Казанский федеральный университет

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Кафедра общей математики

Е.Р. Газизов, С.Е. Газизова, А.Р. Газизов

Линейная алгебра

Методические указания

Казань – 2016

УДК 512
БКК 22.1я7
Г137

Принято на заседании учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 2 от 20 октября 2016 года

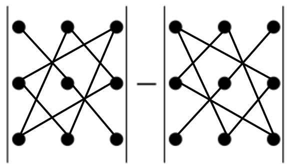
Рецензент:
кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики КГАСУ Т.Ю. Горская

Газизов Е.Р.
Г137 Линейная алгебра: методические указания / Е.Р. Газизов, С.Е. Газизова, А.Р. Газизов. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 58 с.

Методические указания по выполнению практических занятий по курсу «Линейная алгебра» предназначены для студентов экономических специальностей. В настоящих указаниях кратко изложены теоретические вопросы по основам линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии. Разобраны соответствующие примеры.

Тема 1. Определители и их свойства (обозначения: $\det A$, Δ, $|A|$)

Таблица №1

Понятия	Определения, обозначения, формулы
1. Определитель 1-го порядка	$A=(a_1)$, $\det A = a_1$
2. Определитель 2-го порядка	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Определитель 3-го порядка	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \end{matrix}$
4. Правило треугольников (Правило Саррюса)	
5. Минор m_{ij} элемента a_{ij}	$a_{ij} = a_{23}$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
6. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}	$A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$
7. Разложение определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ по элементам ряда (строки или столбца)	а) второй строки $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{21}a_{21} + A_{22}a_{22} + A_{23}a_{23}$ б) третьего столбца $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{13}a_{13} + A_{23}a_{23} + A_{33}a_{33}$

8. Элементарные преобразования определителя	а) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ma_{13} & a_{12}+na_{13} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{23} & a_{22}+na_{23} & a_{23} \\ a_{31}+ma_{33} & a_{32}+na_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$

Примеры решения задач

Заметим, что здесь и далее номер формулы расшифровывается по правилу: первая цифра – номер таблицы, вторая – номер строки в ней.

№1. Найти определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение: по формуле (1.2) найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2-(-1)\cdot 1 = 7.$$

Ответ: 7

№2. Найти определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение: решим задачу тремя способами.

а) Используем правило треугольников (1.4).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot(-2) - (-2)\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 3 =$$

$$= -1-8-8-6 = -23$$

б) Используем разложение определителя по элементам второй строки (1.7).

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(4+4) + 0 - (6+1) = -23$$

в) Используем правило (1.8). Сначала преобразуем определитель. К первому столбцу прибавим третий столбец, умноженный на (-2), затем разложим определитель по элементам второй строки

$$\Delta = \begin{vmatrix}7 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ -9 & 2 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}7 & 1\\ -9 & 2\end{vmatrix} = -23$$

Ответ: -23

№3. Найти определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ -1 & -3 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

Решение: приведем один из вариантов. К третьему столбцу прибавим первый столбец. Ко второму столбцу прибавим первый столбец, умноженный на (-3), затем разложим определитель по элементам второй строки

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ -1 & -3 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -6 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -9 & 7 & 1\\ 3 & -7 & 5 & 2\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-6 & 5 & 1\\ -9 & 7 & 1\\ -7 & 5 & 2\end{vmatrix} =$$

К первому столбцу прибавим третий столбец, умноженный на 6. Ко второму столбцу прибавим третий столбец, умноженный на (-5), затем разложим определитель по элементам первой строки

$$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 5 & -5 & 2\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 5 & -5\end{vmatrix} = 5$$

Ответ: 5

Тема 2. Матрицы. Виды матриц и действия над ними. Ранг матрицы

Таблица №2

Матрицы

Понятия	Определения, обозначения, формулы
1. Матрица	Прямоугольная таблица чисел $$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
2. Матрица, транспонированная к A	$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
3. Треугольная матрица	$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - снизу $$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - сверху
4. Единичная матрица	$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
5. Сумма матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$	Матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}=A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

6. Произведение матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число λ	Матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}=\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$
7. Произведение матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{n\times k}$	Матрица $C=(c_{ij})_{m\times k}=AB$ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$
8. Обратная матрица к матрице $A=(a_{ij})_{n\times n}$	Матрица A^{-1} $AA^{-1}=A^{-1}A=E$
9. Ранг матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$	Целое число $r_A\geq 0$ – наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля

Таблица №3

Основные задачи

Задача	Способ решения
1. Найти определитель матрицы $A=(a_{ij})_{n\times n}$	$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ Если $\det A\neq 0$, то A называется невырожденной
2. Найти обратную матрицу A^{-1} к невырожденной матрице $A=(a_{ij})_{n\times n}$	Алгоритм: 1. Проверяем $\det A\neq 0$ 2. Составляем матрицу $(A_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} – алгебраическое дополнение a_{ij} 3. Транспонируя полученную матрицу, получаем матрицу $\tilde{A}$

	4. $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A \rvert}\tilde{A}$
3. Найти r_A ранг матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$	Преобразуем матрицу A к ступенчатому виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований строк: 1. Перемена строк местами 2. Умножение всех элементов строки на число 3. Прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов параллельной строки, умноженных на число $r_A = k$

Примеры решения задач

№1. Найти линейную комбинацию матриц:

$$A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: используя формулы (2.5) и (2.6), найдем

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 15 \\ 12 & 3 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 10 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 19 \\ 2 & 5 & -17 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 19 \\ 2 & 5 & -17 \end{pmatrix}$

№2. Найти произведение матриц:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение: используя (2.7) найдем

$$A=\begin{pmatrix}4\cdot 3+(-3)\cdot(-2) & 4\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 & 4\cdot 2+(-3)\cdot 1\\ 2\cdot 3+1\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+1\cdot 0 & 2\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & -4 & 5\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

.

Ответ: $A=\begin{pmatrix}18 & -4 & 5\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$

№3. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: используем алгоритм (3.2). Найдем

1. $\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}=34\neq 0$

2. $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}=6$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=8$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-1$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & 0\end{vmatrix}=0$,

.

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}=17$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6$,

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Получили матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 17 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -6 \\ -1 & 17 & 5 \end{pmatrix}$ **4.** $A^{-1} = \frac{1}{34}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -6 \\ -1 & 17 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & 0 & \frac{2}{17} \\ \frac{4}{17} & 0 & -\frac{3}{17} \\ -\frac{1}{34} & \frac{1}{2} & \frac{5}{34} \end{pmatrix}$

Для того чтобы проверить правильность вычислений, используем формулу (2.8):

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{17} & 0 & \frac{2}{17} \\ \frac{4}{17} & 0 & -\frac{3}{17} \\ -\frac{1}{34} & \frac{1}{2} & \frac{5}{34} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{3}{17} + 2\cdot\frac{4}{17} + 0\cdot(-\frac{1}{34}) & 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} & 3\cdot\frac{2}{17} + 2\cdot(-\frac{3}{17}) + 0\cdot\frac{5}{34} \\ (-1)\cdot\frac{3}{17} + 1\cdot\frac{4}{17} + 2\cdot(-\frac{1}{34}) & (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{2} & (-1)\cdot\frac{2}{17} + 1\cdot(-\frac{3}{17}) + 2\cdot\frac{5}{34} \\ 4\cdot\frac{3}{17} + (-3)\cdot\frac{4}{17} + 0\cdot(-\frac{1}{34}) & 4\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} & 4\cdot\frac{2}{17} + (-3)\cdot(-\frac{3}{17}) + 0\cdot\frac{5}{34} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы убедились в правильности вычислений.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{17} & 0 & \frac{2}{17} \\ \frac{4}{17} & 0 & -\frac{3}{17} \\ -\frac{1}{34} & \frac{1}{2} & \frac{5}{34} \end{pmatrix}$

№4. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 15 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: найдем решение задачи двумя способами.

1. Решение задачи методом окаймления миноров.

Вычислим минор второго порядка, расположенный на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}=0$. Так как он равен нулю, то переходим к вычислению следующего минора второго порядка $M_2'=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}=5$. Так как существует $M_2'\neq 0$, то составляем миноры третьего порядка, включающие в себя M_2'. Окаймляющий минор третьего порядка только один и он равен нулю: $M_3'=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 15 & 5 \end{vmatrix}=0$. Таким образом $r_A=2$.

2. Решение задачи методом элементарных преобразований.

Вначале из второй строчки вычтем первую, умноженную на два, а из третьей первую, умноженную на три. Затем из третьей вычтем вторую, умноженную на два. Далее из третьей строчки вычтем вторую, умноженную на два. Получим

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 15 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, $r_A=2$.

Ответ: $r_A=2$

Тема 3. Метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Таблица №4

Название	Определения, обозначения, формулы
1. Метод Крамера	1. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – определитель системы 2. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ 3. $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$
2. Матричный метод	1. $AX = B$ – система в матричной форме $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 2. Найти A^{-1} 3. $X = A^{-1}B$
3. Метод Гаусса	1. Записать расширенную матрицу $\overline{A}$ (или $(A \mid B)$) $= \left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ 2. С помощью элементарных преобразований привести $\overline{A}$ к треугольному виду

	$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc\|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array}\right)=\overline{C}$ 3. Записать систему с расширенной матрицей $\overline{C}$ и решить ее.

Примеры решения задач

№1. Решить систему линейных уравнений тремя способами.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение:

а) Решим систему методом Крамера, используя формулы (4.1)

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$ **2.** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$

3. $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 4$

б) Решим систему матричным методом, используя формулы (4.2)

1. Запишем систему в матричной форме $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем обратную матрицу. Алгебраические дополнения:

$A_{11} = 1,\ A_{12} = -7,\ A_{13} = -11,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = -5,\ A_{23} = -7,\ A_{31} = -1, A_{32} = 3,$

$A_{33}=5$. Присоединенная матрица $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -7 & -5 & 3\\ -11 & -7 & 5\end{pmatrix}$ и обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -7 & -5 & 3\\ -11 & -7 & 5\end{pmatrix}.$$

3. $X=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -7 & -5 & 3\\ -11 & -7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$

Таким образом $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$

в) Решим систему методом Гаусса, используя формулы (4.3)

1. Запишем расширенную матрицу

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 4\\ -1 & 3 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 3\end{array}\right)$$

2. Приведем ее к треугольному виду

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 4\\ -1 & 3 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 5 & -3 & -2\\ 0 & -7 & 5 & 6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 5 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 16\end{array}\right)=\overline{C}$$

3. Запишем систему с расширенной матрицей $\overline{C}$ и решим ее.

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=4\\ 5x_2-3x_3=-2\\ 4x_3=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=4\end{cases}$$

Ответ: (1;2;4)

Тема 4. Модель Леонтьева. Модель равновесных цен

Таблица №5

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции за один год

		Потребляющие отрасли	Продукция	
		1 2 … n	Конечная	Валовая
Производящие отрасли	1	x_{11} x_{12} … x_{1n}	Y_1	X_1
	2	x_{21} x_{22} … x_{2n}	Y_2	X_2
	…	… … … …	…	…
	n	x_{n1} x_{n2} … x_{nn}	Y_n	X_n
Оплата труда	V	V_1 V_2 … V_n	$V_{кон}$	
Чистый доход	m	m_1 m_2 … m_n	$m_{кон}$	
Валовая продукция	X	X_1 X_2 … X_n		X

Таблица №6

Понятия	Определения, обозначения, формулы
1. Соотношения баланса	$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \quad (i = \overline{1,n})$
2. Коэффициенты прямых затрат	$a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j} \quad (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n})$
3. Матрица коэффициентов прямых затрат (структурная матрица)	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
4. Основная задача межотраслевого баланса	Найти такой вектор валового выпуска X, который при известной матрице A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y

	$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$, $X = (E - A)^{-1} Y$, где $(E - A)$ – матрица Леонтьева, $(E - A)^{-1}$ – матрица полных затрат.

Примеры решения задач

№1. Таблица содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить, соответственно, до 60, 70, и 30 условных единиц.

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

Решение: Вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Вектор конечного потребления $Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Матрица коэффициентов прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}$. Ее элементы вычисляются по формулам (6.2), например, $a_{23} = \dfrac{x_{23}}{X_3} = \dfrac{20}{50} = 0{,}40$.

Новый вектор конечного потребления $Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\overline{X}$, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменится. Для этого решим систему уравнений $X = (E - A)^{-1} Y$ или $(E - A)X = Y$. Матрица Леонтьева имеет вид: $(E - A) = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}$. Решая

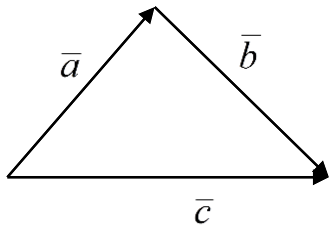
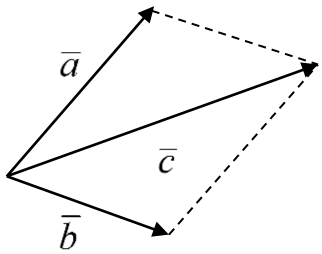
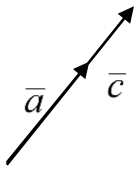
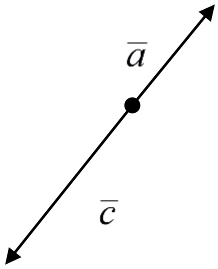
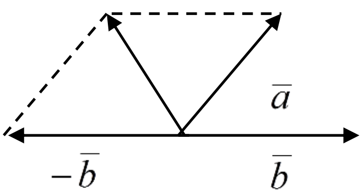
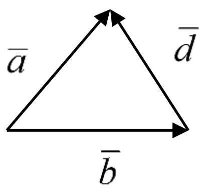
систему (например, методом Гаусса) получим $X = \begin{pmatrix} 152{,}6 \\ 135{,}8 \\ 92{,}5 \end{pmatrix}$.

Ответ: для того, чтобы обеспечить заданное увеличение конечного продукта, необходимо увеличит валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,6%, уровень энергетики – на 35,8%, и выпуск машиностроения на 85%.

Тема 5. Элементы векторной алгебры

Таблица №7

Линейные операции над векторами

Операция	Результат
1. Сумма $\overline{a}+\overline{b}$	Вектор $\overline{c}$   Правило треугольника Правило параллелограмма
2. Произведение вектора $\overline{a}$ на число λ	Вектор $\overline{c}=\lambda\overline{a}$   $\lambda>0$, $c=\lambda a$ $\lambda<0$, $c=\lvert\lambda\rvert a$
3. Разность $\overline{a}-\overline{b}$	Вектор $\overline{d}$ $\overline{d}=\overline{a}+(-\overline{b})$  
4. Сумма $\overline{a}+\overline{b}+\ldots+\overline{c}$	Вектор $\overline{d}$

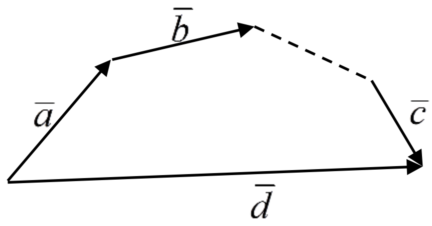
	

Таблица №8

Операции над векторами в координатах

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$

Операция, определение	Выражение в координатах
1. Сумма $\overline{a} + \overline{b}$	$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
2. Разность $\overline{a} - \overline{b}$	$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$
3. Произведение вектора $\overline{a}$ на число λ	$\lambda\overline{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$
4. Скалярное произведение векторов – число $\overline{a} \cdot \overline{b} = ab\cos(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b})$	$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
5. Векторное произведение векторов – вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ 5.1. $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$ 5.2. $c = ab\sin(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b})$ 5.3. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая тройка	$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ $\overline{a} \times \overline{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

6. Смешанное произведение векторов – число $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Таблица №9

Взаимное расположение векторов

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$

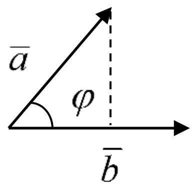
Расположение векторов	Условие
1. Коллинеарные векторы (лежат на одной прямой или параллельных прямых)	$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$, $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$
2. Перпендикулярные векторы (лежат на перпендикулярных прямых)	$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$
3. Компланарные векторы (лежат в одной плоскости)	$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

Таблица №10

Основные формулы

Пусть $A(a_1, b_1, c_1)$, $B(a_2, b_2, c_2)$

Понятие	Формула
1. Координаты вектора $\overline{AB}$	$\overline{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$
2. Длина (модуль, норма) вектора $\overline{AB}$	$\lvert AB \rvert = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$

3. Координаты точки $C(x_0, y_0, z_0)$, делящей отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda : \frac{\lvert AC \rvert}{\lvert CB \rvert} = \lambda$	$x_0 = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda}$, $y_0 = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1+\lambda}$, $z_0 = \frac{c_1 + \lambda c_2}{1+\lambda}$
4. Модуль (длина) вектора $\bar{a} = (x, y, z)$	$\lvert \bar{a} \rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
5. Направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$	$\cos(x \hat{,} \bar{a}) = \frac{a_x}{\lvert \bar{a} \rvert}$, $\cos(y \hat{,} \bar{a}) = \frac{a_y}{\lvert \bar{a} \rvert}$, $\cos(z \hat{,} \bar{a}) = \frac{a_z}{\lvert \bar{a} \rvert}$
6. Проекция вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$	$Пр_{\bar{b}} \bar{a} = a \cos\varphi$ 
7. Орты осей координат Ox, Oy и Oz	$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы, совпадающие с положительным направлением осей Ox, Oy и Oz соответственно
8. Разложение вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ по векторам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$,	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$
7. Площадь треугольника ABC	$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \lvert \overline{AB} \times \overline{AC} \rvert$
9. Площадь параллелограмма $ABCD$	$S_{ABCD} = \lvert \overline{AB} \times \overline{AC} \rvert$
10. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.	$V = \lvert \bar{a}\bar{b}\bar{c} \rvert$

Примеры решения задач

№1. Даны два вектора $\bar{a} = (2,1,1)$ и $\bar{b} = (-3,0,2)$. Найти вектор $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$, его длину и направление.

Решение: используя формулы (8.1), (8.2) и (8.3), найдем $2\bar{a} = (4,2,2)$, $3\bar{b} = (-9,0,6)$ и вектор $\bar{c} = (4+(-9);2+0;2+6) = (-5,2,8)$.

Его длину и направляющие косинусы найдем по формулам (10.4) и (10.5): $|\bar{c}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{93}$,

$$\cos(\widehat{x,\bar{c}}) = -\frac{5}{\sqrt{93}},\ \cos(\widehat{y,\bar{c}}) = \frac{2}{\sqrt{93}},\ \cos(\widehat{z,\bar{c}}) = \frac{8}{\sqrt{93}}.$$

Ответ: $\bar{c} = (-5,2,8)$

№2. Разложить вектор $\bar{c} = (3,4)$ по векторам $\bar{a} = (3,-1)$ и $\bar{b} = (1,-2)$.

Решение: разложить вектор $\bar{c}$ векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – это значит представить его в виде $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, где α и β некоторые числа. Для их определения запишем $(3,4) = \alpha(3,-1) + \beta(1,-2)$ или $\begin{cases} 3 = 3\alpha + \beta \\ 4 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$. Решив полученную систему, найдем $\alpha = 2$ и $\beta = -3$. Таким образом, $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.

Ответ: $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$

№3. Определить угол между векторами $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

Решение: используя (8.4), найдем

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \text{ или}$$

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{-1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 0\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 135^\circ$

№4. Раскрыть скобки в выражении $(2\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot \bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$.

Решение: так как $\bar{i} \cdot \bar{j} = 0$, $\bar{j} \cdot \bar{k} = 0$, $\bar{i} \cdot \bar{k} = 0$, $\bar{i} \cdot \bar{i} = 1$, $\bar{j} \cdot \bar{j} = 1$, $\bar{k} \cdot \bar{k} = 1$, то

$(2\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot \bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2 =$

$= 2\bar{i} \cdot \bar{j} - \bar{j} \cdot \bar{j} + \bar{j} \cdot \bar{k} - 2\bar{k} \cdot \bar{k} + \bar{i}^2 - 2 \cdot \bar{i} \cdot 2\bar{k} + 4\bar{k}^2 = 2$

Ответ: 2

№5. Найти вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = (1,0,1)$ и $\bar{b} = (0,2,-1)$

Решение: воспользовавшись формулой (8.5), найдем искомый вектор

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2,1,2)$$

Ответ: $\bar{c} = (-2,1,2)$

№6. Даны точки $A(-2;1)$ и $B(3;6)$. Найти длину отрезка AB и координаты точки $C(x;y)$, делящей отрезок AB в отношении $AC:CB = 3:2$.

Решение: используя (10.2), получим $|AB| = \sqrt{(3-(-2))^2 + (6-1)^2} = 5\sqrt{2}$.

Так как $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{3}{2}$, то воспользовавшись формулой (10.3), найдем

$$x_C = \frac{-2 + \frac{3}{2} \cdot 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1, \quad y_C = \frac{1 + \frac{3}{2} \cdot 6}{1 + \frac{3}{2}} = 4.$$

Ответ: $|AB| = 5\sqrt{2}$, $C(1;4)$

Тема 6. Элементы аналитической геометрии на плоскости

Таблица №11

Системы координат на плоскости

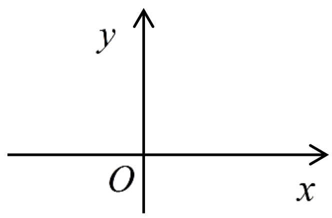
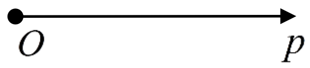
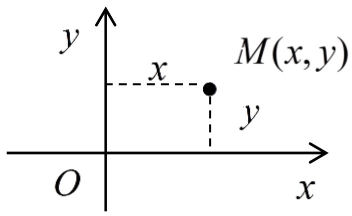
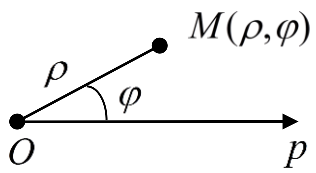
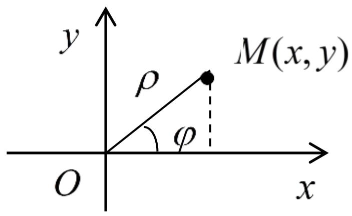
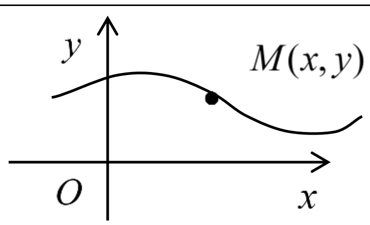
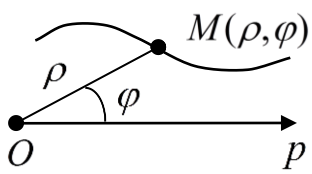
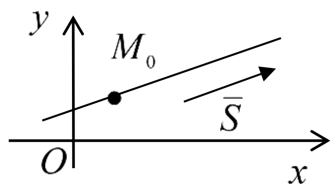
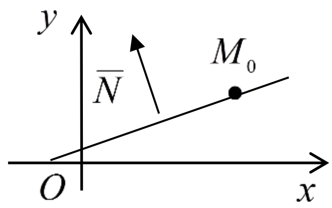
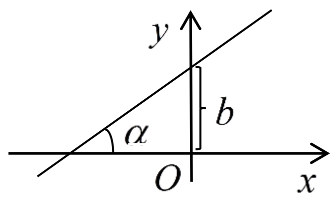
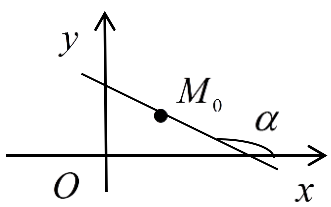
Понятие	Декартова система координат	Полярная система координат
1. Определение	 O – начало координат Ox – ось абсцисс Oy – ось ординат $Ox \perp Oy$	 O – полюс Op – полярная ось
2. Координаты точки		
3. Переход от одной системы координат к другой при совпадении осей Ox и Op, начала координат O и полюса O	 $x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$ $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$
4. Уравнение линии	 $F(x,y) = 0$	 $F(\rho,\varphi) = 0$

Таблица №12

Уравнение прямой на плоскости

$Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Название уравнения	Уравнение	Расшифровка параметров	Изображение
1. Каноническое уравнение прямой	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$	$\overline{S} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой, $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой	
2. Уравнение прямой с нормальным вектором	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	$\overline{N} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой, $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой	
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$	$k = tg\alpha$ – угловой коэффициент, b – отрезок, отсекаемый на оси Oy	
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении	$y - y_0 = k(x - x_0)$	$k = tg\alpha$ – угловой коэффициент, $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой	

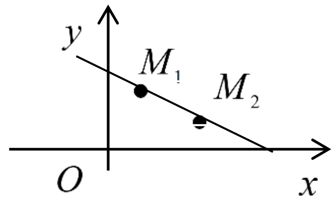
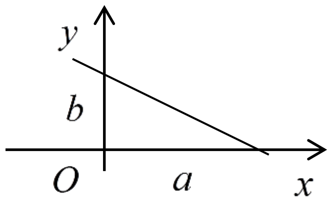
5. Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=$ $=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – точки прямой	
6. Уравнение прямой в отрезках	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	a, b– отрезки, отсекаемые на осях координат	

Таблица №13

Основные задачи на прямую в плоскости

Задача	Решение
1. Проверить принадлежность точки $M(x_1, y_1)$ прямой $Ax+By+C=0$	Точка $M(x_1, y_1)$ принадлежит прямой, если выполняется равенство $Ax_1+By_1+C=0$
2. Найти расстояние d от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$	$d=\dfrac{\lvert Ax_1+By_1+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
3. Найти угол φ между прямыми а) $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ б) $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ в) $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$	а) $\cos\varphi=\dfrac{\overline{N}_1\overline{N}_2}{\lvert\overline{N}_1\rvert\cdot\lvert\overline{N}_2\rvert}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ б) $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ в) $\cos\varphi=\dfrac{\overline{S}_1\overline{S}_2}{\lvert\overline{S}_1\rvert\cdot\lvert\overline{S}_2\rvert}=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$

4. Проверить параллельность прямых	а) $(\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2) \Rightarrow \left(\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}\right)$ б) $k_1 = k_2$ в) $(\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2) \Rightarrow \left(\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}\right)$
5. Проверить перпендикулярность прямых	а) $(\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2) \Rightarrow (A_1A_2 + B_1B_2 = 0)$ б) $k_1 \cdot k_2 = -1$ в) $(\overline{S}_1 \perp \overline{S}_2) \Leftrightarrow (m_1m_2 + n_1n_2 = 0)$
6. Найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	Решить систему уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \; y = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$

Примеры решения задач

№1. Найти точку пересечения и угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = 0{,}5x + 1$.

Решение: согласно (13.6) найдем точку пересечения прямых

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 0{,}5x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{7}{3} \end{matrix}.$$

Точка пересечения прямых – $M(\frac{8}{3}, \frac{7}{3})$.

Угол между прямыми найдем по формуле (13.3.а):

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 0{,}5 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\sqrt{0{,}5^2 + (-1)^2}} = 0{,}8$$

Ответ: $M(\frac{8}{3},\frac{7}{3})$, $\arccos 0{,}8$.

№2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,3)$ и $B(4,-2)$.

Решение: имеем направляющий вектор прямой $\overline{S}=A\overline{B}=(5,-5)$ и точку $A(-1,3)$ на этой прямой, тогда по формуле (12.1), получим

$$(\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-5})\Rightarrow(y+x-2=0)$$

Ответ: $y+x-2=0$

№3. Даны вершины треугольника $A(7,9)$, $B(2,-3)$ и $C(3,6)$. Найти длину высоты AD.

Решение: по формуле (12.5) найдем уравнение стороны BC треугольника

$$(\frac{y+3}{6+3}=\frac{x-2}{3-2})\Rightarrow(9x-y-21=0).$$

Воспользовавшись формулой (13.2) найдем расстояние от точки $A(7,9)$ до прямой $9x-y-21=0$: $d=\frac{|9\cdot 7+(-1)\cdot 9-21|}{\sqrt{9^2+(-1)^2}}=\frac{33}{\sqrt{82}}$. Это и будет ответом на поставленный в задаче вопрос.

Ответ: $\frac{33}{\sqrt{82}}$

Тема 6 (продолжение). Линии второго порядка

Таблица №14

Линии второго порядка

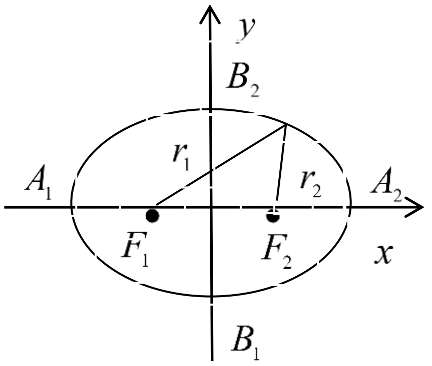
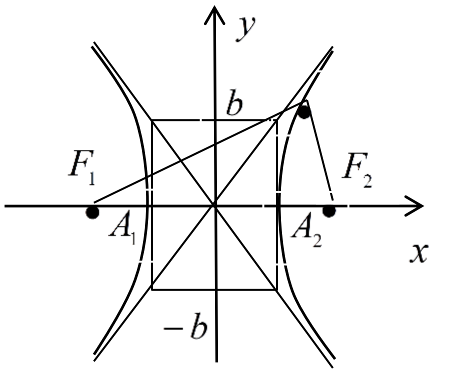
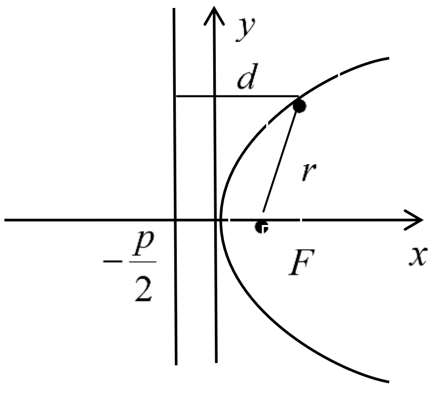
Название	График
Эллипс	
Гипербола	
Парабола	

Таблица №15

Линии второго порядка (продолжение)

Понятие, свойство	Эллипс	Гипербола	Парабола
1. Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
2. Вершины, оси	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ $2a$ – большая ось $2b$ – малая ось $(a>b)$	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ $2a$ – действительная ось $2b$ – мнимая ось	$O(0,0)$, p – фокальный параметр
3. Фокусы	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$F(\frac{p}{2},0)$ $x=-\frac{p}{2}$ – директриса
4. Основное (фокальное) свойство	$r_1+r_2=2a$	$\lvert r_1-r_2\rvert=2a$	$r=d$
5. Эксцентриситет	$\varepsilon={}^{c}\!/_{a}$, $\varepsilon<1$	$\varepsilon={}^{c}\!/_{a}$, $\varepsilon>1$	$\varepsilon=1$
6. Дополнительные свойства		$y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты	

Примеры решения задач

№1. Найти фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$.

Решение: приведем уравнение эллипса к каноническому виду: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Следовательно, большая полуось эллипса $a = 4$, малая полуось $b = 2$. По формуле (15.3) найдем расстояние от фокуса эллипса до начала координат

$c = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, т.е. координаты фокусов $F_1(-2\sqrt{3},0)$ и $F_2(2\sqrt{3},0)$. По формуле (15.5) эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Ответ: $F_1(-2\sqrt{3},0)$, $F_2(2\sqrt{3},0)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

№2. Дан эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

Решение: полуоси эллипса $a_Э = 3$, $b_Э = \sqrt{5}$ и $c_Э = \sqrt{9-5} = 2$. По условию задачи для гиперболы $a_Г = c_Э = 2$, $c_Г = a_Э = 3$. Следовательно, $b_Г = \sqrt{c_Г^2 - a_Г^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Таким образом, уравнение искомой гиперболы будет $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

№3. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$.

Решение: приведем уравнение гиперболы к каноническому виду: $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Так как уравнение имеет вид $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то фокусы гиперболы расположены на оси Oy. Таким образом, $a=3$, $b=4$, $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$. В итоге гипербола имеет фокусы и вершины на оси Oy: $F_1(0,-5)$ и $F_2(0,5)$, $A_1(0,-3)$ и $A_2(0,3)$.

Ответ: $F_1(0,-5)$, $F_2(0,5)$, $A_1(0,-3)$, $A_2(0,3)$.

№4. Парабола с вершиной в точке $O(0,0)$ симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $A(2,4)$. Найти фокус и уравнение параболы.

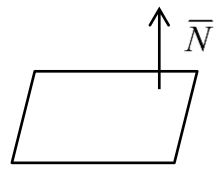
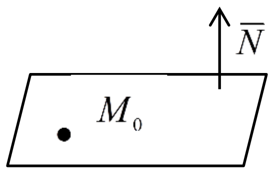
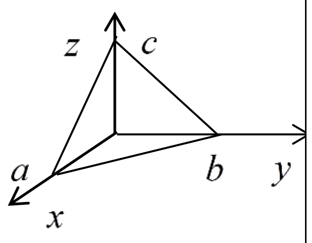
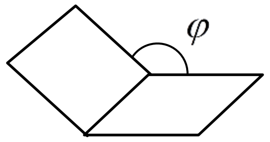
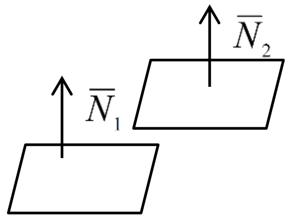
Решение: подставим координаты точки A в уравнение параболы (15.1): $4^2=2p\cdot 2$. Значит параметр $p=4$. Следовательно, уравнение параболы $y^2=8x$, фокус параболы $F(2,0)$.

Ответ: $F(2,0)$, $y^2=8x$.

Тема 7. Элементы аналитической геометрии в пространстве

Таблица №16

Плоскость в пространстве

Понятие	Изображение	Уравнение, формула
1. Общее уравнение плоскости		$\overline{N}=(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости $Ax+By+Cz+D=0$
2. Нормальное уравнение плоскости		$\overline{N}=(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$
3. Уравнение плоскости в отрезках		$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, где a,b,c – величины отрезков, отсекаемых на осях координат (с учетом знака)
4. Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$		$\cos\varphi=\dfrac{\overline{N}_1\overline{N}_2}{\lvert\overline{N}_1\rvert\lvert\overline{N}_2\rvert}=$ $=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
5. Условие параллельности плоскостей		$(\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2)\Leftrightarrow(\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2})$

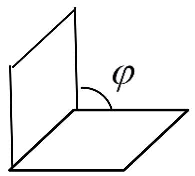
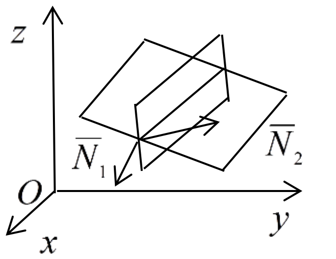
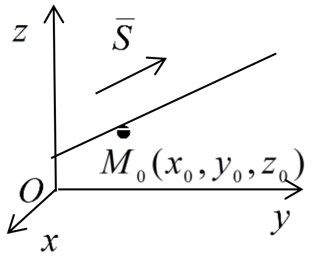
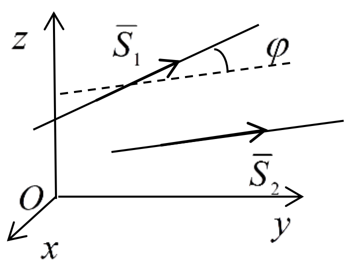
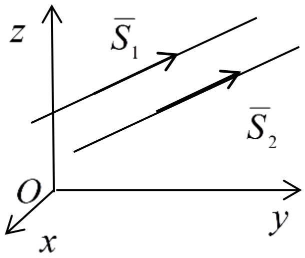
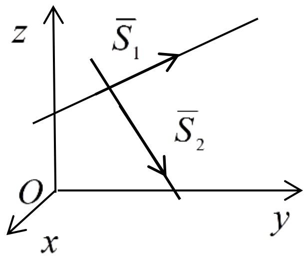
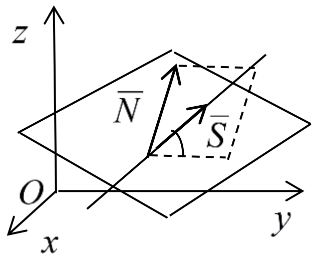
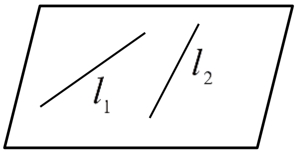
6. Условие перпендикулярности плоскостей		$(\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0)$

Таблица №17

Прямая в пространстве

Понятия	Изображение	Уравнение, формула
1. Общие уравнения прямой		$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ $\overline{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\overline{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы плоскостей
2. Канонические уравнения прямой		$\overline{S} = (m, n, p)$ – направляющий вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$
3. Угол между прямыми		$\cos\varphi = \dfrac{\overline{S}_1\overline{S}_2}{\lvert\overline{S}_1\rvert\lvert\overline{S}_2\rvert} =$ $= \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$

4. Условие параллельности прямых		$\bar{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$, $\bar{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$. $(\bar{S}_1 \Vert \bar{S}_2) \Leftrightarrow (\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2})$
5. Условие перпендикулярности прямых		$(\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0)$
6. Угол между прямой и плоскостью		$\sin\varphi = \frac{\bar{S}\cdot\bar{N}}{\lvert\bar{S}\rvert\lvert\bar{N}\rvert} =$ $= \frac{m_1 A_2 + n_1 B_2 + p_1 C_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
7. Условие расположения двух прямых в одной плоскости		$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$

Примеры решения задач

№1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,-2,0)$ и $M_2(1,1,2)$ и перпендикулярной к плоскости $x+2y+2z-4=0$.

Решение: так как искомая плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и плоскость $x+2y+2z-4=0$ перпендикулярны, то по формуле (16.6) найдем $A+2B+2C=0$.

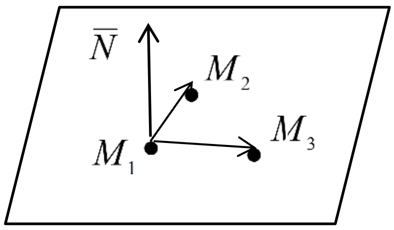
В соответствии с (16.2) уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-1,-2,0)$ имеет вид $A(x+1)+B(y+2)+Cz=0$. Так как эта плоскость проходит через точку $M_2(1,1,2)$, то ее координаты также удовлетворяют последнему уравнению, следовательно $2A+3B+2C=0$. Решая систему уравнений $\begin{cases} A+2B+2C=0 \\ 2A+3B+2C=0 \end{cases}$, найдем $A=2C$, $B=-2C$. Подставляя полученные значения в уравнение $A(x+1)+B(y+2)+Cz=0$ и сокращая на $C\neq 0$, имеем $2x-2y+z-2=0$.

Ответ: $2x-2y+z-2=0$

№2. Найти расстояние от точки $E(4,3,0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,3,0)$, $M_2(4,-1,2)$ и $M_3(3,0,1)$.

Решение: уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки можно найти двумя способами:

1 способ. В соответствии с (16.2) уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1,3,0)$ имеет вид $A(x-1)+B(y-3)+Cz=0$. Так как эта плоскость проходит через точки $M_2(4,-1,2)$ и $M_3(3,0,1)$, то их координаты также удовлетворяют последнему уравнению, следовательно, $3A-4B+2C=0$ и $2A-3B+C=0$. Решая систему уравнений $\begin{cases} 3A-4B+2C=0 \\ 2A-3B+C=0 \end{cases}$,



найдем $A=-2C$, $B=-C$. Подставляя полученные значения в уравнение $A(x-1)+B(y-3)+Cz=0$ и сокращая на $C\neq 0$, имеем $2x+y-z-5=0$.

2 способ. Для того, чтобы воспользоваться формулой (16.2) надо знать точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на плоскости и нормальный вектор $\overline{N}=(A,B,C)$. Имеем точку $M_1(1,3,0)$ и $\overline{N}=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}$. Так как

$\overline{M_1M_2}=(3,-4,2)$, $\overline{M_1M_3}=(2,-3,1)$, то $\overline{N}=\left(\begin{vmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -4\\2 & -3\end{vmatrix}\right)=(2,1,-1)$.

Получаем $2(x-1)+(y-3)-z=0$ или $2x+y-z-5=0$.

Замечание. Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{N}$.

Далее имеем $N=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ и искомое расстояние $d=\dfrac{|2\cdot 4+1\cdot 3+(-1)\cdot 0-5|}{\sqrt{6}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$

№3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ и точку $M(3,4,0)$.

Решение: в соответствии с (16.2) уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,4,0)$, имеет вид $A(x-3)+B(y-4)+Cz=0$. Направляющий вектор прямой $\overline{S}=(1,2,3)$ и нормальный вектор плоскости $\overline{N}=(A,B,C)$ перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю: $\overline{S}\cdot\overline{N}=A+2B+3C=0$. Точка $A(2,3,-1)$ лежит на прямой и, следовательно, на плоскости, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости: $-A-B-C=0$. Решая систему уравнений $\begin{cases}A+2B+3C=0\\-A-B-C=0\end{cases}$, найдем $A=C$, $B=-2C$. Подставляя полученные значения в уравнение $A(x-3)+B(y-4)+Cz=0$ и сокращая на $C\neq 0$, имеем $x-2y+z+5=0$.

Ответ: $x-2y+z+5=0$

№4. Найти проекцию точки $M(3,1,-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

Решение: сначала найдем уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,1,-1)$ и перпендикулярной плоскости $x+2y+3z-30=0$. Нормальный вектор плоскости $\overline{N}$ возьмем в качестве направляющего вектора прямой $\overline{S}$: $\overline{S}=\overline{N}=(1,2,3)$. Тогда по формуле (17.2) уравнение перпендикулярной прямой имеет вид: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Теперь найдем точку пересечения найденной прямой и плоскости. Для этого представим уравнение прямой в следующем виде: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}=t$ или $x=t+3$, $y=2t+1$ и $z=3t-1$. Подставляя полученные выражения в уравнение плоскости, получим $t+3+2(2t+1)+3(3t-1)-30=0$. Отсюда найдем значение параметра $t=2$, при котором определяется точка пересечения прямой с данной плоскостью: $x=5$, $y=5$, $z=5$.

Ответ: $M_1(5,5,5)$

Примерный вариант контрольной работы по темам 1-7

№1. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом, б) методом Крамера, в) методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x+4y-2z=1 \\ 5x+z=-1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x-5y-z=-1 \\ 3x+z=-4 \\ 4x+y+2z=-5 \end{cases}$, в) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+3y+2z=1 \\ -x+2z=3 \end{cases}$

№2. Найти матрицу

$C=(AB)^T+3E$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

№3. Даны три вектора: $\bar{a}=(1;-3)$, $\bar{b}=(2;-2)$, $\bar{c}=(2;1)$. Найти координаты вектора $\bar{p}=2\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}$ и разложить его по векторам $\bar{a}$ и $\bar{c}$.

№4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x-y+10=0$ и $8x+4y+9=0$ перпендикулярно прямой $x+3y=0$.

№5. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Тема 8. n - мерные векторные пространства. Линейная зависимость векторов n - мерного векторного пространства

Таблица №18

Операции над векторами в координатах

Пусть $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\bar{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$

Операция, понятие	Выражение в координатах
1. Сумма $\bar{x}+\bar{y}$	$\bar{x}+\bar{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$
2. Произведение вектора $\bar{x}$ на число λ	$\lambda\bar{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$
3. Скалярное произведение векторов $\bar{x}\cdot\bar{y}$	$\bar{x}\cdot\bar{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$
4. Длина вектора $\bar{x}$	$\lvert\bar{x}\rvert=\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}=\sqrt{\bar{x}^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$

Таблица №19

Линейная зависимость векторов

Пусть даны n - мерные векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_m$ и некоторые действительные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$

Понятие	Выражение
1. Линейная комбинация векторов	$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_m\bar{a}_m$
2. Линейно независимая система векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_m$	$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_m\bar{a}_m=\overline{O}$ выполняется только при $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\ldots,\lambda_m=0$
3. Линейно зависимая система векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_m$	$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_m\bar{a}_m=\overline{O}$, при этом хотя бы один из коэффициентов $\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,m)$ отличен от нуля

Таблица №20

Правила определения линейной зависимости и независимости векторов

Пусть m – число векторов системы, n – размерность векторного пространства

Признак	Действия, вывод
1. $m > n$	Линейно зависимы
2. $m = n$	1. Вычисляется определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, составленный из координат векторов $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \bar{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ 2. Если $\Delta \neq 0$, то линейно независимы 3. Если $\Delta = 0$, то линейно зависимы
3. $m < n$	1. Вычисляется ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленной из координат векторов $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \bar{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ 2. Если $r(A) = m$, то линейно независимы 3. Если $r(A) < m$, то линейно зависимы

Примеры решения задач

№1. Даны два вектора $\bar{a} = (2,1,1)$ и $\bar{b} = (-3,0,2)$. Определить, линейно зависимы или независимы эти векторы.

Решение: так как число векторов системы $m = 2$, а размерность векторного пространства $n = 3$, то используя формулу (20.1), делаем вывод, что векторы линейно зависимы.

Ответ: векторы линейно зависимы

№2. Даны векторы $\bar{a}_1 = (-2,1,2,0)$, $\bar{a}_2 = (2,-3,1,5)$, $\bar{a}_3 = (-4,4,2,-5)$, $\bar{a}_4 = (0,-2,3,5)$. Определить, линейно зависимы или независимы эти векторы.

Решение: так как $m = n = 4$, то используем (20.2). Составим из координат векторов определитель и вычислим его:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -4 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то векторы линейно зависимы.

Ответ: векторы линейно зависимы

№3. Даны векторы $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Определить, линейно зависимы или независимы эти векторы.

Решение: так как $m < n$, то используем (20.3). Составим из координат векторов матрицу и вычислим ее ранг:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -4 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -7 & 4\\ 0 & -6 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как $r(A)=m=3$, то векторы линейно независимы.

Ответ: векторы линейно независимы

№4. Даны векторы $\bar{a}_1=(0,-5,2)$, $\bar{a}_2=(-1,0,3)$, $\bar{a}_3=(2,-3,3)$. Показать, что эти векторы образуют базис и найти координаты вектора $\bar{b}=(-1,13,-10)$ в этом базисе.

Решение:

Замечание. Любая система n линейно независимых векторов n-мерного пространства называется **базисом** этого пространства.

Так как $m=n=3$, то используем (20.2). Составим из координат векторов определитель и вычислим его:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & -5 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix}=-39.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то векторы линейно независимы, то есть образуют базис.

Вектор $\bar{b}$ трехмерного пространства выражается через векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, образующие базис этого пространства, следующим образом: $\bar{b}=\gamma_1\bar{a}_1+\gamma_2\bar{a}_2+\gamma_3\bar{a}_3$. Здесь $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ – искомые координаты вектора $\bar{b}$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Перепишем векторное равенство, используя данные числовые значения:

$(-1,13,-10)=\gamma_1(0,-5,2)+\gamma_2(-1,0,3)+\gamma_3(2,-3,3)$.

Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} -\gamma_2 + 2\gamma_3 = -1 \\ -5\gamma_1 - 3\gamma_3 = 13 \\ 2\gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 = -10 \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -10 \\ -5 & 0 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -10 \\ 0 & 15 & 9 & -24 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -10 \\ 0 & 15 & 9 & -24 \\ 0 & 0 & 39 & -39 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2\gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3 = -10 \\ 15\gamma_2 + 9\gamma_3 = -24 \\ 39\gamma_3 = -39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -2 \\ \gamma_2 = -1 \\ \gamma_3 = -1 \end{cases}$$

Следовательно, $\overline{b} = -2\overline{a}_1 - \overline{a}_2 - \overline{a}_3$.

Ответ: (-2,-1,-1)

Тема 9. Произвольные системы линейных уравнений. Метод Жордана-Гаусса

Система m уравнений с n неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Таблица №21

Исследование совместности и решение систем линейных уравнений

Понятие	Определения, обозначения, формулы, действия
1. Основная матрица системы	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$
2. Расширенная матрица	$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$
3. Совместная система	Система имеет хотя бы одно решение. $r(A) = r(B)$ 1) Если $r(A) = r(B) = r = n$, то единственное решение (определенная система) 2) Если $r(A) = r(B) = r < n$, то бесчисленное множество решений (неопределенная система)
4. Несовместная система	Система не имеет ни одного решения. $r(A) \neq r(B)$
5. Базисные (основные) неизвестные	Если $r < n$, то это неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых образуют определитель (базисный минор) отличный от нуля ($M_r \neq 0$)

6. Свободные (неосновные) неизвестные	Если $r < n$, то это оставшиеся неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$,
7. Общее решение системы	Решение системы, в котором базисные неизвестные линейно выражены через свободные
8. Частные решения системы	Получаются, если в общем решении вместо свободных неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ подставлять произвольные значения
9. Базисное решение системы	Получается, если в общем решении свободные неизвестные приравнять нулю

Таблица №22

Таблица метода Жордана-Гаусса

i	Базис	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\cdots$	$\bar{a}_s$	$\cdots$	$\bar{a}_n$	Контрольный столбец (S)
1		b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1s}	$\cdots$	a_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + b_1$
2		b_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2s}	$\cdots$	a_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} + b_2$
$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
r		b_r	a_{r1}	a_{r2}	$\cdots$	a_{rs}	$\cdots$	a_{rn}	$\sum_{j=1}^{n} a_{rj} + b_r$
$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m		b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{ms}	$\cdots$	a_{mn}	$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} + b_m$

Таблица №23

Алгоритм метода Жордана-Гаусса

Действие	Правила выполнения
1. Выбирается разрешающий элемент	Это любой отличный от нуля коэффициент (например, a_{rs})
2. Заполняется новая таблица	1. Разрешающая строка делится на разрешающий элемент 2. На месте разрешающего элемента получена единица, а остальные элементы разрешающего столбца приравниваются нулю 3. Остальные элементы рассчитываются по «правилу прямоугольника»: $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}$, то есть новый элемент a'_{ij} равен старому элементу a_{ij} минус произведение элементов в вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент. Например, $a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{2s} \cdot a_{r2}}{a_{rs}}$ или $a'_{mn} = a_{mn} - \frac{a_{ms} \cdot a_{rn}}{a_{rs}}$ (см. табл.№22). 4. В столбце «базис» на уровне разрешающей строки записывается базисная переменная (здесь это x_s)
3. Окончание процесса	Каждая строка побывала разрешающей

Таблица №24

Правила, облегчающие счет

Возникшая ситуация	Действия, выводы
1. В разрешающей строке имеется 0	Столбец, содержащий этот 0, переписывается без изменения
2. В разрешающем столбце имеется 0	Строка, содержащая этот 0, переписывается без изменения
3. Элементы контрольного столбца, вычисленные как соответствующие суммы и вычисленные по правилу прямоугольника, совпадают	Элементы рассматриваемой строки вычислены верно
4. В результате какой-то итерации появился свободный член $b'_k \neq 0$, а все остальные элементы этой строки равны нулю	Система не имеет решений
5. В результате какой-то итерации появилась строка, состоящая только из нулей	Строка отбрасывается
6. По окончании процесса в столбце «базис» получены базисные (основные) переменные	Значения базисных переменных находятся в столбце $\overline{b}$

Примеры решения задач

№1. Исследовать совместность, найти общее, частное и базисное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение: Найдем ранг основной матрицы A

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 5 & 4\\ 6 & -4 & 4 & 3\\ 9 & -6 & 3 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & -2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & -6 & -5\\ 0 & 0 & -12 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & -2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & -6 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получили, что $r(A)=2$.

Найдем ранг расширенной матрицы B: $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 5 & 4 & 2\\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3\\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\sim$

$$\sim\begin{pmatrix}3 & -2 & 5 & 4 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1\\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & -2 & 5 & 4 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получили, что $r(B)=2$. Так как $r(A)=r(B)$, то система совместная. Кроме того, $r(A)=r(B)=2<4$, значит, по формуле (21.3.2) система имеет бесчисленное множество решений (неопределенная система).

Ранг матрицы системы $r=2$ следовательно, одно из уравнений системы, например третье, можно отбросить. Перепишем полученную эквивалентную исходной систему двух уравнений

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2\\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3\end{cases}.$$

Замечание. Максимально возможное число базисных решений равно $C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Общее число групп основных переменных не более 6, поэтому возможны следующие группы основных переменных: x_1 и x_2; x_1 и x_3; x_1 и x_4; x_2 и x_3; x_2 и x_4; x_3 и x_4.

Выясним, могут ли переменные x_1 и x_2 быть основными. Для этого вычислим определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных (формула

(21.5)). Базисный минор $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$, поэтому переменные x_1 и x_2 не могут быть базисными (основными). Проверим переменные x_1 и x_3. Базисный минор $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$, поэтому переменные x_1 и x_3 могут быть основными. Рассуждая аналогично, найдем, что все остальные пары переменных также могут быть взяты за основные.

Возьмем в качестве основных переменные x_1 и x_3. Выразим их через неосновные $x_1 = \frac{7}{18} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{18}x_4$ и $x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_4$. Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_2 = C_1$ и $x_4 = C_2$, найдем бесконечное множество решений системы (общее решение системы): $(\frac{7}{18} - \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{18}C_2; C_1; \frac{1}{6} - \frac{5}{6}C_2; C_2)$. В общем решении свободные неизвестные приравняем нулю и получим базисное решение системы: $(\frac{7}{18};0;\frac{1}{6};0)$.

В общем решении вместо свободных неизвестных подставим произвольные значения, например $x_2 = 1$, $x_4 = 1$, и получим частное решение системы: $(-\frac{2}{9};1;-\frac{2}{3};1)$.

Ответ: $(\frac{7}{18} - \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{18}C_2; C_1; \frac{1}{6} - \frac{5}{6}C_2; C_2)$ – общее решение системы; $(\frac{7}{18};0;\frac{1}{6};0)$ – базисное решение системы; $(-\frac{2}{9};1;-\frac{2}{3};1)$ – частное решение системы.

№2. Найти общее и базисное решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$$

Решение: применим табличный метод Жордана-Гаусса (табл.23)

Табл.1

i	Базис	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	S
1.		9	2	**1**	-1	2	13
2.		11	1	1	2	1	16
3.		20	3	2	1	1	27

Табл.2

i	Базис	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	S
1.	x_2	9	2	1	-1	2	13
2.		2	**-1**	0	3	-1	3
3.		2	-1	0	3	-3	1

Табл.3

i	Базис	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	S
1.	x_2	13	0	1	5	0	19
2.	x_1	-2	1	0	-3	1	-3
3.		0	0	0	0	**-2**	-2

Табл.4

i	Базис	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	S
1.	x_2	13	0	1	5	0	19
2.	x_1	-2	1	0	-3	0	-4
3.	x_4	0	0	0	0	1	1

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 = 13 \\ x_1 - 3x_3 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 13 - 5x_3 \\ x_1 = -2 + 3x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задавая неосновной переменной произвольные значения $x_3 = C_1$, найдем общее решение системы: $(-2+3C_1;13-5C_1;C_2;0)$.

По правилу (24.6) найдем базисное решение системы $\overline{X}^1_{баз} = (-2;13;0;0)$.

Ответ: $\overline{X}^1_{баз} = (-2;13;0;0)$

Замечание. Часто требуется найти все базисные решения. Для этого систему, приведенную к одному единичному базису, преобразуют в систему с другим единичным базисом. С этой целью нужно проделать преобразования однократного замещения, которые сводятся к выполнению одной итерации метода Жордана-Гаусса.

№3. Найти второе базисное решение для примера №2

Решение:

Табл.1

i	Базис	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	S
1.	x_2	13	0	1	5	0	19
2.	x_1	-2	1	0	**-3**	0	-4
3.	x_4	0	0	0	0	1	1

Табл.2

i	Базис	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	S
1.	x_2	$29/3$	$5/3$	1	0	0	$37/3$
2.	x_3	$2/3$	$-1/3$	0	1	0	$4/3$
3.	x_4	0	0	0	0	1	1

По правилу (24.6) найдем второе базисное решение системы $\overline{X}^2_{баз} = (0;29/3;2/3;0)$.

Ответ: $\overline{X}^2_{баз} = (0;29/3;2/3;0)$

Тема 10. Опорные решения систем линейных уравнений

Таблица №25

Неотрицательные решения систем линейных уравнений

Понятие	Определение
1. Допустимые решения	Решение системы, в которых значения всех переменных неотрицательны
2. Область допустимых решений	Совокупность всех допустимых решений
3. Опорные решения	Базисные допустимые решения

Таблица №26

Симплексные преобразования

Действие	Правила выполнения
1. Проверить, чтобы свободные члены системы уравнений были неотрицательными $(b_i \geq 0, i = 1,2..m)$	Если имеются отрицательные, то обе части уравнения следует умножить на (-1)
2. Заполнить начальную таблицу	Смотри таблицу №23
3. Выбрать разрешающий столбец	Выбрать любой столбец, в котором есть хотя бы одно положительное число
4. Выбрать разрешающую строку	1. Найти частные от деления элементов столбца свободных членов на соответствующие положительные элементы разрешающего столбца 2. Среди найденных частных выбрать наименьшее положительное

	3. Строку, соответствующую наименьшему положительному частному, выбрать разрешающей
5. Заполнить новую таблицу	1. Разрешающую строку поделить на разрешающий элемент 2. На месте разрешающего элемента будет получена единица, а остальные элементы разрешающего столбца приравнять нулю 3. Остальные элементы рассчитать по «правилу прямоугольника» 4. В столбце «базис» на уровне разрешающей строки записать соответствующую базисную переменную
6. Окончание процесса	1. Система приведена к единичному базису 2. Если в какой-либо строке свободный член положителен, а все элементы строки отрицательны или равны нулю (нет опорных решений)

Примеры решения задач

№1. Найти опорное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 17 \end{cases}.$$

Решение: свободные члены неотрицательны. Заполняем начальную таблицу.

Табл.1

i	Базис	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	S
1.		2	**1**	-1	2	0	4
2.		6	0	1	-3	0	4
3.	x_4	17	1	0	1	1	20

Выбираем столбец, в котором есть хотя бы одно положительное число, например первый. Таким образом, первый столбец – разрешающий. Теперь находим $\min\left\{\frac{2}{1},\frac{17}{1}\right\}=2$. Следовательно, первая строка – разрешающая. Используя (26.5), заполняем таблицу 2.

Табл.2

i	Базис	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	S
1.	x_1	2	1	-1	2	0	4
2.		6	0	**1**	-3	0	4
3.	x_4	15	0	1	-1	1	16

Выбираем следующий столбец, в котором есть хотя бы одно положительное число, например второй. Таким образом, второй столбец – разрешающий. Теперь находим $\min\left\{\frac{6}{1},\frac{15}{1}\right\}=6$. Следовательно, вторая строка – разрешающая. Используя (26.5), заполняем таблицу 3.

Табл.3

i	Базис	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	S
1.	x_1	8	1	0	-1	0	8
2.	x_2	6	0	1	-3	0	4
3.	x_4	9	0	0	2	1	12

Система приведена к единичному базису. Искомое опорное решение $\bar{X}=(8;6;0;9)$

Ответ: $\bar{X}=(8;6;0;9)$

Примерный вариант самостоятельной работы по темам 8-13

№1. Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы $\bar{a}_1 = (1;4;6)$, $\bar{a}_2 = (1;-1;1)$, $\bar{a}_3 = (1;1;3)$.

№2. Даны четыре вектора $\bar{a}_1 = (4;5;2)$, $\bar{a}_2 = (3;0;1)$, $\bar{a}_3 = (-1;4;2)$ и $\bar{b} = (5;7;8)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{b}$ в этом базисе.

№3. Исследовать совместность, найти общее, частное и все базисные решения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$$

Литература

1. Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов Сборник задач по математике для экономистов – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 576с.

2. Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман Высшая математика для экономических специальностей – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909с.

Содержание

Тема 1. Определители и их свойства	3
Тема 2. Матрицы. Виды матриц и действия над ними. Ранг матрицы	6
Тема 3. Метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса решения систем линейных уравнений	12
Тема 4. Модель Леонтьева. Модель равновесных цен	15
Тема 5. Элементы векторной алгебры	18
Тема 6. Элементы аналитической геометрии на плоскости	24
Тема 6 (продолжение). Линии второго порядка	29
Тема 7. Элементы аналитической геометрии в пространстве	33
Примерный вариант контрольной работы по темам 1-7	39
Тема 8. n - мерные векторные пространства. Линейная зависимость векторов n - мерного векторного пространства	40
Тема 9. Произвольные системы линейных уравнений. Метод Жордана-Гаусса	45
Тема 10. Опорные решения систем линейных уравнений	53
Примерный вариант самостоятельной работы по темам 8-10	56
Литература	57