КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ЧАСТЬ II

Учебно-методическое пособие

Казань – 2016

УДК 517.928

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института физики КФУ
Протокол № 1 от 6 сентября 2016 г.

Рецензенты:
доцент кафедры общей математики КФУ, к.ф.-м.н. **В. А. Сочнева**;
доцент кафедры теории относительности
и гравитации КФУ, к.ф.-м.н. **Р.А. Даишев**.

Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.

Асимптотические методы в теоретической физике. Часть II. Обыкновенные дифференциальные уравнения с параметром: учебно-методическое пособие / Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева – Казань: Казан. ун-т, 2016.– 49 с.

Пособие предназначено для студентов института физики Казанского федерального университета, обучающихся по направлению 03.03.02 – "Физика", и является методическим обеспечением курсов по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др.

Оглавление

1 Введение

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются приближённые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящие от параметра. Оно является продолжением издания [1], дополнением к [2]-[5] и предназначено для студентов института физики, обучающихся по направлению 03.03.02 – "Физика" . Стандартный курс "Дифференциальные уравнения" не включает в себя приближённые методы решения уравнений в достаточном объёме. Вместе с тем, в дальнейшем изучении физических дисциплин студентами требуется знание этих вопросов. Это пособие будет полезным при освоении дисциплин по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др.

Многие асимптотические методы изначально возникли в физике и в последствии получили строгое математическое обоснование. В некоторых случаях они незаменимы в следствии, например, нелинейности уравнения движения и граничных условий или переменных коэффициентов.

Предлагаемое пособие посвящено методам возмущений, или асимптотическим методам малого параметра решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь мы рассмотрели алгоритм построения *регулярных возмущений*, а так же некоторые методы для *сингулярных возмущений*: метод усреднения, метод ВКБ. Приведены примеры использования этих методов в физике и подобраны задачи для самостоятельного решения.

2 Предварительные понятия

Во втором разделе пособия [1] были сформулированы предварительные понятия асимптотических методов, связанных с функцией одной переменной. Присутствие параметров в физических моделях, помимо независимой переменной, приводит к функции многих переменных, что накладывает свои особенности и трудности использования асимптотических подходов. Одним из ключевых понятий является равномерность асимптотических оценок и равномерность асимптотического разложения функций многих переменных.

2.1 Равномерность и O – символика

Пусть функции $f(x,\mu)$ и $g(x,\mu)$ имеют предел при $\mu \to 0$. Обозначение

$$f(x,\mu) = o(g(x,\mu)) \text{ при } \mu \to 0 \tag{1}$$

означает, что *для любого* сколь угодно малого числа $\delta > 0$, не зависящего от μ, существует $\mu_0 > 0$, такое, что

$$|f(x,\mu)| \le \delta \cdot |g(x,\mu)| \tag{2}$$

для всех $|\mu| \le \mu_0$. Это условие равносильно

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{f(x,\mu)}{g(x,\mu)} = 0.$$

Если δ и μ_0 не зависят от x, то говорят, что условие (1) выполняется *равномерно*.

Выражение

$$f(x,\mu) = O(g(x,\mu)) \text{ при } \mu \to 0 \tag{3}$$

означает, что существует число $A > 0$, не зависящее от μ, и $\mu_0 > 0$, такое, что

$$|f(x,\mu)| \le A\,|g(x,\mu)| \tag{4}$$

для всех $|\mu| \le \mu_0$. Это условие равносильно

$$\lim_{\mu\to 0}\left|\frac{f(x,\mu)}{g(x,\mu)}\right| < \infty.$$

Если A и μ_0 не зависят от x, то говорят, что условие (3) выполняется *равномерно*.

Примеры:

$$\sin(\mu + x) = o(\mu^{-1/3}) \text{ равномерно при } \mu \to 0\,;$$

$$\sin(\mu + x) = O(1) \text{ равномерно при } \mu \to 0\,;$$

$$\sin(\mu + x) = O(\sin x) \text{ равномерно при } \mu \to 0$$

$$\text{для интервалов изменения } x, \text{ в которых } \sin x \ne 0;$$

$$e^{-\mu x} - 1 = o(\mu^{1/2}) \text{ неравномерно при } \mu \to 0\,;$$

$$e^{-\mu x} - 1 = O(\mu) \text{ неравномерно при } \mu \to 0\,;$$

$$\sqrt{x+\mu} - \sqrt{x} = o(\mu^{3/4}) \text{ неравномерно при } \mu \to 0\,;$$

$$\sqrt{x+\mu} - \sqrt{x} = O(\mu) \text{ неравномерно при } \mu \to 0\,.$$

2.2 Равномерное и неравномерное асимптотические разложения

Напомним основные определения для функции одной переменной.

Определение 1. Пусть функции $\varphi_n(\mu) \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a (окрестность не содержит саму точку a). Последовательность $\{\varphi_n(\mu)\}$ называется *асимптотической* при $\mu \to a$, если для любого n выполняется

$$\varphi_{n+1}(\mu) = o(\varphi_n(\mu)) \ (\mu \to a).$$

Иногда такую последовательность называют *калибровочной.*

Определение 2. Пусть функция $f(\mu)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и $\{\varphi_n(\mu)\}$ – калибровочная последовательность при $\mu \to a$. *Функция* $f(\mu)$ *разлагается в асимптотический ряд*

$$f(\mu) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(\mu) \ (\mu \to a), \tag{5}$$

где a_n – постоянные, если при любом натуральным числе N выполняется

$$f(\mu) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(\mu) + o(\varphi_N(\mu)) \ (\mu \to a). \tag{6}$$

или

$$f(\mu) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(\mu) + O(\varphi_{N+1}(\mu)) \ (x \to a). \tag{7}$$

Ряд (5) называется *асимптотическим разложением (приближением)* функции $f(\mu)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(\mu)\}$ при $\mu \to a$. Равенство (6) называют *асимптотическим представлением порядка N функции $f(\mu)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(\mu)\}$ при $\mu \to a$.* Слагаемое $o(\varphi_N(\mu))$ определяет погрешность представления (6).

Рассмотрим асимптотическое разложение функции двух переменных $f(x,\mu)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(\mu)\}$ при $\mu \to a$. Естественно, что коэффициенты разложения уже не постоянные, а зависят от переменной x:

$$f(x,\mu) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\varphi_n(\mu), \quad \mu \to a. \tag{8}$$

Этот факт может привести к тому, что при некоторых значениях переменной x член $a_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(\mu)$ асимптотического разложения (8) будет меньше, чем следующий член $a_n(x)\varphi_n(\mu)$, а значит ряд (8) перестанет быть асимптотическим при этих x.

Определение 3. Асимптотическое разложение (8) называется равномерным, если при $\mu \to a$

$$f(x,\mu) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n(x)\varphi_n(\mu) + R_N(x,\mu)\,, \tag{9}$$

где оценка

$$R_N(x,\mu) = O(\varphi_N(\mu)) \tag{10}$$

равномерна для всех рассматриваемых x.

Для того чтобы условия равномерности (9), (10) выполнялись, необходимо чтобы для каждого n слагаемое $a_n(x)\varphi_n(\mu)$ было мало по сравнению с предыдущем $a_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(\mu)$. Поскольку при $\mu \to a$ имеем $\varphi_n(\mu) = o[\varphi_{n-1}(\mu)]$, для равномерности разложения должно требоваться, чтобы для всех рассматриваемых x функция $a_n(x)$ была *не более сингулярной, чем* $a_{n-1}(x)$. Иначе говоря, каждый член должен быть малой поправкой к предыдущему члену независимо от значения x. Рассмотрим несколько примеров, чтобы понять, что это означает.

Используя ряд Тейлора для $\sin\mu$ и $\cos\mu$, получим асимптотическое разложение функции $\sin(x+\mu)$ при $\mu \to 0$:

$$\sin(x+\mu) = \sin x\cos\mu + \cos x\sin\mu = \sin x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mu^{2n}}{(2n)!}+$$

$$+\cos x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mu^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x + \mu\cos x - \frac{\mu^2}{2!}\sin x -$$

$$-\frac{\mu^3}{3!}\cos x + \frac{\mu^4}{4!}\sin x + \frac{\mu^5}{5!}\cos x + \ldots$$

Совокупность $\{\mu^n\}$ образует калибровочную последовательность при $\mu \to 0$. Коэффициенты при всех степенях μ ограничены при любых значениях x: $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$. Поэтому $a_n(x)$ не более сингулярно, чем $a_{n-1}(x)$ для всех x. Значит это разложение равномерно.

Разложим для малых μ функцию $\sqrt{x+\mu}$. Получим

$$\sqrt{x+\mu} = \sqrt{x}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{x}\left(1+\frac{\mu}{2x}-\frac{\mu^2}{8x^2}+\frac{\mu^3}{16x^3}+\ldots\right). \qquad (11)$$

Все члены этого разложения, кроме первого, обладают особенностью в точке $x = 0$. Степень x в знаменателе члена разложения (11) больше степени предыдущего члена и значит $a_n(x) = 1/x^n$ будет расти быстрее, чем $a_{n-1}(x) = 1/x^{n-1}$, то есть функция $a_n(x)$ *более сингулярна, чем* $a_{n-1}(x)$ при $x \to 0$. Следовательно, разложение (11) не является равномерным. Справедливость его нарушается в окрестности $x = 0$.

Возникает необходимость определения *области неравномерности разложения*, то есть множества значений x, для которых нарушается справедливость асимптотического разложения. В некоторых случаях размеры области неравномерности можно оценить при предположении о том, что два последовательных члена имеют один и тот же порядок:

$$a_n(x)\varphi_n(\mu) = O(a_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(\mu)).$$

Для представления (11) это даёт $x = O(\mu)$ или $\mu/x = O(1)$.

Не всегда разложение функции в сходящийся ряд даёт асимптотический ряд для этой функции. Равномерно сходящийся ряд функции необязательно даёт равномерное асимптотическое разложение. Рассмотрим равномерно сходящийся ряд Тейлора для всех t:

$$e^{-\mu t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mu t)^n}{n!}.$$

Обрезание этого ряда даст асимптотическое представление для $e^{-\mu t}$ при $\mu \to 0$, если $t = O(1)$. В случае $t = O(\mu^{-1})$, величина μt не мала, и усечённый ряд не будет обладать свойствами асимптотического представления.

3 Регулярные возмущения

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \; y(0, \mu) = y_0, \tag{12}$$

где μ изменяется в некоторой окрестности значения $\mu = 0$. Если это не так, то всегда можно добиться этого заменой параметра.

Как известно, из теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра и начальных условий при наличии определённых ограничений на функцию $f(y, t, \mu)$, решение $y(t, \mu)$ задачи (12) существует и является непрерывной функцией t и μ на множестве $t \in [0, T]$, $|\mu| < \mu_0$. Из этой теоремы следует, что при $\mu \to 0$ выполняется

$$y(t, \mu) = y_0(t) + r(t, \mu), \tag{13}$$

где $y_0(t)$ является решением задачи

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, 0), \; y(0) = y_0, \tag{14}$$

а $r(t, \mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Формулу (13) можно рассматривать как асимптотическое представление решения $y(t, \mu)$ по малому μ.

Уравнение (12) называют *возмущённым уравнением*, а уравнение (14) – *невозмущённым уравнением*. Теория, которая обосновывает асимптотическое представление по малому параметру μ, часто называется *теорией возмущения*.

Для получения детальной оценки функции $r(t,\mu)$ необходима дополнительная информация о функции $f(y,t,\mu)$.

Утверждение 1. Пусть в области D функция $f(y,t,\mu)$ обладает непрерывными частными производными по y и μ. Тогда $r(t,\mu) = O(\mu)$ при $\mu \to 0$.

Действительно, существование производной по μ даёт возможность написать

$$y(t,\mu) = y_0(t) + \frac{\partial y(t,\theta\mu)}{\partial\mu}\mu,\ 0 \le \theta \le 1$$

и установить тем самым, что $r(t,\mu) = O(\mu)$. Следующая теорема утверждает, что для $y(t,\mu)$ можно получить асимптотическую формулу с остаточным членом более высокого порядка малости, чем $O(\mu)$.

Теорема 1. *Пусть в некоторой области D переменных y, t, μ функция $f(y,t,\mu)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка $n+1$ включительно. Тогда существует сегмент $[0,T]$, на котором для решения $y(t,\mu)$ задачи (12) справедливо асимптотическое представление*

$$y(t,\mu) = y_0(t) + \mu\frac{\partial y(t,0)}{\partial\mu} + \ldots + \frac{\mu^n}{n!}\frac{\partial y(t,0)}{\partial\mu} + \varepsilon_{n+1}(t,\mu), \quad (15)$$

где $\varepsilon_{n+1}(t,\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, $0 \le t \le T$, причём $\varepsilon_{n+1}(t,\mu) = O(\mu^{n+1})$ (представление равномерно).

Коэффициенты при μ^m в разложении (15) можно найти следующим образом. Подставляем в уравнение и в начальное условие (12) выражение для y в виде ряда

$$y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \ldots \tag{16}$$

Приравнивая после подстановки члены с одинаковыми степенями μ в левой и правой частях уравнения, а также в начальных условиях, получим:

$$\frac{dy_0}{dt} = f(y_0, t, 0),\ \ y_0(0) = y_0, \tag{17}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial f(y_0, t, 0)}{\partial y} y_1 + \frac{\partial f(y_0, t, 0)}{\partial \mu},\ \ y_1(0) = 0, \tag{18}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Уравнение для y_n имеет линейную структуру

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{\partial f(y_0, t, 0)}{\partial y} y_n + \Phi_n,\ y_n(0) = 0, \tag{19}$$

где Φ_n зависит только t и предшествующих y_i , $i < n$.

В случаи, если начальное условие задачи Коши также зависит от параметра μ, представляем его в виде ряда по степеням μ:

$$y_0(\mu) = y_0^0 + y_0^1 \mu + \ldots$$

Дифференциальные уравнения (17)-(19) при этом не меняются, начальные условия принимают вид:

$$y_0(0) = y_0,\ y_1(0) = y_0^1,\ \ldots, y_i(0) = y_0^i, \ldots$$

В теореме 1 рассматривается функция $f(y, t, \mu)$, которая непрерывна и обладает непрерывными производными до определённого порядка, то есть достаточно гладкая или, как говорят, регулярная функция по y и μ. Возмущения, подчиняющиеся требованиям теоремы, называются *регулярными возмущениями.*

Метод, рассмотренный выше, верен и для случая, когда исследуется система дифференциальных уравнений или дифференциальное уравнение более высокого порядка.

Пример 1. Найти асимптотическое представление с точность до $O(\mu^3)$ для решения $y(t,\mu)$ задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = -4\mu t - y^2, \; y(1) = 1. \tag{20}$$

Решение. Искомое решение ищем в виде

$$y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots$$

Подставим его в уравнение (20) и в начальные условия:

$$y_0'(t) + \mu y_1'(t) + \mu^2 y_2'(t) + \ldots =$$

$$= -4\mu t - (y_0^2(t) + 2\mu y_0(t) y_1(t) + 2\mu^2 y_0(t) y_2(t) + \mu^2 y_1^2(t) + \ldots),$$

$$y_0(1) + \mu y_1(1) + \mu^2 y_2(1) + \ldots = 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем систему

$$y_0' = -y_0^2, \; y_0(1) = 1,$$

$$y_1' = -4t - 2y_0 y_1, \; y_1(1) = 0,$$

$$y_2' = -y_1^2 - 2y_0 y_2, \; y_2(1) = 0,$$

. . . .

Из первого уравнения и начального условия находим $y_0(x) = 1/t$. Подставляем его во второе уравнение, получаем

$$y_1' = -4t - \frac{2y_1}{t},\ y_1(1) = 0.$$

Отсюда

$$y_1(t) = \frac{1}{t^2} - t^2.$$

Подставляем найденные $y_0(t)$, $y_1(t)$ в третье уравнение, получаем

$$y_2' = -\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right)^2 - \frac{2y_2}{t},\ y_2(1) = 0.$$

Решив это линейное уравнение, найдём

$$y_2(t) = -\frac{32}{21t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{7}t^5.$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$y = \frac{1}{t} + \mu\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + \mu^2\left(-\frac{32}{21t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{7}t^5\right) + O(\mu^3).$$

□

Во многих практических задачах возникает вопрос нахождения периодических решений уравнения, имеющее в правой части нелинейное слагаемое:

$$y'' + a^2y = f(t, y, y', \mu). \tag{21}$$

Будем предполагать, что в некоторой области D функция $f(t, y, y', \mu)$ достаточно гладкая по всем аргументам. Уравнение имеет периодическое решение, если функция $f(t, y, y', \mu)$

периодическая по t. Решение так же ищут в виде ряда (16). Произвольные постоянные, возникающие при отыскании $y_0(t)$, $y_1(t)$, $\ldots$, определяются уже не из начальных условий, а из условий периодичности.

Пример 2. Найти 2π-периодическое решение уравнения

$$y'' + 3y = 2\sin t + \mu y'^2 \tag{22}$$

с точность до $O(\mu^3)$.

Решение. Функцию ищем в виде $y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots$ Нужно найти три члена $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, чтобы обеспечить точность $O(\mu^3)$. Используя такой же алгоритм, как в предыдущем примере, сначала находим

$$y_0'' + 3y_0 = 2\sin t.$$

Общее решение имеет вид

$$y_0(t) = \sin t + C_1 \cos\sqrt{3}\,t + C_2 \sin\sqrt{3}\,t.$$

Из условия 2π-периодичности: $y_0(0) = y_0(2\pi)$, $y_0'(0) = y_0'(2\pi)$ находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и, следовательно, $y_0(t) = \sin t$. Далее,

$$y_1'' + 3y_1 = y_0'^2 = \cos^2 t$$

Отсюда, условие периодичности даст решение

$$y_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Наконец,

$$y_2'' + 3y_2 = 2y_0' y_1' = 2\sin t \cos 2t,$$

что даёт

$$y_2 = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{6}\sin 3t.$$

Итак,

$$y = \sin t + \mu\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) + \mu^2\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{6}\sin 3t\right) + O(\mu^3).$$

□

4 Метод усреднения

При нарушении условий теоремы 1 метод, используемый в предыдущем разделе, не применим. В зависимости от того какое условие нарушено, используют разные алгоритмы построения уже *нерегулярных*, или как говорят, *сингулярных возмущений*.

В теореме 1 говорится о гладкости правой части уравнения (12) на конечном сегменте $[0, T]$. Но часто физическая задача решается на произвольно большом промежутке времени, например, на сегменте $[0, L/\mu]$, где L – не зависящая постоянная от малого μ. Продолжение регулярного возмущения на сегмент $[0, L/\mu]$ больший, чем $[0, T]$, не всегда является правомочным, так как асимптотическое разложение функции многих переменных могут иметь области неравномерности. Продемонстрируем это на примере.

Колебание массы, соединённой с нелинейной пружиной, описываются уравнением Дюффинга

$$u'' + u + \mu u^3 = 0,\ u(0) = a,\ u'(0) = 0, \tag{23}$$

где μ – маленькое положительное число. Решая задачу на регулярные возмущения, найдём

$$u = u_0 + \mu u_1 + O(\mu^2) =$$

$$= a\cos t + \mu a^3 \left[-\frac{3t}{8}\sin t + \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) \right] + O(\mu^2). \tag{24}$$

На конечном сегменте $t \in [0,T]$ полученное представление справедливо. Рассмотрим бесконечный интервал $t \in [0,+\infty)$. Функция $t\sin t$ приводит к тому, что $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_1}{u_0} = \infty$, то есть u_1 более сингулярно, чем u_0 при $t \to \infty$. Следовательно, разложение (24) не является приближением к решению при $t \to \infty$. Как говорят, бесконечная область является источником неравномерности. Слагаемое $t\sin t$ называется *вековым членом*, или *секулярным*.

Справедливость разложения (24) нарушается не только при бесконечном t; при временах порядка $t = O(\mu)$ второй член сравнивается с первым, что противоречит понятию асимптотического представления.

Для описания нелинейных колебательных процессов на промежутках времени порядка $1/\mu$, больших по сравнению с периодом колебаний, используют так называемый *метод усреднения*, который был развит Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым. Основной приём метода усреднения заключается в том, что правые части сложных дифференциальных уравнений и быстро изменяющиеся параметры системы заменялись "сглаженными" усреднёнными функциями, не содержащими времени t. По сути, разделяют движения на медленные и быстрые. После этой процедуры уравнения становятся проще.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \mu Y(y,t),\ y(0) = y^0. \tag{25}$$

Далее определим процедуру усреднение по формуле

$$\overline{Y}(\eta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T Y(\eta,t)dt, \tag{26}$$

где η при интегрировании считается параметром. В случае ограниченных периодических по t функций (с периодом T') усреднение производится по формуле:

$$\overline{Y}(\eta) = \frac{1}{T'}\int\limits_0^{T'} Y(\eta,t)dt. \tag{27}$$

Предполагается справедливым также соотношение

$$\frac{d\overline{Y}}{d\eta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{\partial Y}{\partial \eta}(\eta,t)dt. \tag{28}$$

Поставим в соответствие уравнению (25), так называемое усреднённое уравнение

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu\overline{Y}(\eta),\ \eta(0) = y^0. \tag{29}$$

Справедлива следующая теорема.

Терема 2. *Пусть:*

1. *В некоторой области* $|y| \leq b$, $0 \leq t < \infty$, *функция* $Y(y,t)$ *непрерывна и равномерно ограничена вместе с производной первого порядка по* y.

2. *При $|y| \leq b$ существует среднее значение (26), а также справедливо (28), причём паредельный переход в (26) и (28) равномерен относительно $\eta \in [-b, b]$.*

3. *Решения y и η задач (25) и (29) существуют и принадлежат $(-b, b)$ при $0 \leq t \leq L/\mu$, где постоянная L не зависит от μ.*

Тогда равномерен относительно $t \in [0, L/\mu]$ предельный переход

$$\lim_{\mu \to 0}(y - \eta) = 0. \tag{30}$$

Теорема справедлива и в случае, когда y – есть вектор-функция.

Применим методику к слабо-нелинейному уравнению второго порядка

$$u'' + \omega_0^2 u = \mu f(u, u'). \tag{31}$$

При $\mu = 0$ уравнение имеет периодическое решение $u = a_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, где a_0, θ_0 – постоянные и, значит $u' = -\omega_0 a_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$.

При $\mu \neq 0$ сделаем замену

$$u = a(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)), \tag{32}$$

$$u' = -a(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \tag{33}$$

в (31), получим систему уравнений на $a(t)$ и $\theta(t)$:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{\omega_0}\sin\varphi f[a\cos\varphi,\ -a\omega_0\sin\varphi], \qquad (34)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{a\omega_0}\cos\varphi f[a\cos\varphi,\ -a\omega_0\sin\varphi], \qquad (35)$$

где $\varphi = \omega_0 t + \theta$. Правые части уравнений (34) и (35) периодичны по φ, ограничены, и, следовательно, $a' = O(\mu)$, $\theta' = O(\mu)$. В силу малости μ это означает, что функции $a(t)$, $\theta(t)$ слабо меняются со временем и их изменения за время $T = 2\pi/\omega_0$, равное периоду правых частей, очень мало. Указанное свойство следовало ожидать, потому что оно изначально было заложено, когда вместо производной

$$u' = -a\omega_0\sin(\omega_0 t + \theta) - a\theta'\sin(\omega_0 t + \theta) + a'\cos(\omega_0 t + \theta)$$

от функции (32) использовалось приближённое выражение для замены (33). Предполагалось, что $|a'| \ll |a\omega_0|$, $|\theta'| \ll |\theta\omega_0|$.

Усредняя по формуле (27) правые части уравнений (34), (35) на интервале $t \in [0,\, 2\pi/\omega_0]$, получим

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi\omega_0}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi f[a\cos\varphi,\ -a\omega_0\sin\varphi]d\varphi, \qquad (36)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{2a\pi\omega_0}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi f[a\cos\varphi,\ -a\omega_0\sin\varphi]d\varphi, \qquad (37)$$

где мы учли, что $d\varphi = \omega_0 dt$. Запишем (36) и (37) к компактной форме:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\omega_0} f_1(a), \tag{38}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{2a\omega_0} g_1(a), \tag{39}$$

где $f_1(a)$, $g_1(a)$ – коэффициенты первой гармоники ряда Фурье функции $f[a\cos\varphi,\ -a\omega_0\sin\varphi]$.

Более подробно ознакомиться с методом усреднения можно по книгам [6]-[8].

Пример 1. Методом усреднения найти решение уравнения Дюффинга

$$u'' + \omega_0^2 u = -\mu u^3,\ u(0) = a_0,\ u'(0) = 0. \tag{40}$$

Решение. Для уравнения (40) находим $f(u, u') = -u^3$. Следовательно,

$$f[a\cos\varphi,\ -a\omega_0\sin\varphi] = -a^3\cos^3\varphi.$$

Подставим в систему (36)–(37):

$$a' = 0,\ \theta' = \frac{3}{8}\mu\frac{a^2}{\omega_0},$$

что даёт

$$a = \mathrm{const},\ \theta = \frac{3}{8}\mu\frac{a^2}{\omega_0}t + \theta_0.$$

Таким образом, в первом приближении имеем

$$u = a_0\cos\omega_0\left[1 + \frac{3}{8}\mu\frac{a_0^2}{\omega_0^2}\right]t + O(\mu). \tag{41}$$

□

Пример 2. В общей теории относительности уравнение траектории планеты в метрике Шварцшильда определяется интегралом [9]

$$\varphi = \int\limits_{r_{min}}^{r} \frac{dr}{r^2} M \left[\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \right]^{-1/2}, \tag{42}$$

где $\mathcal{E}_0$ – полная энергия, M – момент импульса, $r_g = 2m_0 G/c^2$ – гравитационный радиус Солнца, m_0 – масса Солнца. Найти поправку к кеплеровой траектории.

Решение. Полагая $\mathcal{E}_0 = mc^2 + E$, представим (42) в виде

$$2m \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \right) + \frac{E^2}{c^2} + \frac{2\alpha M^2}{mc^2 r^3} = \frac{M^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2,$$

где $\alpha = Gmm_0$. После замены переменных $u = p_0/r$, $p_0 = M^2/m\alpha$ получим уравнение

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{mc^2 p_0} u \right) - 2u = \frac{E p_0}{\alpha} \left(2 + \frac{E}{mc^2} \right). \tag{43}$$

Продифференцировав это уравнение по φ, найдём

$$u'' + u = 1 + \frac{3\alpha}{mc^2 p_0} u^2 . \tag{44}$$

Произведём подстановку $x = u - 1$, тогда (44) приобретает вид

$$x'' + x = \mu (x+1)^2, \ \mu = \frac{3\alpha}{mc^2 p_0} . \tag{45}$$

Для планет Солнечной системы величина $\mu \ll 1$. Используя метод усреднения, ищем x в виде $x = a\cos(\varphi + \theta(\varphi))$. Из формул (36), (37), следует

$$a' = 0,\ \theta' = -\frac{\mu}{2a\pi}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos\psi + 1)^2\cos\psi d\psi = -\mu\,.$$

Полагая $\theta(0) = 0$, получим

$$x = a_0\cos[(1-\mu)\varphi].$$

Подставляя $u(\varphi)$ в (43), получим $a_0 = e$ с точностью до μ^2, где

$$e^2 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}$$

– эксцентриситет. В результате находим уравнение траектории

$$r = \frac{p_0}{1 + e\cos(1-\mu)\varphi}\,. \tag{46}$$

Если в (46) положить $\mu = 0$, то радиальная координата r возвращается к своему начальному значению при изменении угла φ на величину периода $T_0 = 2\pi$. Траектория планеты является замкнутой (эллипс).

Когда $\mu \neq 0$, угловой период отличен от 2π и равен $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(1-\mu) \approx 2\pi(1+\mu)$. Траектория планеты является незамкнутой, происходит смещение эллипса. За время одного оборота оно равно

$$\triangle\varphi = T - T_0 = 2\pi\mu = 6\pi\alpha/(mc^2 p_0).$$

□

4.1 Уравнение с медленно изменяющимися параметрами

Дифференциальные уравнение в физике в качестве коэффициентов содержат различные параметры – масса, частоты и амплитуды внешних сил и т.п., которые могут изменяться со временем. Если параметры меняются медленно по сравнению с искомой физической величиной, то с успехом можно использовать метод усреднения.

Рассмотрим уравнение вида

$$u'' + \omega^2(t)u = \mu f(u, u'),\ \mu \to 0. \tag{47}$$

Решение будем искать в виде

$$u = \omega^{-1/2} a(t) \cos(\varphi(t) + \alpha(t))\,, \tag{48}$$

где $\varphi = \int\limits^{t} \omega dt$. Возьмём производную

$$u' = -\omega^{1/2} a \sin(\varphi + \alpha) - \omega^{-1/2} a\alpha' \sin(\varphi + \alpha) +$$
$$+ \omega^{-1/2} a' \cos(\varphi + \alpha) - \frac{\omega' a}{2\omega^{3/2}} \cos(\varphi + \alpha). \tag{49}$$

Предположим, что

$$|\alpha'| \ll |\alpha\omega|,\ |a'| \ll |a\omega|,\ |\omega'| \ll \omega^2,$$

то есть функции $a(t)$, $\alpha(t)$, $\omega(t)$ слабо меняются за время $T = 2\pi/\omega$. Тогда, в производной (49) первое слагаемое будет намного больше остальных.

В силу этих соображений сделаем замену переменных

$$u = \omega^{-1/2} a \cos(\varphi + \alpha),\ u' = -\omega^{1/2} a \sin(\varphi + \alpha) \tag{50}$$

в уравнении (47). Получим систему уравнений:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{\omega^{1/2}}\sin(\varphi+\alpha)f(u,u') + a\frac{\omega'}{2\omega}\cos 2(\varphi+\alpha), \qquad (51)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\mu}{a\omega^{1/2}}\cos(\varphi+\alpha)f(u,u') - \frac{\omega'}{2\omega}\sin 2(\varphi+\alpha). \qquad (52)$$

Усредняем (51), (52):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi\omega^{1/2}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi+\alpha)f(u,u'), \qquad (53)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi a\omega^{1/2}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi+\alpha)f(u,u'). \qquad (54)$$

Как видно из (53) и (54), в нулевом приближении получим $a' = 0$, $\alpha' = 0$ и, следовательно, величины a, α – постоянные.

Решение (48) в окрестности точек t_0, удовлетворяющих условию $\omega(t_0) = 0$, становится неприменимым. Определим окрестность, в которой ещё можно использовать (48). Пусть $\omega^2(t)$ имеет в точке t_0, например, простой нуль: $\omega^2(t) = b(t - t_0)$, тогда условие $|\omega'| \ll \omega^2$ даст окрестность $|t - t_0| \gg b^{-1/3}$, в которой применимо приближение.

Пример 3. Длина математического маятника изменяется по закону $l = l(t)$. Найти решение уравнения движения маятника в окрестности положения равновесия.

Решение. Лагранжиан маятника, описывающий линейные колебания,

$$L = \frac{1}{2}ml^2u'^2 - \frac{1}{2}mglu^2.$$

Представим уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(l^2 u'^2) + glu = 0$$

в стандартной форме

$$u'' + \omega^2 u = -2\frac{l'}{l}u',\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{55}$$

Условию $|\omega'| \ll \omega^2$ соответствует $|l'| \ll \omega l$ или $|l'| \ll \sqrt{gl}$, то есть длина маятника медленно меняется, отношение l'/l играет роль малого параметра.

Решение уравнения (55) ищем в виде

$$u = \frac{a(t)}{\sqrt{\omega}} \cos\Big[\int^t \omega dt + \alpha(t)\Big].$$

В нашем случае $f(u, u') = -2u' = 2\sqrt{\omega}\, a \left[\int^t \omega dt + \alpha(t)\right]$. Используя формулы (53), (54), находим $a' = -(l'/l)a$, $\alpha' = 0$, следовательно,

$$u = Cl^{-3/4} \cos\left[\int^t \sqrt{\frac{g}{l}} dt + \alpha_0\right]. \tag{56}$$

□

4.2 Движение в быстро осциллирующем внешнем поле

Изучим противоположную ситуацию – будем полагать, что уравнение содержит быстро изменяющиеся параметры. Идею решения таких уравнений изложим в рамках физической задачи [10].

Рассмотрим уравнение вида

$$Mq'' = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q,t), \tag{57}$$

которое описывает движение частицы в потенциальном поле $U(q)$ и на неё действует быстроосциллирующая сила $Q(q,t)$ с частотой $\omega \gg T_0^{-1}$, где T_0 – порядок величины периода движения в поле $U(q)$ при отсутствии других сил. Здесь не предполагается сила $Q(q,t)$ слабой по сравнению с силами, действующие в поле $U(q)$, однако, будем считать, что вызываемое этой силой колебательное смещение частицы малым. При таких допущениях частица будет двигаться по "сглаженной" траектории и осциллировать вокруг неё с частотой ω.

Решение уравнения (57) ищем в виде

$$q = \xi + u,\ |\xi| \gg |u|, \tag{58}$$

где ξ – медленно изменяющейся функция (она описывает гладкую траекторию), u – быстроосциллирующая функция. Подставляя (58) в (57) и разлагая по степеням u с точностью до членов первого порядка, получим

$$M(\xi'' + u'') = -\frac{\partial U}{\partial \xi} - u\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \ldots$$
$$+Q(\xi,t) + u\,\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \ldots \tag{59}$$

Усредняя (59) по периоду $2\pi/\omega$, найдём

$$M\xi'' = -\frac{\partial U}{\partial \xi} + \left\langle u\,\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right\rangle + \ldots \tag{60}$$

Выделим из (59) быстроосциллирующие слагаемые, получим уравнение

$$Mu'' = Q(\xi, t) + \dots, \tag{61}$$

из которого находим

$$u' = \frac{1}{M} \int^{t} Q(\xi, t) dt. \tag{62}$$

Остальные слагаемые не вошли в (61), так как малы по сравнению с u'', которое пропорционально большой величине ω^2.

Поскольку

$$u \frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{d}{dt} \left(u \int^{t} dt \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) - u' \int^{t} dt \frac{\partial Q}{\partial \xi},$$

то среднее значение равно

$$\left\langle u \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right\rangle = - \left\langle u' \int^{t} dt \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right\rangle = - \frac{1}{M} \left\langle \int^{t} Q dt \cdot \int^{t} dt \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right\rangle =$$

$$= - \frac{1}{2M} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \left[\int^{t} dt Q \right]^2 \right\rangle .$$

Следовательно, уравнение (60) можно представить в виде

$$M \xi'' = - \frac{\partial U_{\text{эф}}}{\partial \xi}, \tag{63}$$

$$U_{\text{эф}} = U(\xi) + \frac{1}{2M} \left\langle \left[\int^{t} dt Q(\xi, t) \right]^2 \right\rangle . \tag{64}$$

Как видно из формулы (64), действие быстроосциллирующий силы проявляется в изменении потенциальной энергии. Дополнительное слагаемое квадратично зависит от амплитуды переменной силы.

Пример 4. Рассмотрим уравнение движения
$$ml^2\varphi'' = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} + Q(\varphi, t),$$
где $U = -mgl\cos\varphi$, $Q = mls_0\,\omega^2\cos\omega t\sin\varphi$, $\omega \gg \sqrt{g/l} = \omega_0$. Это уравнение описывает маятник, точка подвеса которого движется вертикально по закону $s = s_0\cos\omega_0 t$. Функция $\varphi(t)$ – угол отклонение маятника от вертикали. Необходимо найти эффективную потенциальную энергию.

Решение.
$$\left[\int^t dtQ(\xi,t)\right]^2 = m^2l^2s_0^2\,\omega^4\sin^2\xi\left[\int^t dt\cos\omega t\right]^2 =$$
$$= m^2l^2s_0^2\,\omega^3\sin^2\xi\sin^2\omega t.$$
Усредним:
$$\left\langle\left[\int^t dtQ(\xi,t)\right]^2\right\rangle = m^2l^2s_0^2\,\omega^3\sin^2\xi\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle =$$
$$= m^2l^2s_0^2\,\omega^3\sin^2\xi\cdot\frac{1}{(2\pi/\omega)}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t dt = \frac{1}{2}m^2l^2s_0^2\,\omega^2\sin^2\xi.$$
Получим
$$U_{\text{эф}} = -mgl\cos\xi + \frac{1}{4}ms_0^2\,\omega^2\sin^2\xi =$$

$$= -mgl\left[\cos\xi - \left(\frac{s_0\omega}{2l\omega_0}\right)^2 \sin^2\xi\right].$$

□

Пример 5. Частица движется в электромагнитном поле, которое является суперпозицией статических полей $\mathbf{E_0}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B_0}(\mathbf{r})$ и переменного быстроосциллирующего поля $\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_\sim(\mathbf{r},t)$. Найдём уравнение движения частицы по сглаженной траектории [11].

Решение. Ищем решение уравнения

$$m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}^{(\mathbf{0})} + e\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c}[\mathbf{r}'\,\mathbf{B}_\sim], \tag{65}$$

$$\mathbf{F}^{(\mathbf{0})} = e\mathbf{E_0} + \frac{e}{c}[\mathbf{r}'\,\mathbf{B_0}].$$

в виде $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$, где $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{u}|$. Тогда (65) примет вид

$$m(\mathbf{x}'' + \mathbf{u}'') = \mathbf{F}^{(0)}(x) + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{F}^{(0)} + \left(\mathbf{u}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'}\right)\mathbf{F}^{(0)} + e\mathbf{E}_\sim(\mathbf{x}) +$$

$$+ e(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c}[\mathbf{x}'\,\mathbf{B}_\sim] + \frac{e}{c}[\mathbf{x}'(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{B}_\sim] + \frac{e}{c}[\mathbf{u}'\,\mathbf{B}_\sim]. \tag{66}$$

Усредняя (66) получим

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}^{(0)}(x) +$$

$$+ \left\langle e(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c}[\mathbf{x}'(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{B}_\sim] + \frac{e}{c}[\mathbf{u}'\,\mathbf{B}_\sim]\right\rangle, \tag{67}$$

$$m\mathbf{u}'' = (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{F}^{(0)} + \left(\mathbf{u}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'}\right)\mathbf{F}^{(0)} + e\mathbf{E}_\sim(\mathbf{x}) + \frac{e}{c}[\mathbf{x}'\,\mathbf{B}_\sim]. \tag{68}$$

Далее предположим, что

$$\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cos\omega t,\ \mathbf{B}_\sim(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})\cos\omega t, \tag{69}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{c}{\omega}\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

В силу малости двух первых членов в правой части (69), получим

$$\mathbf{u} = -\frac{e}{m\omega^2}\left(\mathbf{E}\cos\omega t + \frac{1}{c}[\mathbf{x}'\,\mathbf{B}]\sin\omega t\right). \tag{70}$$

Подставим (70) в (67), учтём (69) и опустим члены $\sim x'^2/c^2$ (нерелятивистский предел), в результате найдём

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}^{(0)}(x) - \frac{e^2}{2m\omega^2}((\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} + [\mathbf{E}\,\mathbf{rot}\mathbf{E}]). \tag{71}$$

Поскольку $\nabla E^2/2 = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}+[\mathbf{E}\,\mathbf{rot}\mathbf{E}]$, то получим уравнение

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}^{(0)} - \nabla U(\mathbf{x}),$$

$$U(\mathbf{x}) = \frac{e^2}{2m}\left\langle\left(\int^t dt\mathbf{E}_{\sim}(\mathbf{r},t)\right)^2\right\rangle = \frac{e^2}{4m\omega^2}E^2(\mathbf{r}).$$

□

5 Метод ВКБ

Если в уравнении (12) функция $f(y, t, \mu)$ терпит разрыв при $\mu = 0$, то выше описанные методы не применимы. Рассмотрим пример

$$\mu y' = ay + b,\ y(0, \mu) = y^0,\ a = \text{const},\ b = \text{const}. \tag{72}$$

Если разделить это уравнение на μ, то сингулярность правой части уравнения при $\mu = 0$ будет очевидной: $y' = (ay + b)/\mu$. Его точное решение имеет вид

$$y(t, \mu) = \left(y^0 + \frac{b}{a}\right) e^{at/\mu} - \frac{b}{a}. \tag{73}$$

Полагая $\mu = 0$ в уравнении (72), получим $\overline{y} = -\dfrac{b}{a}$. Анализируя (73), можно видеть, что близость y к $\overline{y}$ имеет место лишь при выполнении некоторых *специальных* условий, которых не было в теореме 1 о регулярных возмущениях. А именно, если рассматривать решение начальной задачи при $t \geq 0$, то $y \to \overline{y}$, если $a < 0$, а $\mu \to 0+$ (или $a > 0$, а $\mu \to 0-$). Если же $\mu \to 0$ произвольным образом, то решение y предела не имеет и является неограниченным. Кроме того, стоит вопрос об удовлетворении начального условия $y(0, \mu) = y^0$, которое, вообще говоря, не равно $-b/a$.

Таким образом, в сингулярно возмущённых уравнениях пренебрегать малыми членами можно лишь при выполнении особых условий и для выяснения этих условий требуется строить другую теорию.

В этом разделе мы будем рассматривать дифференциальное уравнения второго порядка

$$\mu^2 y'' \pm q(x) y = 0$$

при $\mu \to 0$. Оно относится к типу дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Перепишем его как

$$y'' \pm k^2 q(x) y = 0, \tag{74}$$

где $k = 1/\mu$ – большой параметр при $\mu \to 0$. Построим асимптотическое приближение *методом ВКБ* (WKBJ - Вентцель, Крамер, Бриллюэн, Джефрис), который имеет много названий в физике – квазиклассическое приближение, коротковолновое приближение, высокочастотное приближение и т.д.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + k^2 q(x) y = 0 \tag{75}$$

на конечном отрезке $I = [a,\, b]$. Будем предполагать, что $k \to +\infty$ и функция $q(x) > 0$, бесконечно дифференцируема на I. Асимптотическое представление будем искать в виде

$$y = \exp\Big[\int\limits_a^x \Big(ik\alpha_{-1}(t) + \alpha_0(t) + \frac{\alpha_1(t)}{ik} + \ldots + \frac{\alpha_n(t)}{(ik)^n} + \ldots \Big) dt \Big]. \tag{76}$$

Сделаем подстановку

$$\frac{y'}{y} = \omega, \qquad (77)$$

тогда для ω получим уравнение Риккати:

$$\omega' + \omega^2 = -k^2\omega\,. \qquad (78)$$

Из (76) и (77) имеем

$$\omega = ik\alpha_{-1}(x) + \alpha_0(x) + \frac{\alpha_1(x)}{ik} + \ldots + \frac{\alpha_n(x)}{(ik)^n} + \ldots. \qquad (79)$$

Подставляем это выражение в (78)

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (ik)^{-n}\alpha'_n(x) + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} (ik)^{-n}\alpha_n(x)\right)^2 = -k^2 q(x). \qquad (80)$$

Приравнивая коэффициенты при k^2, а затем при k, найдем

$$\alpha_{-1} = \pm\sqrt{q(x)}\,,\ \alpha_0 = -\frac{q'(x)}{4q(x)}\,. \qquad (81)$$

Функция α_1 для знака "+" равна

$$\alpha_1 = \frac{q''}{8q^{3/2}} - \frac{5(q')^2}{32\,q^{5/2}}\,. \qquad (82)$$

Продолжая процесс, можно вывести рекуррентную систему уравнений для функций α_n:

$$\alpha_{n+1} = -\frac{1}{2\sqrt{q(x)}}\left[\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x)\alpha_{n-j}(x) + \alpha'_n(x)\right]. \qquad (83)$$

Уравнение (75) имеет два формальных асимптотических решения:

$$y_{1,2}(x,k) = q^{-1/4}(x)\exp\left(\pm ik\int_a^x \sqrt{q(t)}\,dt\right)\times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\pm ik)^{-n}\int\limits_{a}^{x}\alpha_n(t)\,dt+\ldots\right\}. \tag{84}$$

Можно утверждать, что существуют решения уравнения (75), которые разлагаются в асимптотические ряды (84).

Теорема 2. *Для любого целого $N \geq 1$ уравнение (75) имеет решения вида*

$$y_{1,2}(x,k)=q^{-1/4}(x)\,exp\left(\pm ik\int\limits_{a}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt\right)\times$$

$$\times\,exp\left\{\sum_{n=1}^{N-1}(\pm ik)^{-n}\int\limits_{a}^{x}\alpha_n(t)\,dt\right\}\left[1+O(k^{-N})\right], \tag{85}$$

Асимптотику решений $y_{1,2}(x,k)$ можно дифференцировать по x и по k любое число раз.

Подобная теорема справедлива для уравнения

$$y''-k^2q(x)y=0. \tag{86}$$

Теорема 3. *Для любого целого $N \geq 1$ уравнение (86) имеет решения вида*

$$y_{3,4}(x,k)=q^{-1/4}(x)\,exp\left(\pm k\int\limits_{a}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt\right)\times$$

$$\times\,exp\left\{\sum_{n=1}^{N-1}(\pm k)^{-n}\int\limits_{a}^{x}\alpha_n(t)\,dt\right\}\left[1+O(k^{-N})\right], \tag{87}$$

Асимптотику решений $y_{3,4}(x,k)$ можно дифференцировать по x и по k любое число раз.

Для функций $\alpha_n(t)$ имеются подобные рекуррентные соотношения (83).

Асимптотические представления (85), (87) непригодны в точках, где функция $q(x)$ обращается в нуль. Такие точки называются *точками поворота*. Термин происходит из квантовой механики, где некоторые задачи для уравнения Шрёдингера приводятся к уравнению типа (75). При наличии точек поворота используется другой алгоритм построения асимптотики [12].

Первые члены рядов (85), (87), или *главные асимптотики* имеют вид

$$y_{1,2} = q^{-1/4}(x) \exp\left(\pm ik \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}\, dt\right)(1 + O(k^{-1})), \qquad (88)$$

$$y_{3,4} = q^{-1/4}(x) \exp\left(\pm k \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}\, dt\right)(1 + O(k^{-1})). \qquad (89)$$

Вместо (88) можно взять пару вещественных функций:

$$\bar{y}_1(x,k) = q^{-1/4}(x)\left[\cos\left(k \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}\, dt\right) + O(k^{-1})\right], \qquad (90)$$

$$\bar{y}_2(x,k) = q^{-1/4}(x)\left[\sin\left(k \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}\, dt\right) + O(k^{-1})\right]. \qquad (91)$$

Если для справедливости асимптотик (85), (87) требуется $q(x) \in C^\infty[a,b]$, то для главных асимптотик (88)-(91) достаточно $q(x) \in C^2[a,b]$. Асимптотические формулы (88)-(91)

можно дифференцировать два раза:

$$y_{1,2}^{(j)} = \frac{(\pm ik\sqrt{q})^j}{q^{1/4}} \exp\left(\pm ik \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}\,dt\right)(1 + O(k^{-1})), \quad (92)$$

$$y_{3,4}^{(j)} = \frac{(\pm k\sqrt{q})^j}{q^{1/4}} \exp\left(\pm k \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}\,dt\right)(1 + O(k^{-1})), \quad (93)$$

где $j = 1, 2$ – порядок дифференцирования. Оценка остаточного члена остаётся равномерной для $x \in I$. Слагаемые, появляющиеся при дифференцировании множителя $q^{-1/4}$ малы по сравнению со слагаемыми, которые возникают при дифференцировании экспоненты.

Именно формулы (88)-(91) называют *ВКБ-приближением.* Для глубоко изучения метода можно воспользоваться, например, книгой [12].

Пример 1. Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера

$$\hbar^2 \psi''_{rr} + 2m(\mathcal{E} - U)\psi(r) = 0.$$

Здесь, $\hbar$ – постоянная Планка, m – масса, $\mathcal{E}$ – энергия частицы, потенциальная энергия имеет вид $U(r) = V_0 V(r/L)$, где V_0, L – характерные параметры задачи.

Введём новую переменную $x = r/L$, величину $E = \mathcal{E}/V_0$ и малый безразмерный параметр

$$h = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}L} = \frac{\lambda}{L} \to 0\,,$$

где λ – длина волны де Бройля. Уравнение приводится к виду

$$\psi''_{xx} + \frac{(E-V)}{h^2}\psi(x) = 0,$$

которое относится к типу уравнения (74). Здесь, большой параметр равен $k = 1/h$.

Следуя алгоритму раздела, для случая $E > V$ получим

$$\psi = \frac{1}{(E-V)^{1/4}}\Bigg[C_+ \exp\left(\frac{i}{h}\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{E-V(t)}\,dt\right) +$$

$$+C_- \exp\left(-\frac{i}{h}\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{E-V(t)}\,dt\right) + O(h)\Bigg].$$

Данное асимптотическое разложение нужно уточнять в близи точек поворота, когда $V = E$.

Также предполагается, что функция $U(r)$ будет меняться медленно на расстоянии характерного изменения решения ψ:

$$\left|\frac{\psi'_r}{\psi}\right| \gg \left|\frac{(\mathcal{E}-U)'_r}{\mathcal{E}-U}\right| \sim \frac{1}{L}.$$

Это и позволяет ввести малый параметр h.

Различные физические тонкости метода ВКБ в квантовой механике можно изучить, например, в [13].

□

Пример 2. Используя ВКБ-приближение, найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$y'' + k^2 q(x) y = 0$$

с краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ при больших значениях параметра k. Здесь $q(x) > 0$ на отрезке $x \in [0, 1]$.

Решение. ВКБ-приближение даёт общее решение уравнения

$$y \approx \frac{c_1 \cos\left(k\int\limits_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right) + c_2 \sin\left(k\int\limits_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right)}{\sqrt[4]{q(x)}}. \qquad (94)$$

Подставляем (94) в граничное условие $y(0) = 0$, имеем

$$\frac{c_1}{\sqrt[4]{q(0)}} \approx 0, \text{ или } c_1 = 0,$$

откуда

$$y \approx c_2 q^{-1/4}(x) \sin\left(k\int\limits_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right).$$

Подстановка этого выражения в граничное условие $y(1) = 0$ даст

$$c_2 q^{-1/4}(x) \sin\left(k\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt\right) = 0.$$

Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы постоянная c_2 была отлична от нуля. Поэтому $\sin\left(k\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt\right) = 0$ или

$$k\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (95)$$

Значение $n = 0$ даёт тривиальное решение, поэтому его исключают. Таким образом, в первом приближении собственные числа определяются формулой

$$k_n = n\pi \left[\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\, dt \right]^{-1}, \tag{96}$$

а соответствующие им собственные функции – формулой

$$y_n = q^{-1/4}(x) \sin \left[k_n \int\limits_0^x \sqrt{q(t)}\, dt \right]. \tag{97}$$

□

6 Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Найти 2-3 члена асимптотического представления по степеням малого параметра μ:

1. $y' = y^2 + 2\mu x^{-1}$, $y(1) = -1$.

2. $xy' = \ln y + \mu x^2$, $y(1) = 1$.

3. $y' = 6\mu x^{-1} - y^2$, $y(1) = 1 + 3\mu$.

Найти приближённо периодические решения с периодом, равный периоду правой части уравнения; μ – малый параметр:

4. $y'' + 5y = \cos 2t + \mu y^2$.

5. $y'' + 3y + y^3 = 2\mu \cos t$.

6. $y'' + y^2 = 1 + \mu \sin t$.

Методом усреднения решить приближённо уравнения:

7. $u'' + \omega_0^2 u = -\mu(1 - u^2)u'$, $u(0) = a_0$, $u'(0) = 0$.

8. $u'' + u = -\mu u'|u'|$.

9. $u'' + u - \mu(u' - u'^3) = 0$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$.

10. Доказать, что при $q(x) = (ax + b)^{-4}$ формула (84) даёт точное решение

$$y_{1,2}(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp\left(\pm ik \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}\, dt\right)$$

для уравнений (75).

11. Используя ВКБ-приближение, найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$y'' + k^2 q(x) y = 0$$

с краевыми условиями $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$ при больших значениях параметра k. Здесь $q(x) > 0$ на отрезке $x \in [0, 1]$.

7 Ответы

1. $y = -\frac{1}{x} + \mu\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \mu^2\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x} + \frac{8}{3x^2} - \frac{1}{x^3}\right) + O(\mu^3).$

2. $y = 1 + \mu\left(x^2 - x\right) + \dfrac{\mu^2 x(1-x)^3}{6} + O(\mu^3).$

3. $y = \frac{1}{x} + 3\mu + \mu^2\left(\frac{3}{x^2} - 3x\right) + O(\mu^3).$

4. $y = \cos 2t + \mu\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{22}\cos 4t\right) + \mu^2\left(\frac{17}{110}\cos 2t + \frac{1}{682}\cos 6t\right) + O(\mu^3).$

5. $y = \mu\cos t + \mu^3\left(-\frac{3}{8}\cos t + \frac{1}{24}\cos 3t\right) + O(\mu^5).$

6. $y_1 = 1 + \mu\sin t - \frac{\mu^2}{4}(1 + \cos 2t) + O(\mu^3),$
$y_2 = -1 - \frac{\mu}{3}\sin t + \frac{\mu^2}{36}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 2t\right) + O(\mu^3).$

7. $u = a\cos(\omega_0 t + \theta_0),\ a^2 = 4\left(1 + (4/a_0^2 - 1)e^{-\mu t}\right)^{-1}.$

8. $u = \dfrac{a_0}{1 + \frac{4}{3\pi}\mu a_0 t}\cos(t + \theta_0).$

9. $u = \left(\frac{2u_0 e^{\mu t/2}}{\sqrt{4 - 3u_0^2(1 - e^{-\mu t})}} + O(\mu)\right)\cos(t + O(\mu)).$

11. $k_n = (n + 1/2)\pi\left[\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt\right]^{-1},$
$y_n = q^{-1/4}\cos\left[k_n \int\limits_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right].$

Указание: при дифференцировании общего решения использовать формулу (92).

Литература

[1] Мухарлямов Р.К. Асимптотические методы в теоретической физике. Часть I / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КФУ, 2016. – 47 с.

[2] Даишев Р.А. Дифференциальные уравнения / Р.А. Даишев, А.Ю. Даньшин – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 150 с.

[3] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 54 с.

[4] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 58 с.

[5] Мухарлямов Р.К. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КФУ, 2013. – 30 с.

[6] Найфе А. Методы возмущений / А. Найфе – М.: Мир, 1976. – 454 с.

[7] Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов , Ю.А. Митропольский – М.: Наука, 1974. – 408 с.

[8] Митропольский Ю.А. Методы усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский - Киев.: Наукова думка, 1971. – 440 с.

[9] Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с.

[10] Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.

[11] Гапонов А.В., Миллер М.А., ЖЭТФ, 1958, Т.34, С.242

[12] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк – М.: Либроком, 2009. – 352 с.

[13] Ландау Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 808 с.

Мухарлямов Руслан Камилевич

Панкратьева Татьяна Николаевна

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Часть II

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 15.09.2016.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Форм. 60×84 1/16. Гарнитура "Times New Roman". Усл. печ. л. 2,79.

Уч.-изд. л. 2.62. Тираж 30. Заказ 214/9.

Отпечатано с готового оригинала макета

в типографии Издательства Казанского университета.

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28.