложение с помощью команды series функции в ряд и преобразует его в полиномиальный вид.

Обратимся к процедуре по имени F и получим разложения функции в окрестностях точек $z=0$, $z=1$ и $z=-2$:

```
>F(f,z=0,5);
```

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{3}{8}z^2+\frac{5}{16}z^3+\frac{11}{32}z^4$$

```
>F(f,z=1,5);
```

$$-\frac{1}{3(z-1)}+\frac{4}{27}-\frac{1}{27}z+\frac{1}{81}(z-1)^2-\frac{1}{243}(z-1)^3+\frac{1}{729}(z-1)^4$$

```
>F(f,z=-2,5);
```

$$\frac{1}{3(z+2)}+\frac{5}{27}+\frac{1}{27}z+\frac{1}{81}(z+2)^2+\frac{1}{243}(z+2)^3$$

Полученные выражения аппроксимируют исходную функцию в разных областях. Теперь проиллюстрируем разложение функции в ряд Лорана в указанных областях. Для этого сначала подключим пакет для работы с графическими объектами plots. И зададим значение true для опции discont, чтобы при изображении графиков функций программа Maple не соединяла точки разрыва линиями.

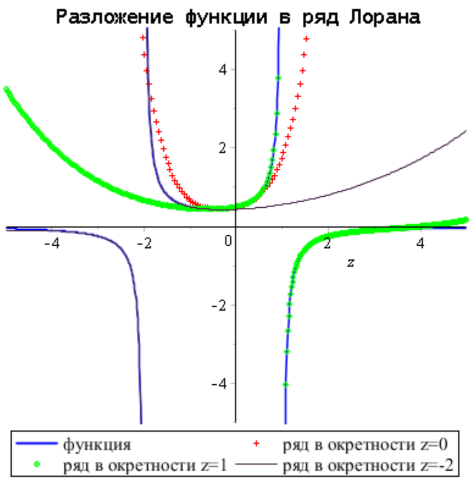
```
>with(plots):
plot([f(z),F(f,z=0,5),F(f,z=1,5),F(f,z=-2,5)],z=-5..5,-5..5,
color=[blue,red,green,violet], style=[line,point,point,line],
symbol=[point,cross,diamond,point], thickness=[1,0,0,0],
discont=true, title=''Разложение функции в ряд Лорана'',
titlefont=[courier,bold,13],legend=[''функция'', ''ряд в окрестности z=0'',
''ряд в окрестности z=1'', ''ряд в окрестности z=-2'']);
```

Вычисление интегралов с помощью вычетов и разложения в ряд Лорана

Вычислим с помощью программы Maple интеграл $\oint_{|z+2I|=3} \frac{dz}{z^3(z^2+4)^2}$.

Для того, чтобы вычислить интеграл от функции комплексной переменной нужно:

1) найти все ее особые точки;



2) выбрать из них те, которые попали внутрь контура интегрирования;
3) определить тип особых точек, в зависимости от типа вычислить вычеты;
4) найти значение интеграла по теореме Коши о вычетах.
Приведем необходимый теоретический материал по данным пунктам.

Определение 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z-a| < \rho$, но не регулярна в точке a ($a \neq 0$). Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера для функции* $f(z)$.

Определение 2. Изолированная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется
а) *устранимой особой точкой*, если предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ существует и конечен;
б) *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;
в) *существенно особой точкой*, если предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует.

Определение 3. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке a называется коэффициент C_1 ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки a, то есть

$$\mathrm{res}_{z=a} f(z) = C_1.$$

Основная теорема теории вычетов (теорема Коши). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, и пусть γ - простая замкнутая кривая, лежащая в области D и содержащая внутри особые точки $z_1, z_2, ..., z_n$. Тогда*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z=z_k} f(z).$$

В нашем примере введем следующие обозначения: C - окружность интегрирования, zC - ее центр, R - ее радиус. Напишем программу в Maple.

```
>with(plots):
```

```
>with(plottools):
>f:=z->1/((z^3)*(z^2+4)^2):
>zC:=-2*I:
>R:=3:
>C:=abs(z-zC)=R:
>'f(z)'=f(z);
```

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$$

```
>'Теорема Коши о вычетах:';
>Int('f(z)',z='C'..``)=2*Pi*I*Sum(res[z=z[k]]('f(z)'),k);
>Int(f(z),z=C..``)=2*Pi*I*Sum(res[z=z[k]](f(z)),k)
```

Теорема Коши о вычетах

$$\int_C f(z)dz = 2I\pi\left(\sum_k \mathrm{res}_{z=z_k}(f(z))\right)$$

$$\int_{|z+2I|=3} \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}dz = 2I\pi\left(\sum_k \mathrm{res}_{z=z_k}(\frac{1}{z^3(z^2+4)^2})\right)$$

Найдем теперь особые точки данной функции и их количество.

```
>zz:=[singular(f(z))];
>n:=nops(zz);
```

$$zz := [\{z=0\},\{z=2I\},\{z=-2I\}]$$

$$n := 3$$

```
>'Особые точки функции f(z):'
>for j from 1 to n do
>z[j]:=op(zz[j][1])[2];
>end do;
```

Особые точки функции $f(z)$:

$$z_1 := 0$$

$$z_2 := 2I$$

$$z_3 := -2I$$

Теперь изобразим контур интегрирования и особые точки:

```
>for j from 1 to n do
>pp||j:=textplot([(Re(z[j]))+0.4,Im(z[j])-0.1,"z"||j],align=BELOW):
>pp||(n+j):=circle([Re(z[j]),Im(z[j])],0.05,color=black,thickness=3):
>end do:
>pp0:=implicitplot(abs(x+I*y-zC)=R,x=-5..5,y=-5..5,color=black):
>display(seq(pp||i,i=0..2*n));
```

Теперь осталось найти вычеты в тех особых точках, которые попали внутрь контура интегрирования и вычислить их сумму.

```
>zzz:=0:
>S:=0:
>for j from 1 to n do
>if evalf(evalc(abs(z[j]-zC)))<R then
>zzz:=zzz+1:
>S:=S+residue(f(z),z=z[j]);
>end if;
>end do;
>'Количество особых точек, попавших внутрь контура интегрирования'=zzz;
>Int('f(z)',z=C..``)=2*Pi*S;
```

Количество особых точек, попавших внутрь контура интегрирования=2

$$\int_{|z+2I|=3} f(z)dz = \frac{-1}{32} I\pi$$

Таким образом, в примере показано, что интеграл по замкнутому контуру от функции комплексного переменного может быть вычислен по теореме Коши средствами пакета Maple.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию / Ю.Г. Игнатьев. - Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с.

2. Клочко Т.В. Решение задач комплексного анализа средствами Maple. Учебно-методическое пособие / Т.В. Клочко, Н.Д. Парфенова. - Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2009. - 68 с.

3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного. Изд-е 5-е / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - М.: Наука, 1987. - 688 с.

USE MAPLE IN THE STUDY OF SOME PARTS OF COMPLEX ANALYSIS

N.V. Zaitseva, E.S. Ulyanova

The paper describes possibilities of Maple the study of some of most important sections of the theory of functions of a complex variable: the application of the theory of deduction to the calculation of integrals, the expansion of functions in series of Laurent.

Keywords: computer modeling, series of Laurent, special points, a function of a complex variable, integral, Cauchy's theorem the residue.