

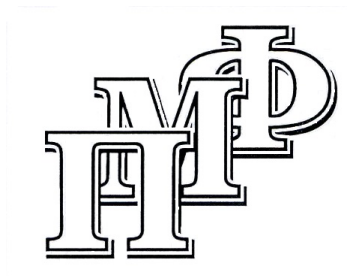
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА  
КАЗАНСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

УДК 517.958 : 535.4

Е. К. Липачёв

Краевые задачи  
для уравнения Гельмгольца  
в областях с бесконечной  
кусочно–гладкой границей

Препринт ПМФ–05–01



Казань — 2005

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского математического общества

Научный редактор — проф., д.ф.-м.н. Н. Б. Плещинский

Исследованы краевые задачи для уравнения Гельмгольца с условиями Дирихле и Неймана на границе. Краевые задачи поставлены в областях, которые только на конечном участке границы отличаются от полуплоскости. Такие области иногда называют областями с “неровной” границей. Предполагается, что “неровный” участок описывается кусочно-гладкой кривой и точки нарушения гладкости имеют особенность типа ребер. Эти задачи можно рассматривать как математическую модель задачи дифракции электромагнитных волн на дифракционных решетках с конечной “нарезанной” частью.

Доказаны теоремы существования и единственности решения краевых задач. Получены интегральные уравнения второго рода, эквивалентные поставленным краевым задачам. Предложен алгоритм приближенного решения задач дифракции, основанный на методе сплайн-подобластей решения интегральных уравнений. Проведено обоснование алгоритма приближенного решения краевых задач.

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-96184).

© Е. К. Липачёв, 2005 г.

## Введение

В работах [14]–[19] исследованы краевые задачи дифракции на областях с неровной границей в случае, когда граница принадлежит классу  $C^{(2)}$  или  $C^{(1,\nu)}$ ,  $0 < \nu \leq 1$ . Этот случай будем называть случаем с гладкой границей или просто гладким случаем. Для этого случая в работах [14, 18, 19] доказано существование и единственность классических решений краевых задач, найдено представление решений в виде обобщенных потенциалов простого и двойного слоев, плотности которых находятся как решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Если граница области содержит точки нарушения гладкости, то постановка краевых задач дифракции должна учитывать это обстоятельство в виде дополнительных условий, например, условия на ребре ([9, 22]). Исследование разрешимости краевых задач также имеет ряд существенных особенностей.

В этой работе рассматривается задача нахождения электромагнитного поля, возникающего в результате рассеяния плоской поляризованной электромагнитной волны, падающей на бесконечную решётку с конечной нарезанной частью. Нарезанная часть решётки может иметь конечное число точек нарушения гладкости. Будем предполагать, что точки нарушения гладкости являются рёбрами. Отметим, что это один из случаев в классификации особых точек (см., напр., [13, 23]). Вообще говоря, профиль решётки (нарезанный участок) произволен, с одним лишь ограничением, что размеры элементов решётки соизмеримы с длиной падающей волны. Задача дифракции сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями типа Дирихле или Неймана, условием на ребре в точках нарушения гладкости и условиями излучения на бесконечности.

Опираясь на исследования в гладком случае [14] – [19], в данной работе доказано существование и единственность

обобщённого по Винеру решения краевой задачи. Доказано, что полученное решение является классическим. Решение представлено в виде обобщённого потенциала и доказана теорема эквивалентности краевой задачи интегральному уравнению второго рода. На основе метода сплайн-подобластей решения интегральных уравнений построен алгоритм приближённого решения краевой задачи. Для теоретического обоснования вычислительной схемы привлечён аппарат, разработанный Б.Г. Габдулхаевым (см., напр., [5]), а также использованы результаты Ю. Р. Агачева [1].

## Постановка краевых задач

Рассматривается следующая дифракционная задача. На решётку под углом  $\theta$  падает плоская электромагнитная волна длины  $\lambda$ . Схематично геометрия дифракционной задачи представлена на рис. 1. Считаем, что угол  $\theta$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) отсчитывается от положительного направления оси  $z$  к направлению падения волны.

В области над решёткой среда однородна и характеризуется параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$  (подробности см., напр., [2, 9]). Колебания совершаются в гармоническом режиме, и зависимость от времени  $t$  имеет вид  $e^{-i\omega t}$ . Требуется найти рассеянное решёткой электромагнитное поле.

Падающее поле можем записать в виде (см., напр., [7, 28])

$$u_0(x, z) = e^{ik(\alpha x - \beta z)} \cdot e^{-i\omega t},$$

где  $\alpha = \sin \theta$ ,  $\beta = \cos \theta$  — составляющие волнового вектора, а  $k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}$  — волновое число. В дальнейшем временной множитель будем опускать.

Согласно основным законам электродинамики (см., напр., [7, 9, 28, 29]) электромагнитное поле характеризуется напряженностью электромагнитного поля  $\vec{E}$  и напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ . При изучении дифракционных явлений, вызванных падением плоской электромагнитной волны на гра-

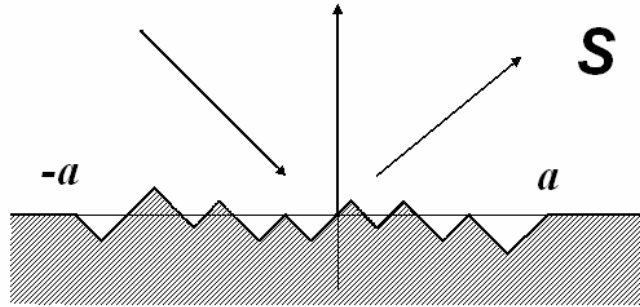


Рис. 1: Геометрия задачи.

ницу раздела двух сред, выделяют два случая поляризации, которые принято называть  $TE$  (от transverse electric) поляризацией и  $TM$  (от transverse magnetic) поляризацией, последний случай обозначают также как  $TH$ -поляризацию. В  $TE$ -случае электрическое поле перпендикулярно плоскости падения волны, т.е.  $\vec{E} = u(x, z) \cdot \vec{y}_0$ , и задача сводится к нахождению единственной составляющей электрического вектора

$$u(x, z) = E_y(x, z).$$

Остальные составляющие электромагнитного поля определяются из уравнений Максвелла через  $E_y$ :

$$H_x = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

В случае  $TH$ -поляризации, вектор магнитного поля  $\vec{H}$  перпендикулярен плоскости падения волны, т.е.  $\vec{H} = u(x, z) \cdot \vec{y}_0$  и достаточно найти компоненту магнитного поля

$$u(x, z) = H_y(x, z),$$

через которую из уравнений Максвелла вычисляются осталь-

ные компоненты электромагнитного поля:

$$E_x = \frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x}.$$

С математической точки зрения, эти случаи соответствуют краевым задачам с различными граничными условиями, а именно, случаю  $TE$ -поляризации отвечает краевая задача с условием Дирихле на границе, а в случае  $TM$ -поляризации исследуется краевая задача с условием Неймана (подробности, см., напр., [7, 9, 24, 28]).

Пусть  $a$  — положительное вещественное число. Обозначим через  $f(x)$  — кусочно-гладкую функцию, такую, что  $\text{supp } f \subset [-a, a]$  и рассмотрим в плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x$  и  $z$  область

$$S = \{(x, z) : z > f(x), -\infty < x < \infty\}.$$

Для границы этой области справедливо представление

$$\partial S \equiv \gamma = \gamma^* \cup \{(x, 0) : x \notin [-a, a]\},$$

где через  $\gamma^*$  обозначен неровный участок границы, который можно записать в виде

$$\gamma^* = \{(x, f(x)) : x \in [-a, a]\}.$$

Предполагаем, что граница области кусочно-гладкая и каждый гладкий участок описывается функцией из класса  $C^{(2)}$ . Обозначим через  $\Omega = \{w_j\}_{j=1}^m \subset \gamma^*$  множество точек нарушения гладкости.

Заметим, что структуры с рассматриваемой здесь геометрией включают в себя широкий класс дифракционных решёток (см., напр., [28]), типичные примеры которых приведены на рис. 2.

Обозначим через  $\vec{n}_P$  вектор единичной нормали в точке  $P$  границы, а через  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}$  — правильную нормальную производную в точке  $P$  (см., напр., [3]). Эта производная определена

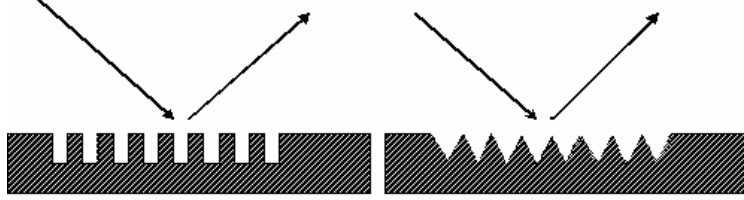


Рис. 2: Типичные примеры дифракционных решёток.

во всех точках границы, за исключением конечного числа точек нарушения гладкости (рёбер).

Сформулируем задачу рассеяния в следующем виде.

Найти функцию  $u(x, z)$ , такую, что

$$\Delta u(x, z) + k^2 u(x, z) = 0, \quad (x, z) \in S, \quad (1)$$

$$u(x, z) = h(x), \quad (x, z) \in \gamma \setminus \Omega \quad (2)$$

(задача Дирихле) или

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial \vec{n}_P} = g(x), \quad P = (x, z) \in \gamma \setminus \Omega \quad (3)$$

(задача Неймана).

Предполагаем, что в точках нарушения гладкости  $w_j \in \Omega$  функция  $u(x, z)$  удовлетворяет условию на ребре следующего вида (см., напр., [9, 20, 22]):

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{C_\rho \cap S} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}} d\ell = 0, \quad (4)$$

где  $C_\rho$  — окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $w \in \Omega$ .

Кроме того, требуем выполнения условий излучения

$$\begin{aligned} u^* &= e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \frac{\partial u^*}{\partial r} - ik u^* &= e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$u^*(x, z) = u(x, z) - \tilde{u}(x, z), \quad (6)$$

через  $\tilde{u}(x, z)$  обозначено решение краевой задачи для полуплоскости [25].

Задача дифракции плоской электромагнитной волны

$$e^{ik(\alpha x - \beta z)} \cdot e^{-i\omega t}, \quad \alpha = \cos \theta, \quad \beta = \sin \theta \quad (7)$$

в случае  $TE$ -поляризации соответствует краевой задаче (1)–(5) с краевым условием (2), в котором

$$h(x) = -u_0(x, f(x)), \quad x \in [-a, a].$$

Случаю  $TM$ -поляризованной волны отвечает краевая задача с условием (3), в котором

$$g(x) = -\frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}_P}(x, f(x)), \quad x \in [-a, a].$$

Здесь  $u_0(x, z) = e^{ik(\alpha x - \beta z)}$  и

$$\tilde{u}(x, z) = \begin{cases} -e^{ik(\alpha x + \beta z)}, & \text{в случае } TE\text{-поляризации,} \\ e^{ik(\alpha x + \beta z)}, & \text{в случае } TM\text{-поляризации.} \end{cases} \quad (8)$$

**Определение 1.** Классическим решением краевой задачи (1) – (5) назовем функцию  $u(P) \in C^2(S) \cap C(\overline{S \setminus \Omega_\delta})$ ,



удовлетворяющую в области  $S$  уравнению Гельмгольца, одному из граничных условий (2) или (3), условию излучения (5) и условию на ребре (4) в точках нарушения гладкости. Здесь через  $\Omega_\delta$  обозначено объединение произвольно малых  $\delta$  – окрестностей точек  $w_q \in \Omega$ ,  $q = 1, \dots, m$ .

Такое определение классического решения возможно только в случае конечного числа точек нарушения гладкости и является общепринятым (см., напр., [26]). Вместо термина классическое решение в кусочно–гладком случае используется также термин квазиклассическое решение (см., напр., [10]).

### Единственность решения

Аналогично методу выметания (см., напр., [8]) введём области  $S_j$  с границами  $\gamma_j \in C^{(2)}$ , так что

$$S_j \subset S_{j+1} \subset S, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j = S.$$

Области  $S_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) можем выбрать, например, следующим образом. Пусть  $M = \max_{-a \leq x \leq a} f(x)$  и  $0 < \delta < M/2$ , обозначим через  $\tilde{C}_{\rho, \ell}$  – круг радиуса  $\rho = \delta/j$  с центром в точке  $w_\ell \in \Omega$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ . Положим

$$S_j = \tilde{S}_j \cup \left( \bigcup_{\ell=1}^m (\tilde{C}_{\rho, \ell} \cap S) \right),$$

где  $\tilde{S}_j = S \setminus \left( \bigcup_{\ell=1}^m (\tilde{C}_{\rho, \ell}) \right)$  и  $C_{\rho, \ell}$  – окружность радиуса  $\rho$  с центром в  $w_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим также ограниченные области  $S_{j,R}$ , определённые для вещественных  $R > a$  (см. рис. 3):

$$S_{j,R} = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq R^2, z > f_j(x)\},$$

где  $f_j(x)$  – функции, определяющие границы областей  $S_j$  (т.е.  $\partial S_j = (x, f_j(x))$ ),  $j \in \mathbb{N}$ .

Этот пример показывает, что последовательность областей  $\{S_j\}_1^\infty$  можем выбрать так, что границы  $\partial S_j$  областей  $S_j$  принадлежат  $\gamma \equiv \partial S$ , за исключением участка  $\gamma'_j \equiv \gamma \setminus (\partial S_j \cap \gamma)$ , длина которого стремится к 0 при  $j \rightarrow \infty$ . Кроме того, аппроксимирующие области можно выбрать так, что  $\gamma'_j \subset S_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

**Определение 2.** Пусть краевая задача (1) – (5) разрешима в областях  $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) и  $\{u_j(P)\}_1^\infty$  – последовательность решений. Обобщённым по Винеру решением краевой задачи назовем функцию

$$u(P) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(P), \quad P \in S,$$

если предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности областей.

Более подробную информацию о обобщённых решениях по Винеру можно найти в [13, 21].

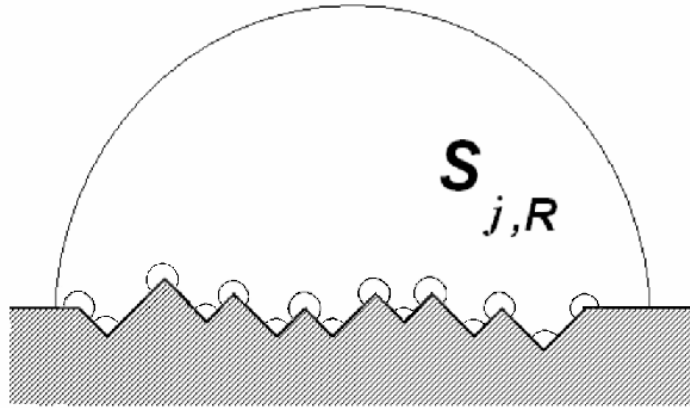


Рис. 3: Аппроксимация гладкими областями.

**Лемма 1.** Если функция  $u(P) \in L_2(S)$  удовлетворяет условиям краевой задачи (1) – (5) и  $\text{Im } k \geq 0$ ,  $\text{Re } k \neq 0$ , то

$$\int_{\Sigma_R^+} u(P) \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial \vec{n}_P} ds_P \rightarrow 0, \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Здесь через  $\Sigma_R^+$  обозначен лежащий в  $S$  участок окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат.

**Доказательство.** Для фиксированных вещественного числа  $R > a$  и натурального  $j$  рассмотрим область  $S_{j,R}$ . Известно, что  $C^\infty(S_{j,R})$  плотно в  $L_2(S_{j,R})$ . Пусть  $\{u_\ell\}$  – представитель класса  $u$ . Применим к функциям  $u_\ell(x, z)$  и  $\bar{u}_\ell(x, z)$  вторую формулу Грина в области  $S_{j,R}$ :

$$\int_{S_{j,R}} \int (u_\ell \Delta \bar{u}_\ell - \bar{u}_\ell \Delta u_\ell) d\sigma = \int_{\partial S_{j,R}} \left( u_\ell \frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial \vec{n}_P} - \bar{u}_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial \vec{n}_P} \right) ds_P.$$

Переходя к пределу при  $\ell \rightarrow \infty$ , получим формулу Грина для функций  $u$  и  $\bar{u}$ :

$$\int_{S_{j,R}} \int (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) d\sigma = \int_{\partial S_{j,R}} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}_P} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_P} \right) ds_P. \quad (9)$$

Интегралы в данном случае понимаются в смысле Лебега.

Пусть  $k = \nu + i\rho$ , тогда, учитывая, что  $\Delta \bar{u} = -\bar{k}^2 \bar{u}$  и  $\Delta u = -k^2 u$ , получаем, что интеграл в левой части (9) равен

$$i(4\nu\rho) \int_{S_{j,R}} \int u \bar{u} d\sigma.$$

Интеграл в правой части (9) можно записать как интеграл по участку границы  $\partial S_j \cap S_R$  и интеграл по  $\Sigma_R^+$ , здесь

$$S_R = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq R^2\} \cap \bar{S}.$$

Из граничных условий следует, что интеграл по участку границы  $\partial S_j \cap S_R$  в пределе по  $j \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Из

условий излучения получаем, что интеграл по  $\Sigma_R^+$  равен

$$-2i\nu \int_{\Sigma_R^+} |u|^2 ds_P + o\left(\frac{1}{R}\right)R.$$

Таким образом, в соотношении (9) в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получаем

$$i(4\nu\rho) \int_{S_R} |u|^2 d\sigma + i(2\nu) \int_{\Sigma_R^+} |u|^2 ds \rightarrow 0. \quad (10)$$

По условиям леммы  $\nu = \operatorname{Re} k \neq 0$ ,  $\rho = \operatorname{Im} k > 0$ , поэтому оба члена в последнем соотношении положительны и, следовательно, в пределе при  $R \rightarrow \infty$ , каждый из них стремится к 0.

Из условий излучения для функций  $u$  и  $\bar{u}$  получаем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -i\bar{k}\bar{u} + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)e^{-i\bar{k}r}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = iku + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)e^{ikr}.$$

Поэтому в пределе  $R \rightarrow \infty$  интеграл

$$J = \int_{\Sigma_R^+} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}_P} ds_P = \int_{\Sigma_R^+} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds_P$$

равен

$$J = -i\bar{k} \int_{\Sigma_R^+} |u|^2 ds_P + e^{-i\bar{k}R} o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \int_{\Sigma_R^+} u ds_P.$$

Учитывая, что при  $R \rightarrow \infty$

$$u = e^{ikR} O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \quad \bar{u} = e^{-i\bar{k}R} O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

получаем

$$J = -i\bar{k} \int_{\Sigma_R^+} |u|^2 ds_P + o\left(\frac{1}{R}\right)R.$$

Следовательно, при  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\Sigma_R^+} u(P) \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial \bar{n}_P} ds_P \rightarrow 0.$$

**Теорема 1.** При условии  $\text{Im } k \geq 0$  (и, дополнительно,  $\text{Re } k \neq 0$  в случае граничного условия (3)) краевые задачи (1) – (5) могут иметь не более одного решения в классе квадратично-суммируемых в смысле Лебега функций.

**Доказательство.** Предположим, от противного, что существуют два решения  $v_1(x, z)$  и  $v_2(x, z)$  краевой задачи (1) – (5), принадлежащих пространству  $L_2(S)$ . Пусть  $u(x, z) = v_1(x, z) - v_2(x, z)$ ,  $(x, z) \in S$ .

Рассмотрим функции  $u_j(x, z)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , определённые в областях  $S_j$  следующим образом:

$$u_j(x, z) = \begin{cases} u(x, z), & (x, z) \in S_j \cup (\gamma_j \cap \gamma), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т.е. значения функции  $u_j(x, z)$  совпадают со значениями функции  $u(x, z)$  в области  $S_j$  и на общих участках границ  $\gamma$  и  $\gamma_j$ , а на оставшейся части границы доопределены нулём. Очевидно, что  $u_j \in L_2(S)$ .

Поскольку функции из  $C^\infty(S_{j,R})$  плотны в  $L_2(S_{j,R})$ , существует последовательность непрерывных функций  $\{u_{j,\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ , сходящихся к  $u_j$  по норме пространства  $L_2(S_{j,R})$ .

Для фиксированных целого  $j$  и  $R > a$  применим в области  $S_{j,R}$  первую формулу Грина к функциям  $u_{j,\ell}$  и  $\bar{u}_{j,\ell}$  и перейдем к пределу при  $\ell \rightarrow \infty$ , в результате получим

$$\int_{S_{j,R}} u_j \Delta \bar{u}_j d\sigma + \int_{S_{j,R}} |\nabla u_j|^2 d\sigma = \int_{\partial S_{j,R}} u_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{n}_P} ds_P. \quad (11)$$

Интеграл в правой части (11) представим в виде суммы интегралов по составляющим границы  $\partial S_{j,R} = \gamma_j \cup \Sigma_R^+$ . Согласно определению функций  $u_j(x, z)$ , справедливо утверждение

леммы 1 (поскольку в области  $S$  функция  $u_j(x, z)$  совпадает с  $u(x, z)$ , удовлетворяет на границе  $\gamma_j$  условию Дирихле или Неймана, а на бесконечности — условиям излучения), поэтому в пределе при  $R \rightarrow \infty$  формула (11) переходит в

$$\int_{S_j} u_j \Delta \bar{u}_j d\sigma + \int_{S_j} |\nabla u_j|^2 d\sigma = \int_{\gamma_j} u_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \vec{n}_P} ds_P. \quad (12)$$

В силу граничных условий правая часть формулы (12) равна нулю. Следовательно,  $u_j(x, z) = 0$  при  $(x, z) \in S_j$ . В пределе при  $j \rightarrow \infty$  приходим к равенству  $u(x, z) = 0$  для  $(x, z) \in S$ . Таким образом, решение краевой задачи единственно.

## Существование решения

Выберем последовательность областей  $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), аппроксимирующих область  $S$  и обладающих свойствами:

$$\dots \subset S_j \subset S_{j+1} \subset \dots \subset S, \quad \gamma_j \equiv \partial S_j \in C^{(2)}. \quad (13)$$

Как было замечено ранее, последовательность областей можем выбрать так, что

$$\emptyset \neq \partial S_j \cap \gamma \quad j \in \mathbb{N} \quad (14)$$

и длина участка  $\gamma'_j \equiv \gamma \setminus (\partial S_j \cap \gamma)$  стремится к 0 при  $j \rightarrow \infty$ , т.е. границы областей  $S_j$  совпадают за исключением участка  $\gamma'_j$ . Более того, можем считать, что этот участок содержится в  $S_{j+1}$ . Будем обозначать через  $\tilde{\gamma}_j$  участок границы  $\partial S_j$ , лежащий в  $\bar{S}$ , т.е.

$$\tilde{\gamma}_j = \gamma \cap \partial S_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  рассмотрим краевую задачу (1) – (5) в области  $S_j$  (т.е. при  $\gamma = \gamma_j$  и  $\Omega = \emptyset$ ). Согласно результатам работ [14, 18, 19], краевая задача в области  $S_j$  имеет единственное решение  $u_j(x, z)$ , принадлежащее классу  $C^2(S_j) \cap C(S_j \cup \gamma_j)$  (в случае граничного условия (3) к

определению класса добавлено условие существования правильной нормальной производной на границе). В случае задачи Дирихле функция  $u_j(x, z)$  представима в виде комбинации вспомогательного решения  $\tilde{u}$  для случая полуплоскости и обобщённого потенциала двойного слоя  $W_{\{\gamma_j^*, \psi\}}$ :

$$u(M) = \tilde{u}(M) + W_{\{\gamma_j^*, \psi\}}(M), \quad M \in S, \quad (16)$$

$$W_{\{\gamma_j^*, \psi\}}(M) \equiv \int_{\gamma_j^*} \frac{\partial G_1(M, P)}{\partial \vec{n}_P} \psi(\tau) ds_P. \quad (17)$$

Решение краевой задачи Неймана представимо в виде

$$u(M) = \tilde{u}(M) + V_{\{\gamma_j^*, \psi\}}(M), \quad (18)$$

где

$$V_{\{\gamma_j^*, \varphi\}}(M) \equiv \int_{\gamma_j^*} G_2(M, P) \varphi(\tau) ds_P, \quad (19)$$

обобщённый потенциал простого слоя. Здесь

$$G_m(M, P) = \frac{\pi i}{2} \left\{ H_0^{(1)}(kr) + (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*) \right\}, \quad (20)$$

$m = 1, 2$  и  $\varphi, \psi \in \dot{C}[-a, a]$ . Через  $H_0^{(1)}(z)$  обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка (см., напр., [7, 24]),

$$M = (x, z), \quad P = (\tau, \zeta),$$

$$r = \sqrt{(x - \tau)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x - \tau)^2 + (z + \zeta)^2}.$$

Плотности потенциалов определяются как решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\pi \psi(x) + \int_{\gamma_j^*} \frac{\partial G_1(M, P)}{\partial \vec{n}_P} \psi(\tau) ds_P = \rho(M), \quad (21)$$

$$-\pi \varphi(x) + \int_{\gamma_j^*} \frac{\partial G_2(M, P)}{\partial \vec{n}_M} \varphi(\tau) ds_P = \chi(M). \quad (22)$$

Здесь  $\rho(M) = h(x) - \tilde{u}(M)$ ,  $\chi(M) = g(x) - \tilde{u}(M)$ ,  $M = (x, f(x)) \in \gamma^*$ ,  $P = (\tau, f(\tau))$ , а  $\gamma_j^* \equiv \gamma_j \setminus (\partial S \setminus \gamma^*)$  — неровный участок границы  $\gamma_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ). Эти уравнения получены из теоремы о скачке значений обобщенных потенциалов (см., напр., [12, 27]).

Таким образом, получаем последовательность функций  $\{u_j(x, z)\}_{j=1}^{\infty}$ , являющихся классическими решениями краевой задачи в областях  $S_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ). Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  обозначим через  $(S_j, u_j)$  пару, состоящую из области  $S_j$  и функции  $u_j(x, z)$ , являющейся решением одной из краевых задач (1) – (5) в области  $S_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Рассмотрим теперь пары  $(S_j, u_j)$  и  $(S_{j+1}, u_{j+1})$  для некоторого фиксированного номера  $j$ . Согласно выбору аппроксимирующей последовательности областей имеем

$$S_j \subset S_{j+1}, \quad \gamma_j \cap \gamma_{j+1} \subset \gamma, \quad \gamma'_j \equiv \gamma_j \setminus (\gamma_j \cap \gamma_{j+1}) \subset S_{j+1}. \quad (23)$$

На общем участке границы областей  $S_j$  и  $S_{j+1}$  выполнено условие

$$u_j|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = u_{j+1}|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = h|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}}. \quad (24)$$

На участке  $\gamma'_j$  функция  $u_{j+1}$ , в силу (23), определена и непрерывна (как решение краевой задачи в области  $S_{j+1}$ ). Рассмотрим теперь в области  $S_j$  краевую задачу, состоящую из уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (25)$$

граничного условия

$$u|_{\gamma_j} = u_{j+1}|_{\gamma_j} \quad (26)$$

и условия излучения на бесконечности вида (5).

Приведённая краевая задача, вследствие результатов для случая гладкой границы, имеет единственное классическое решение. Обозначим решение этой краевой задачи через  $\dot{u}_j(x, z)$ . Таким образом, исходя из последовательности пар  $\{(S_j, u_j)\}_1^{\infty}$  получили последовательность функций  $\{\dot{u}_j(x, z)\}_1^{\infty}$ .



Заметим, что для каждого  $j \in \mathbb{N}$ , функция  $u_{j+1}|_{S_j}$  также удовлетворяет условиям краевой задачи (25), (26), (5). В силу единственности решения этой краевой задачи заключаем, что

$$\dot{u}_j(x, z) = u_{j+1}(x, z), \quad (x, z) \in S_j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Как следствие последнего соотношения, получаем при  $k \leq j$ ,  $j, k \in \mathbb{N}$

$$\dot{u}_k(x, z) = u_{j+1}(x, z), \quad (x, z) \in S_k, \quad (28)$$

т.е.

$$\dot{u}_k \equiv u_{j+1}|_{S_k} \quad \text{при } k \leq j.$$

Рассмотрим теперь отрезок последовательности

$$\{\dot{u}_1(x, z), \dots, \dot{u}_j(x, z), \dot{u}_{j+1}(x, z)\}$$

при фиксированном  $j \in \mathbb{N}$ . Заменяем функцию  $\dot{u}_j(x, z)$  на решение краевой задачи (25), (26), (5), в которой граничное условие изменено следующим образом

$$u|_{\gamma_j} = \dot{u}_{j+1}|_{\gamma_j}. \quad (29)$$

Полученное решение по-прежнему будем обозначать через  $\dot{u}_j(x, z)$ . Точно так же поступим с функцией  $\dot{u}_{j-1}(x, z)$  и далее, вплоть до начала отрезка. Из соотношения (28) следует, что

$$\dot{u}_k \equiv \dot{u}_j|_{S_k}, \quad k < j, \quad k, j \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Аналогично строится последовательность  $\{\dot{u}_j(x, z)\}_1^\infty$  для краевой задачи с условием Неймана на границе.

Полученные утверждения сформулируем в виде следующей леммы.

**Лемма 2.** *Последовательность  $\{\dot{u}_j\}_{j=1}^\infty$  обладает следующими свойствами:*

- 1)  $\dot{u}_k(x, z) = \dot{u}_j(x, z), \quad (x, z) \in S_k, \quad k < j, \quad k, j \in \mathbb{N};$
- 2)  $\dot{u}_j|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = \dot{u}_{j+1}|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = -u_0|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}}, \quad j \in \mathbb{N}.$

Из утверждений о эквивалентности интегральных уравнений и краевых задач дифракции в гладких областях (см. [14, 18, 19]) следует, что каждая функция  $\dot{u}_j(x, z)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) представима в виде

$$\dot{u}_j(x, z) = \tilde{u}(x, z) + W_{\{\gamma_j^*, \dot{\varphi}_j\}}(x, z) \quad (31)$$

в случае краевой задачи Дирихле и

$$\dot{u}_j(x, z) = \tilde{u}(x, z) + V_{\{\gamma_j^*, \dot{\varphi}_j\}}(x, z) \quad (32)$$

в случае краевой задачи Неймана. Плотности  $\dot{\varphi}_j(x)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) обобщённых потенциалов (17) и (19) получены как решения интегральных уравнений (21) и (22), при этом функция  $f(x)$ , определяющая неровный участок границы  $\partial S$  заменена на функцию  $f_j(x)$ , определяющую неровный участок границы  $\partial S_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).

Таким образом, наряду с последовательностью пар  $\{(S_j, \dot{u}_j)\}$  имеем последовательность функций  $\{\dot{\varphi}_j(x)\}$ .

**Теорема 2.** *При условии  $\text{Im } k \geq 0$ , последовательность  $\{\psi_j(x, z)\}_1^\infty$  решений интегральных уравнений (21) сходится в пространстве  $L_2[-a, a]$  к функции  $\psi(x, z)$ , такой, что функция*

$$u(x, z) = \tilde{u}(x, z) + W_{\{\gamma^*, \psi\}}(x, z) \quad (33)$$

*является решением краевой задачи (1) – (5) с условием Дирихле на границе.*

**Теорема 3.** *При условиях  $\text{Im } k \geq 0$  и  $\text{Re } k \neq 0$  последовательность  $\{\varphi_j(x, z)\}_1^\infty$  решений интегральных уравнений (22) сходится в пространстве  $L_2[-a, a]$  к функции  $\varphi(x, z)$ , такой, что потенциал*

$$u(x, z) = \tilde{u}(x, z) + V_{\{\gamma^*, \varphi\}}(x, z) \quad (34)$$

*является решением краевой задачи (1) – (5) с условием Неймана на границе.*

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность функций  $\{\dot{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , построенную по указанной ранее схеме. Каждая из функций  $\dot{u}_j(x, z)$  этой последовательности является решением краевой задачи дифракции в области с достаточно гладкой границей и, следовательно, как показано ранее, представима в виде обобщённого потенциала, вычисленного по формулам (31) или (32) в зависимости от поляризации задачи.

Покажем, что предел последовательности функций  $\{\dot{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  существует и является решением краевой задачи (1) – (5).

Пусть  $i, j$  — натуральные числа,  $k = \min\{i, j\}$  и  $R > a$  — вещественное число. Рассмотрим в области  $S_R$  функции  $\dot{u}_i(x, z)$  и  $\dot{u}_j(x, z)$ . Согласно лемме 2 имеем

$$\dot{u}_i(x, z) = \dot{u}_j(x, z), \quad \text{при } (x, z) \in S_k. \quad (35)$$

Пусть для определённости  $i > j$ , тогда

$$(\dot{u}_i - \dot{u}_j)|_{S_i} = (\dot{u}_i - \dot{u}_j)|_{S_{i,R}} = U_{\{\gamma_{j,R}, \varphi_j\}} - U_{\{\gamma_{i,R}, \varphi_i\}}, \quad (36)$$

где

$$U_{\{\gamma_{j,R}, \varphi_j\}} = W_{\{\gamma_{j,R}, \varphi_j\}}$$

в случае задачи Дирихле и

$$U_{\{\gamma_{j,R}, \varphi_j\}} = V_{\{\gamma_{j,R}, \varphi_j\}}$$

— в случае задачи Неймана.

Из соотношения (36) получаем

$$(\dot{u}_i - \dot{u}_j)|_{S_i} = U_{\{\gamma_{i,R}, \varphi_j\}} - U_{\{\gamma_{i,R}, \varphi_i\}} + U_{\{\partial S_i \setminus \partial S_j, \varphi_i\}}.$$

Откуда приходим к равенству

$$U_{\{\gamma_{i,R}, \varphi_i - \varphi_j\}} = (u_i - u_j)|_{S_i} + U_{\{\partial S_i \setminus \partial S_j, \varphi_i\}}. \quad (37)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (37) равно нулю согласно (35), а второе слагаемое стремится к 0 при  $j \rightarrow \infty$  в силу того, что  $S_{j,R} \rightarrow S_R$  и  $\partial S_{j,R} \rightarrow \partial S_R$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Таким образом, последовательность функций  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  фундаментальна.

В пространстве  $L_2(\partial S_R)$  существует предел этой последовательности функций, который обозначим через

$$\varphi^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j.$$

Рассмотрим функцию

$$u^*(x, z) = \tilde{u}(x, z) + U_{\{\partial S_R, \varphi^*\}}(x, z). \quad (38)$$

Поскольку функция  $u^*(x, z)$  является обобщённым потенциалом, она удовлетворяет уравнению Гельмгольца, и для неё выполнены условия излучения на бесконечности.

Выполнение условия на ребре в точках множества  $\Omega$  следует из соотношения

$$U_{\{\cup C_{\delta, j}, \varphi^*\}} = U_{\{\partial S_{j, R}, \varphi^*\}} - U_{\{\partial S_R, \varphi^*\}}$$

и из того, что  $S_{j, R} \rightarrow S_R$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Таким образом, найдено ненулевое решение краевой задачи (1) – (5), причём решение представимо в виде, указанном в формулировке теорем.

Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  запишем интегральные уравнения (21), (22) в едином виде

$$\varphi_j(x) + \int_{\gamma^*} \tilde{K}_j(x, \tau) \varphi_j(\tau) ds_P = y(x), \quad -a < x < a. \quad (39)$$

Из теоремы об уравнениях с близкими ядрами (см. [11, стр. 157]) и теорем 1 – 3 следует

**Теорема 4.** *Существует последовательность  $\{\tilde{\varphi}_j(x)\}$  решений интегрального уравнения (39), которая сходится в пространстве  $L_2[-a, a]$  к такой функции  $\varphi(x)$ , что обобщённый потенциал двойного слоя (в случае задачи Дирихле) или обобщённый потенциал простого слоя (в случае задачи Неймана) с плотностью  $\varphi(x)$  является решением краевой*

задачи дифракции (1) – (5). При этом функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(x) + \int_{\gamma^*} \widetilde{K}(x, \tau) \varphi(\tau) ds_P = y(x), \quad (40)$$

где  $P = (\tau, f(\tau))$ ,  $M = (x, f(x))$ , ядро вычислено по формулам

$$\widetilde{K}(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial G_1(M, P)}{\partial \vec{n}_P}$$

в  $TE$ -случае,

$$\widetilde{K}(x, \tau) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial G_2(M, P)}{\partial \vec{n}_M}$$

в  $TM$ -случае,  $\widetilde{K}(x, \tau) = 0$ , если  $M \in \Omega$ , а при совпадении аргументов значение ядра равно половине кривизны гладкого участка границы. Правая часть интегрального уравнения вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\pi} [h(x) - \tilde{u}(x, f(x))] \text{ в } TE\text{-случае и} \\ y(x) &= -\frac{1}{\pi} [g(x) - \tilde{u}](x, f(x)) \text{ в } TM\text{-случае.} \end{aligned}$$

Непосредственным следствием теорем 1 – 4, а также свойств обобщённых потенциалов является следующее утверждение.

**Теорема 5.** В условиях теоремы 1, решение краевой задачи (1) – (5), построенное согласно схеме, указанной в формулировке теоремы 4, является классическим.

## Приближённое решение краевой задачи

Будем решать интегральное уравнение

$$\mathcal{K}\varphi \equiv \varphi(x) + \int_{-a}^a \widetilde{K}(x, \tau) \varphi(\tau) d\tau = y(x), \quad x \in [-a, a], \quad (41)$$

эквивалентное краевой задаче, методом сплайн-подобластей. Ядро интегрального уравнения (41) в  $TE$  – случае вычисля-

ется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \widetilde{K}(x, \tau) = & \frac{ik}{2} \left[ \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} \{(x - \tau) f'(\tau) + (f(\tau) - f(x))\} + \right. \\ & \left. + \frac{H_1^{(1)}(kr^*)}{r^*} \{(\tau - x) f'(x) - (f(x) + f(\tau))\} \right], \end{aligned} \quad (42)$$

$\widetilde{K}(x, \tau) = 0$ , если точка  $M = (\tau, f(\tau))$  принадлежит множеству  $\Omega$  (т.е. является ребром). При совпадении аргументов значение ядра доопределяется значением

$$\frac{f''(\tau)}{2\pi [1 + (f'(\tau))^2]}.$$

Правая часть интегрального уравнения (41) в  $TE$  – случае вычисляется по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\pi} [h(x) - \tilde{u}(x, f(x))]. \quad (43)$$

В  $TM$  – случае, ядро и правая часть интегрального уравнения (41) определяются по формулам

$$\begin{aligned} \widetilde{K}(x, \tau) = & \frac{ik}{2} \sqrt{\frac{1 + (f'(\tau))^2}{1 + (f'(x))^2}} \times \\ & \times \left[ \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} \{(x - \tau) f'(x) + (f(\tau) - f(x))\} + \right. \\ & \left. + \frac{H_1^{(1)}(kr^*)}{r^*} \{(x - \tau) f'(x) - (f(x) + f(\tau))\} \right], \end{aligned} \quad (44)$$

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} [g(x) - \tilde{u}(x, f(x))]. \quad (45)$$

При совпадении аргументов значение ядра доопределяется значением

$$-\frac{f''(x)}{2\pi [1 + (f'(x))^2]}$$

и полагается равным 0, если точка  $M = (\tau, f(\tau))$  принадлежит множеству  $\Omega$ .

В соотношениях (42) и (44) использованы обозначения

$$r = \sqrt{(x - \tau)^2 + (f(x) - f(\tau))^2}, \quad r^* = \sqrt{(x - \tau)^2 + (f(x) + f(\tau))^2}.$$

На отрезке  $[-a, a]$  рассмотрим произвольную сетку узлов

$$\Delta_n : -a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq a, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

удовлетворяющую условию

$$\delta_n = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Приближённое решение интегрального уравнения (41) ищем в виде сплайна

$$\varphi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^n c_j s_j^l(x), \quad 0^0 = 1, \quad (48)$$

где  $s_j^l(x)$  — фундаментальные сплайны степени  $l$ .

Приближённое решение в случае  $l = 0$  отыскивается в виде ступенчатой функции

$$\varphi_n^0(x) = \sum_{j=1}^n c_j s_j^0(x), \quad (49)$$

где

$$s_1^0(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x \leq x_1, \\ 0, & x_1 < x \leq a, \end{cases}$$

$$s_j^0(x) = \begin{cases} 1, & x_{j-1} < x \leq x_j, \\ 0, & x \notin (x_{j-1}, x_j), \end{cases} \quad j = \overline{2, n}.$$

Неизвестные коэффициенты  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) определяем, согласно методу подобластей, из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_j + \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} c_k = \Phi_j(y), \quad j = \overline{1, n}, \quad (50)$$

где

$$\Phi_j(y) = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} y(x) dx, \quad j = \overline{1, n}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} &= \Phi_j \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}(x, \tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}(x, \tau) d\tau dx, \quad j, k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (52)$$

Вычислительную схему (41), (46) — (52) называют (см., напр., [6]) ступенчатым методом подобластей.

В случае  $l = 1$  при построении приближённого решения используются фундаментальные сплайны первого порядка, определённые соотношениями

$$\begin{aligned} s_0^1(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x_0 < x \leq x_1 \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} \\ s_j^1(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_{j-1}, \\ \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, & x \geq x_{j+1}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}, \\ s_n^1(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n. \end{cases} \end{aligned} \quad (53)$$

Приближённое решение находим в виде полигонального сплайна

$$\varphi_n^1(x) = \sum_{j=0}^n c_j s_j^1(x). \quad (54)$$



Неизвестные коэффициенты  $c_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ) находим из условий

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [(\mathcal{K}\varphi_n^1)(x) - y(x)] dx = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (55)$$

С помощью функционалов  $\Phi_j$  условия (55) перепишем в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{c_{j-1} + c_j}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} c_k = \Phi_j(y), \quad j = \overline{1, n}, \quad (c_0 = c_n), \quad (56)$$

где

$$\alpha_{jk} = \Phi_j \left( \int_{x_{k-1}}^a \widetilde{K}(x, \tau) d\tau \right). \quad (57)$$

Вычислительную схему (41), (46), (54) — (57) называют (см., напр., [6]) полигональным методом подобластей.

Соотношения (57) можно конкретизировать:

$$\begin{aligned} \alpha_{j1} = & \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_0}^{x_1} \widetilde{K}(x, \tau) d\tau dx + \\ & + \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_2 - x_1)} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_1}^{x_2} \widetilde{K}(x, \tau) (x_2 - \tau) d\tau dx, \end{aligned}$$

при  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} = & \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_k - x_{k-1})} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}(x, \tau) (\tau - x_{k-1}) d\tau dx + \\ & + \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_2 - x_1)} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_1}^{x_2} \widetilde{K}(x, \tau) (x_{k+1} - \tau) d\tau dx, \end{aligned} \quad (58)$$

при  $j = 1, \dots, n, k = 2, \dots, n-1$ ,

$$\alpha_{jn} = \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_n - x_{n-1})} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \widetilde{K}(x, \tau) (\tau - x_{n-1}) d\tau dx,$$

при  $j = 1, \dots, n$ .

В матричном виде системы линейных уравнений (50), (56) можно записать в виде

$$A \cdot c = b, \quad (59)$$

где

$$A = [a_{jk}], \quad a_{jk} = \alpha_{jk} + \delta_{j,k}, \quad j, k = \overline{1, n},$$

$$c = [c_k]', \quad b = [b_k]', \quad b_k = y(x_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

### Обоснование вычислительной схемы

Для обоснования предложенной вычислительной схемы воспользуемся результатами Б. Г. Габдулхаева [5] и Ю. Р. Агачева [1].

Как только что показано, интегральное уравнение (41) однозначно разрешимо. Для ядра уравнения (41) выполнены условия, приведенные в работе [1]. В случае ступенчатого метода подобластей воспользуемся теоремой 1 работы [1], а в случае полигонального метода подобластей теоремой 3 из этой же работы. Следовательно, системы линейных алгебраических уравнений (50), (56) однозначно разрешимы начиная с некоторого  $n$ . Таким образом, сплайны нулевого и первого порядка, определяемые по методу подобластей, существуют и единственны при всех  $n$ , начиная с некоторого.

Из оценок (2.12) и (3.3) работы [1] получаем следующие оценки погрешности метода подобластей:

$$\begin{aligned} \|\varphi^* - \varphi_n^0\|_2 &= O\left(\omega_x(\widetilde{K}; \delta_n)_2 + \omega(y; \delta_n)_2\right) = \\ &= O\left(\omega_x(\widetilde{K}; \delta_n)_2 + \delta_n\right), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi^* - \varphi_n^1\|_2 &= O\left(\omega_x(\widetilde{K}; \delta_n)_2 + \omega(y; \delta_n)_2\right) = \\ &= O\left(\omega_x(\widetilde{K}; \delta_n)_2 + \delta_n\right), \end{aligned} \quad (61)$$

где через  $\varphi^*(x)$  обозначено точное решение уравнения (41) и

$$\omega(y; \delta)_2 = \sup_{0 < \eta \leq \delta} \left\{ \int_{-a}^{a-\eta} |y(t) - y(t + \eta)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

$$\omega_x(\widetilde{K}; \delta)_2 = \sup_{0 < \eta \leq \delta} \left\{ \int_{-a}^{a-\eta} \int_{-a}^a |\widetilde{K}(x + \delta, \tau) - \widetilde{K}(x, \tau)|^2 dx d\tau \right\}^{1/2}.$$

Из соотношений (60), (61) следует сходимость ступенчатого метода подобластей и полигонального метода подобластей.

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 6.** *В условиях теоремы 1 при достаточно больших  $n$  сплайн-функции  $\varphi_n^l(x)$ , определяемые ступенчатым и полигональным методами сплайн-подобластей, существуют, единственны и сходятся к точному решению  $\varphi^*(x)$  со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^l\|_2 = O(\omega_x(\widetilde{K}; \delta_n)_2 + \delta_n).$$

## Список литературы

- [1] Агачев Ю. Р. *О сходимости метода сплайн-подобластей для интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика, 1981. № 6 (229). — С. 3 — 10.
- [2] Басс Ф. Г., Фукс И. М. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.* — М.: Наука, 1972. — 424 с.
- [3] Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* — М.: Наука, 1976. — 528 с.
- [4] Габдулхаев Б. Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений* // Теория приближения функций. — М.: Наука, 1977. — С. 89 — 93.

- [5] Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач*. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. — 232 с.
- [6] Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода*. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. — 288 с.
- [7] Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. *Численные методы в задачах дифракции*. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. — 208 с.
- [8] Егоров Ю. В., Шубин М. А. *Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории*. // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. Т. 30. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1987. — С. 1 – 262.
- [9] Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. *Математические модели электродинамики*. — М.: Высш. шк., 1991. — 224 с.
- [10] Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции)*. — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.
- [11] Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближённые методы высшего анализа*. — Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
- [12] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: Пер. с англ.* — М.: Мир, 1987. — 311 с.
- [13] Кондратьев В. А., Олейник О. А. *Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях* // Успехи матем. наук, 1983. — Т. 38, № 2. — С. 3 – 76.

- [14] Липачёв Е. К. *О разрешимости задачи рассеяния на бесконечной решетке с конечной нарезкой* // “Алгебра и анализ”, Казань, 16–22 июня 1997. — Казань: Казан. матем. общество, 1997. — С. 135–136.
- [15] Липачёв Е. К. *Решение дифракционных задач в области с кусочно–гладкой границей* // “Алгебра и анализ”, Казань, 16–22 июня 1997. — Казань: Казан. матем. общество, 1997. — С. 137.
- [16] Липачёв Е. К. *Разрешимость краевой задачи дифракции волн на областях с кусочно–гладкой границей* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. — Казань: Казан. матем. общество, 1999. — С. 136 – 138.
- [17] Липачёв Е. К. *Об обобщенных по Винеру решениях краевой задачи дифракции волн на областях с негладкой границей* // Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. — Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 199 – 202.
- [18] Липачёв Е. К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Изв. Вузов. Математика, 2001. — № 4 (467). — С. 69 – 72.
- [19] Липачёв Е.К. *О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в областях с “неровной” границей* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. — Казань: Казан. матем. общество, 2002. — С. 79–89.
- [20] Лифанов И. К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн)*. — М.: ТОО “Янус”, 1995. — 520 с.

- [21] Миранда К. *Уравнения с частными производными эллиптического типа*. — М.: ИЛ, 1957. — 256 с.
- [22] Миттра Р., Ли С. *Аналитические методы теории волноводов*. — М.: Мир, 1974. — 328 с.
- [23] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. *Эллиптические задачи с кусочно-гладкой границей*. — М.: Наука, 1991. — 336 с.
- [24] Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук Э. Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах теории дифракции*. — Киев: Наук. думка, 1984. — 344 с.
- [25] Плещинский Н. Б. *Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей* // Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. — Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 153 – 185.
- [26] Смирнов Ю. Г. *О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей* // ДАН СССР, 1987. — 297, № 4. — С. 829 – 832.
- [27] Шестопапов Ю. В. *Применение метода обобщенных потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Журн. выч. матем. и мат. физики, 1990. — 30, № 7. — С. 1081 – 1092.
- [28] *Electromagnetic Theory of Gratings*. / Ed. by R. Petit, — Berlin – Heidelberg, New York, 1980. — 284 p.
- [29] Tsang L., Ding K. H., Ao C.A. *Scattering of Electromagnetic waves. Numerical Simulations*. — New York: Wiley–Interscience, 2001. — 705 p.