УДК 517.958

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ВЕЙВЛЕТОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ЛИПШИЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

Е.К. ЛИПАЧЁВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail elipachev@gmail.com

WAVELET APPROXIMATION METHODS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE HELMHOLTZ EQUATIONS IN LIPSCHITZ DOMAINS

E.K. LIPACHEV

Kazan Federal University

Аннотация

В работе предложены методы приближенного решения краевых задач рассеяния электромагнитных волн на полуплоскости с липшицевым включением. Операторы типа потенциала используются при сведении задач к интегральным уравнениям, а вейвлеты применены в качестве аппарата приближения.

Ключевые слова: Краевые задачи дифракции, уравнение Гельмгольца, метод интегральных уравнений, обобщенные потенциалы, метод вейвлетов

Summary

In this paper we propose methods for the approximate solution of boundary value problems of scattering of electromagnetic waves by a half-plane with a Lipschitz inclusion. Operators of potential type used in the reduction of the problem to integral equations and wavelets used as approximating.

Key words: Boundary value problems of diffraction, Helmholtz equation, integral equations method, wavelet methods.

Неровные границы рассматриваются при исследовании волновых процессов в задачах акустики океана, задачах дифракции электромагнитных волн, в задачах рассеяния света наноструктурами. (см., напр., [1], [2]). Неровность границы определяется отношением геометрических параметров границы (напр., период, разность максимального и минимального значений) и длины волны. Порядок этих отношений является основой классификации неровных поверхностей, (см., напр., [3]), а также определяет различие методов исследования. В задачах дифракции электромагнитных волн длина волны соизмерима с размерами неровностей.

Пусть $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > h(x)\right\}$, h – липшицева функция, имеющая конечный носитель. Требуется найти $u(x,y)\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0, \quad M = (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

одному из граничных условий:

$$\gamma_0 u(P) = f(P), \quad P\in\partial\Omega, \tag{2}$$

$$\gamma_1 u(P) = g(P), \quad P \in \partial\Omega, \tag{3}$$

и условию излучения на бесконечности. Здесь $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Через H^t обозначены пространства Соболева; $\gamma_0 : H^t(\Omega) \to H^{t-1/2}(\partial\Omega)$, $\gamma_1 : H^t(\Omega) \to H^{t-3/2}(\partial\Omega)$ – операторы следа и следа нормальной производной.

Эффективная методика получения интегральных уравнений, эквивалентных краевым задачам дифракции, состоит в применении теории потенциала и метода интегральных уравнений. (см., напр., [7]). В случае неровных границ используются обобщенные потенциалы, (см., напр., [5], а в случае липшицевых границ – операторы типа потенциала. (см., напр., [8]).

При условиях $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$ поставленная краевая задача имеет единственное решение и для решения справедливо представление ([4], [5]):

$$u(x,y) = \widetilde{u}(x,y) + v(x,y), \tag{4}$$

$$v(x,y) = (W(k)\sigma)(x,y) = \int_{\Gamma^*} \partial_{n(P)} G_1(k; M, P)\sigma(\tau)\, ds_P \tag{5}$$

– в случае TE–поляризованной волны и

$$v(x,y) = (V(k)\sigma)(x,y) = \int_{\Gamma^*} G_2(k; M, P)\sigma(\tau)\, ds_P \tag{6}$$

– в случае TM–поляризации. Функция $\sigma(x)$ является решением интегрального уравнения

$$-\pi\sigma(x) + \int_0^d \partial_{n(P)} G_1(k; M, P)\sqrt{1 + h'^2(\tau)}\,\sigma(\tau)\, d\tau = -\widetilde{u}(x, h(x)) \tag{7}$$

для задачи дифракции TE–поляризованной волны и

$$-\pi\sigma(x) + \int_0^d \partial_{n(M)} G_2(k; M, P)\sqrt{1 + h'^2(\tau)}\,\sigma(\tau)\, d\tau = -\partial_{n(M)}\widetilde{u}(x, h(x)) \tag{8}$$

– для случая TM–поляризации. В формулах (5)–(8) используются функции (аналоги функции Грина)

$$G_m(k; M, P) = \frac{\pi i}{2}\left\{H_0^{(1)}(kr) - (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*)\right\}, \quad m = 1, 2, \tag{9}$$

$M = (x,y)$, $P = (\tau, h(\tau))$, $r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y - h(\tau))^2}$, $r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y + h(\tau))^2}$, Γ^* — неровный участок границы области Ω, $d = \operatorname{supp} h(x)$ — длина неровного участка границы. Через $H_0^{(1)}(z)$ обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка.

В качестве аппроксимирующих пространств в алгоритме приближенного решения интегральных уравнений используются пространства

$$X_n = V_n = V_0 \bigoplus W_0 \bigoplus W_1 \bigoplus \cdots \bigoplus W_n$$

кратномасштабного разложения пространства $L_2(\partial\Omega)$:

$$L_2(\partial\Omega) = \overline{\bigcup V_j}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j. \tag{10}$$

(см., напр., [9], [10]).

Алгоритмы приближенного решения интегральных уравнений основаны на аппроксимации решений вейвлетами Добеши и койфлетами. (см., [11]).

Приближенное решение $z_n(x)$ ищется в виде

$$z_n = \sum_k c_k \varphi_{0k} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_k d_{jk}\psi_{jk}. \tag{11}$$

Коэффициенты $\{c_k; d_{j,k}\}_{j,k}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений метода Галёркина.

Доказана сходимость приближенного решения к точному.

Список литературы

1. **Pike E.R., Sabatier P.C. (Eds.)** Scattering – Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science. – Academic Press, London, 2002. – 1831 p.
2. **Maradudin A.A.(Ed.)** Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness. – Springer Science-Business Media, 2007. – 496 p.
3. **Künzler T.P.** Surface Morphology Gradients. Doctoral Thesis ETH, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich. 2007. – 124 p., URL: http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:29763/eth-29763-02.pdf.
4. **Lipachev E.K.** On an approximate solution of a boundary value problem of wave diffraction by domains with an infinite boundary // Russian Mathematics. – 2001. – **45**:4. – P. 67–70.
5. **Lipachev E.K.** Solution of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation in domains with a rough boundary // Russian Mathematics. – 2006. – **50**:9. – C. 40 – 46.
6. **Mitrea I., Mitrea M.** Multi-Layer Potentials and Boundary Problems: for Higher-Order Elliptic Systems in Lipschitz Domains. – Springer–Verlag, 2013. – 424 p.
7. **Colton D., Kress R.** Integral Equation Methods in Scattering Theory. – SIAM, 2013. – 287 p.
8. **Agranovich M.S., Menniken R.** Spectral problems for the Helmholtz equation with a spectral parameter in the boundary conditions on a nonsmooth surface // Sbornik: Mathematics. – 1999. – **190**:1–2. – P. 29–69.
9. **Urban K.** Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations. – Oxford University Press, Inc., 2009. – 480 p.
10. **Cohen A.** Numerical Analysis of Wavelet Methods. – Elsevier, 2003. – 336 p.
11. **Pan G.** Wavelets in Electromagnetics and Device Modeling. John Wiley& Sons, Inc., 2003. – 532 p.