КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт физики

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Часть I

Учебно-методическое пособие

Казань – 2016

УДК 517.928

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института физики КФУ
Протокол № 6 от 15 апреля 2016 г.

Рецензенты:
доцент кафедры общей математики КФУ, к.ф.-м.н. **В. А. Сочнева**;
доцент кафедры теории относительности
и гравитации КФУ, к.ф.-м.н. **Р.А. Даишев**

Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.

Асимптотические методы в теоретической физике. Часть I. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения на бесконечном интервале: учебно-методическое пособие / Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 47 с.

Пособие предназначено для студентов института физики Казанского федерального университета и является методическим обеспечением курсов по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др.

Оглавление

1 Введение

Асимптотические методы математики находят применения в многочисленных задачах теоретической физики. Довольно часто физические модели описываются "трудными" уравнениями (дифференциальные, интегральные и т.п.). Асимптотические подходы позволяют упростить управляющие уравнения модели и при этом сохранить хорошую точность. Результат достигается за счёт локализации характерных параметров физического процесса и переменных в уравнениях. Существенным свойством этих методов является ограниченная точность, это есть следствие упрощения. Асимптотические методы в физике – это большее, чем просто способ решения поставленных задач. Они позволяют явно выстраивать связь и иерархию между физическими теориями. Например, переход от волновой оптики к геометрической связан с пренебрежением длиной волны по сравнению с размерами объекта, и для этого используется метод ВКБ (WKBJ - Вентцель, Крамер, Бриллюэн, Джефрис). Аналогичная связь существует между квантовой и классической механикой. Эти примеры и многие другие подтверждают хорошо известную мысль, что развитие физики носит "асимптотический" характер.

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются асимптотические методы решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при больших значениях независимой переменной. Это направление достаточно обширное. Мы ограничились освещением некоторых частностей. Приведены необходимые сведения и подробно разобраны примеры решений дифференциальных уравнений второго порядка. Данное пособие является дополнением к изданиям [1]-[5] и является методическим обеспечением курсов по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др. Предназначено для студентов института физики КФУ, обучающихся по направлению "Физика".

2 Предварительные понятия

Фразы "асимптотическое представление "асимптотический метод" ассоциируются с фразами "приближённо "замена сложного простым". Здесь сформулируем основные определения и положения, которые позволят понять, что под этим подразумевают в математике.

2.1 O – символика

Напомним определение символов $\sim$, o, O.

Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал (c, d), содержащий точку a. Если из этого множества исключить саму точку a, то получим так называемую проколотую окрестность точки a. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a, которая может быть конечной или бесконечно удалённой точкой.

Обозначение

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to a \tag{1}$$

равносильно условию

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

В этом случае говорят, что функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to a$.

Выражение

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \to a \tag{2}$$

означает

$$|\alpha(x)| \leq M|\beta(x)|,$$

где M – положительная постоянная. Иными словами, функция $\alpha(x)$ ограничена по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to a$.

Формула

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to a \tag{3}$$

подразумевает предел

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

В частности, если $\alpha(x) = o(1)$ $(x \to a)$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to a$; если же $\alpha(x) = O(1)$ $(x \to a)$, то $\alpha(x)$ – ограниченна при $x \to a$.

Соотношения (1), (2) и (3) называются *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками.*

Отметим некоторые свойства символов o и O:

$$o(\alpha(x)) + o(\alpha(x)) = o(\alpha(x)),\ o(\alpha(x)) + O(\alpha(x)) = O(\alpha(x));$$

$$o(\alpha(x))o(\beta(x)) = o(\alpha(x)\beta(x)),\ o(\alpha(x))O(\beta(x)) = o(\alpha(x)\beta(x));$$

$$o(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x)),\ O(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x)),\ o(O(\alpha(x))) = o(\alpha(x)).$$

Здесь всюду $x \to a$.

Примеры:

$$x^4 = o(x^2) \text{ при } x \to 0;$$

$$x^2 = o(x^4) \text{ при } x \to \infty;$$

$$\ln x = o(x^q) \text{ при } x \to +\infty,\ q > 0;$$

$$\ln x = o(x^{-q}) \text{ при } x \to +0,\ q > 0;$$

$$\sin x = O(1) \text{ при } -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x \sim x \text{ при } x \to 0.$$

Знак ∞, если не оговорено противное, означает $+\infty$.

Символ "=" в формулах (1) и (2) не обладает всеми свойствами обычного знака равенства – свойство коммутативности не выполняется. Например, $\ln(1+x) = o(x^{1/3})$ при $x \to 0$, но нельзя утверждать, что $o(x^{1/3})$ при $x \to 0$ есть $\ln(1+x)$.

Асимптотические оценки удобно использовать для численных рассчётов. Рассмотрим простой пример. Имеет место предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x/2} = 1,$$

значит

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2 \text{ или } \sqrt{1+x} \sim 1 + x/2\,. \tag{4}$$

Используя оценку (4), найдём $\sqrt{1,06} = \sqrt{1+0,06} = 1 + 0,6/2 = 1,03$. Табличное значение даёт $\sqrt{1,06} = 1,0296$. Абсолютная погрешность равна $\triangle X = |1,03 - 1,0296| = 0,0004$; относительная погрешность – $\delta = \frac{|1{,}03-1{,}0296|}{1{,}0296} \times 100\% = 0,039\%$. Такая точность приемлема для многих приложений.

В следующем пункте идея асимптотических оценок развивается дальше, что даёт основу для приближённых методов решения не только дифференциальных уравнений, но и рассчёта других математических объектов, например, интегралов [7].

2.2 Асимптотические ряды

Определение 1. Пусть функции $\varphi_n(x) \neq 0, n = 1, 2, \ldots$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется *асимптотической* при $x \to a$, если для любого n выполняется

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \ (x \to a).$$

Иногда такую последовательность называют *калибровочной.*

Примеры калибровочных последовательностей:

$$\{(x-a)^n\},\ x \to a;$$

$$\{x^{-n}\},\ x \to \infty;$$

$$1,\ x^{1/3},\ x^{2/3},\ x,\ x^{4/3}, \ldots \text{ при}\, x \to +0.$$

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и $\{\varphi_n(x)\}$ – калибровочная последовательность при $x \to a$. *Функция* $f(x)$ *разлагается в асимптотический ряд*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \ (x \to a), \tag{5}$$

где a_n – постоянные, если при любом натуральным числе N выполняется

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_N(x)) \ (x \to a). \tag{6}$$

или

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_{N+1}(x)) \ (x \to a). \tag{7}$$

Ряд (5) называется *асимптотическим разложением (приближением)* функции $f(x)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ при $x \to a$. Равенство (6) называют *асимптотическим представлением порядка N функции $f(x)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ при $x \to a$.* Слагаемое $o(\varphi_N(x))$ определяет погрешность представления (6).

Определение 2 использовал Пуанкаре А. в своей работе, поэтому ряд (5) называют ещё *асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре.* Эрдейи А. определял это понятие более широко [6].

В определении ничего не говорится о сходимости асимптотического ряда (5). Для него существуют три возможности:

1. ряд сходится к $f(x)$;
2. ряд сходится к $g(x) \neq f(x)$;
3. ряд расходится.

Сходимость асимптотического ряда (5) не играет роли, а смысл его в том, что разность между функцией $f(x)$ и частной суммы $\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x)$ ряда (5) мала по сравнению с наименьшим членом $\varphi_N(x)$ этой частной суммы. Не всегда разложение функции в *сходящийся* ряд даёт *асимптотический* ряд для этой функции. Например, из сходящегося ряда Тейлора для экспоненты

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ -\infty < x < +\infty$$

не следует асимптотическое разложение вида

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ |x| \to a, \ a > 1,$$

так как последовательность $\{x^n\}$ не является асимптотической при $|x| \to a > 1$. Но, из ряда Тейлора для логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \ |x| < 1$$

следует асимптотический ряд

$$\ln(1+x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \ x \to 0.$$

Одна и та же функции может иметь не единственное асимптотическое разложение по разным калибровочным последовательностям. Но для фиксированной последовательности и функции имеет место теорема:

Теорема 1. *Асимптотическое разложение данной функции по данной калибровочной последовательности единственно.*

Интересно отметить, что две различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение.

С другим свойствами асимптотического разложения можно ознакомиться, например, в книге [7].

3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

В предыдущем разделе были определены понятия асимптотического разложения и представления функции, заданной в *явном виде*. Как правило, задачи в приложениях сложнее, чем просто найти асимптотику данной функции. Физическая величина, как функция от некоторой переменной, определяется в *неявном виде* – через различные уравнения (дифференциальные, интегральные и т.п.). Однако, не всегда удаётся получить асимптотику искомой функции в два этапа: сначала найти в явном виде функцию, а потом – её разложение. В этом случае опускают первый этап и определяют асимптотику непосредственно из уравнения.

Многие задачи, возникающие в теоретической физике, приводят к дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами. В этом разделе мы рассмотрим приближённые методы решения уравнений вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{8}$$

при $x \to \infty$.

3.1 Осциллирующие и экспоненциальные решения

Решения (8) можно сравнивнить с решением некоторого эталонного уравнения. Если положить, например, $p(x) = 0$,

$q(x) = \pm 1$, то уравнение примет вид

$$y'' \pm y = 0. \tag{9}$$

Как известно, для него существуют, соответственно знаку перед y, по паре линейно независимых решений $e^{\pm ix}$ и $e^{\pm x}$.

Зададимся вопросом: при каких условиях уравнения

$$y'' \pm q(x)y = 0 \tag{10}$$

имеют решения, эквивалентные на бесконечности функциям $e^{\pm ix}$ или $e^{\pm x}$? Ответ даст ряд теорем.

Положим функцию $q(x)$ в уравнении (10) равной $q(x) = 1 + \varphi(x)$.

Теорема А. *Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0,$
2. $\int\limits^{\infty} |\varphi(x)|dx < \infty,$

то уравнение

$$y'' + (1 + \varphi(x))y = 0 \tag{11}$$

обладает двумя решениями, имеющие соответственно асимптотический вид при $x \to \infty$:

$$y_{1,2} = e^{\pm ix} + o(1)$$

или в вещественной форме:

$$y_1 = \sin x + o(1),\ y_2 = \cos x + o(1).$$

Теорема B. *Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$,
2. $\int\limits^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty$,

то уравнение

$$y'' - (1 + \varphi(x))y = 0 \tag{12}$$

обладает двумя решениями, имеющие соответственно асимптотический вид при $x \to \infty$:

$$y_{3,4} = e^{\pm x} + o(1)\,.$$

Теоремы A и B говорят о виде первого члена асимптотических представлений решений уравнений (11) и (12). Этот член называют *главной асимптотикой решения уравнения.* Ниже будут сделаны дополнительные предположения о функции $\varphi(x)$, что позволит уточнить асимптотики $y_{1,2}$ и $y_{3,4}$, то есть получить следующие по малости члены асимптотического представления и тем самым уменьшить погрешность приближений.

Процесс нахождения асимптотического разложения решения уравнения можно разделить на два этапа. Во первых, построить калибровочную последовательность $\{\psi_k(x)\}$ и так называемое *формальное асимптотическое решение*

$$\widehat{y} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x). \tag{13}$$

Частичная сумма

$$\widehat{y}_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)$$

ряда (13) должна удовлетворять условию

$$\widehat{y}_n'' \pm q(x)\widehat{y}_n = o(\psi_n(x)),\ x \to \infty$$

для любого n. Во вторых, доказать, что существует решение $y(x)$ уравнения (10), которое разлагается в построенный выше формальный ряд (13). Это означает, что для любого n выполняется условие:

$$y(x) - \widehat{y}_n(x) = O(\psi_{n+1}(x)),\ x \to \infty.$$

Ещё раз отметим, что асимптотический ряд (13) не обязан сходиться.

1. Случай степенной асимптотики.

Предположим, что $q(x) \in C[a, \infty)$ (непрерывная функция на полуоси $[a, \infty)$), $\lim\limits_{x \to \infty} q(x) = 1$ и справедливо асимптотическое разложение

$$q(x) \sim 1 + \sum_{k=2}^{\infty} q_k x^{-k} = 1 + O(x^{-2}),\ x \to \infty. \tag{14}$$

Рассмотрим два случая.

а) Осциллирующие решения. Исходя из вида (14) функции $q(x)$, будем искать формальное асимптотическое решение уравнения

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{15}$$

в виде ряда

$$\widehat{y} = e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}. \tag{16}$$

Выбор ряда обосновывается ещё тем, что при $x \to \infty$ он ведёт себя приблизительно как e^{ix}.

Так как решение линейного однородного уравнения определено с точностью до постоянного множителя, то можно положить $c_0 = 1$. Подставим ряды (14) и (16) в уравнение (15), сократим на e^{ix} и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем рекуррентную систему уравнений для c_k:

$$\begin{cases} -2ic_1 + q_2 c_0 = 0, \\ -4ic_2 + 2c_1 + q_2 c_1 + q_3 c_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -2kic_k + k(k-1)c_{k-1} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0, \ k > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Можно легко убедиться, что частичная сумма

$$\widehat{y}_n = e^{ix} \sum_{k=0}^{n} c_k x^{-k}$$

удовлетворяет условию

$$\widehat{y}''_n + q(x)\widehat{y}_n = O(x^{-n-2}),\ x \to \infty \tag{18}$$

для любого n.

Далее, нужно показать, что существует решение уравнения (15), которое разлагается в построенный выше формальный ряд (16). Другими словами, доказать, что для любого n выполняется условие:

$$y(x) - \widehat{y}_n(x) = O(x^{-n-1}),\ \ x \to \infty. \tag{19}$$

В условиях (18) и (19) не пишутся асимптотические оценки вида $O(e^{ix}x^{-n})$, так как $|e^{ix}| = 1$. Сформулируем основной результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Существует решение $y_1(x)$ уравнения (15), которое разлагается в асимптотический ряд:*

$$y_1 \sim e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k},\ \ x \to \infty, \tag{20}$$

где коэффициенты c_k определяются системой (17).

Существует второе решение $y_2(x)$, которое имеет асимптотическое разложение

$$y_2 \sim e^{-ix} \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k x^{-k},\ \widetilde{c}_0 = 1,\ \ x \to \infty. \tag{21}$$

Если функция $q(x)$ вещественная, то коэффициенты $\widetilde{c}_k$ комплексно-сопряжены коэффициентам c_k. Решения y_1 и y_2 линейно независимы, поэтому комбинация $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ с произвольными постоянными есть общее решение уравнения (15).

б) Экспоненциальные решения. Рассмотрим уравнение

$$y'' - q(x)y = 0. \tag{22}$$

Поведение решений уравнения (15) отличается от поведения решений уравнения (22) на бесконечности. У этого уравнения только одно решение (с точностью до постоянного множителя) быстро стремится к нулю при $x \to \infty$.

Будем рассуждать как и в предыдущем случае. Возьмём ряд

$$\widehat{y} = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k},$$

где коэффициенты находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} 2c_1 - q_2c_0 = 0, \\ 4c_2 + 2c_1 - q_2c_1 - q_3c_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2kc_k + k(k-1)c_{k-1} - \sum\limits_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0,\ k > 0. \end{cases} \tag{23}$$

Теорема 3. *Существует решение $y_3(x)$ уравнения (22),* *которое разлагается в асимптотический ряд:*

$$y_3 \sim e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}, \ x \to \infty, \tag{24}$$

где коэффициенты c_k определяются системой (23).

Решение, которое неограниченно при $x \to \infty$, имеет асимптотическое разложение

$$y_4(x) \sim e^{x} \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k x^{-k}, \ \widetilde{c}_0 = 1, \ x \to \infty. \tag{25}$$

Коэффициенты $\widetilde{c}_k$ получаются из рекуррентной системы, аналогичной системе (23) (они не совпадают). Решения y_3 и y_4 линейно независимы.

Доказательства формул (20) и (21) принципиально не отличаются. Утверждения (24) и (25) обосновываются по разному. Подробно об этом можно почитать в [9].

Замечание. Теоремы 2 и 3 сформулированы при условии $q(x) = 1 + O(x^{-2})$. Пусть λ – постоянная. Если $q(x) = \lambda^2 + O(x^{-2})$, то теоремы так же остаются верными, но главные члены асимптотики имеют вид $e^{\pm i\lambda x}$ или $e^{\pm \lambda x}$. Действительно, при замене $z = \lambda x$ получаем $q(z) = 1 + O(z^{-2})$.

2. Обобщение второго условия теорем A и B.

Заменим второе условие теорем A и B условием

$$\int^{\infty} |\varphi(x)|^n dx < \infty \,,$$

где $n \geq 1$ – целое число. В зависимости от значения n уравнения (10) имеют разные асимптотики решений. Рассмотрим случай $n = 2$.

Теорема C. *Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$,
2. $\int\limits^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx < \infty$,

то уравнение

$$y'' + (1 + \varphi(x))y = 0$$

обладает двумя решениями, имеющими асимптотический вид при $x \to \infty$:

$$y_{1,2} = exp\left(\pm ix \pm \frac{i}{2}\int\limits_0^x \varphi(t)dt\right)[1 + o(1)].$$

Здесь, решения $y_{1,2}$ не всегда ограничены [10] в отличии от теоремы A.

Теорема D. *Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$,
2. $\int\limits^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx < \infty$,

то уравнение

$$y'' - (1 + \varphi(x))y = 0$$

обладает двумя решениями, имеющими асимптотический вид при $x \to \infty$:

$$y_{3,4} = exp\left(\pm x \pm \frac{1}{2}\int\limits_0^x \varphi(t)dt + o(1)\right).$$

Для $n \geq 3$ асимптотическое разложение содержат многократные интегралы от функции $\varphi(x)$ (см. [10]).

3. Преобразования Лиувилля.

Приведённые выше выкладки и теоремы не применимы к более общим уравнениям (8). Однако исследования этих уравнений сводятся к уравнениям (10) с помощью следующих преобразований.

Первое преобразование Лиувилля

$$y = z(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^x p(t)dt\right\} \tag{26}$$

приводит уравнение (8) к виду (10):

$$z'' + (q - p^2/4 - p'/2)z = 0. \tag{27}$$

Второе преобразование Лиувилля

$$y(x) = z(s(x)),\ s(x) = \int\limits_a^x |q(t)|^{1/2}dt \tag{28}$$

приводит уравнение (8) к виду

$$z''_{ss} + P(s)z'_s + \operatorname{sign} q \cdot z = 0.$$

Сделав в уравнении (15) замену

$$s = \int\limits_a^x |q(t)|^{1/2} dt, \;\; y = v(s) q^{-1/4}(x), \tag{29}$$

получим новое уравнение для функции $v(s)$:

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + v \left(1 + \frac{5}{16} \frac{q'(x)^2}{q(x)^3} - \frac{1}{4} \frac{q''(x)}{q(x)^2} \right) = 0,$$

где s и x связаны первой формулой из замены (29).

Если $q(x)$ в исходных уравнениях (10) не удовлетворяет условиям теорем 2, 3, A, B, C или D, то для широкого класса функций $q(x)$ с помощью последовательности преобразований Лиувилля можно этого добиться для изменённого уравнения. Эта мысль отражается в методе Лиувилля–Грина (1837 г.), называемый ещё *методом ВКБ*. В физике он носит называние *квазиклассическое приближение*, *коротковолновое приближение*, *высокочастотное приближение* и т.д.

3.2 Метод ВКБ

Методом ВКБ называют метод построения асимптотики решения уравнений

$$y'' \pm k^2 q(x) y = 0, \tag{30}$$

где k – некоторый параметр. В предыдущем разделе для построения асимптотического решения уравнений $y'' \pm q(x) y = 0$ использовались, например, степенные функции. Метод ВКБ предполагает в качестве асимптотической последовательности, так же и другие функции. Данный метод применяется для решения задач квантовой механики, оптики, теории плазмы, гидродинамики и т.д..

Погрешность асимптотического представления решения уравнения (30) зависит не только от переменной x, но и от параметра k. В зависимости от того, как локализуются k и x, выбирается способ построения асимптотического представления и результаты, чаще всего, отличаются. Возможны следующие варианты асимптотик решений уравнения (30):

1. при $x \to \infty$;
2. при $k \to \infty$;
3. двойная асимптотика, то есть асимптотическое приближение, справедливое и при $x \to \infty$, k фиксированном, и при $k \to \infty$, x фиксированном, и при $k \to \infty$, $x \to \infty$.

В рамках этого учебно-методического пособия мы рассмотрим первый случай. В уравнении (30) положим $k = 1$:

$$y'' + q(x)y = 0. \tag{31}$$

Теорема 4. *Пусть коэффициент $q(x)>0$ в уравнении (31) обладает свойствами:*

1. $q(x) \in C^{\infty}[a, \infty)$ (бесконечно дифференцируема на множестве $[a, \infty)$);

2. $\int\limits^{\infty} \left(\left| \frac{q''}{q^{3/2}} \right| + \left| \frac{q'^2}{q^{5/2}} \right| \right) dx < \infty$ *;*

3. существуют формальные асимптотические решения уравнения (31) вида

$$y_{1,2} \sim q^{-\frac{1}{4}}(x) exp\left(\pm iS(x)\right) \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \right], \qquad (32)$$

где $\varphi_k(x)$ *– калибровочные функции,* $S(x) = \int\limits_a^x \sqrt{q(t)} dt$*.*

Тогда существуют решения уравнения (31), для которых эти формальные асимптотические решения являются асимптотическими разложениями при $x \to \infty$*.*

Для решений уравнения

$$y'' - q(x)y = 0,\ q(x) > 0 \qquad (33)$$

имеются асимптотические разложения при $x \to \infty$ вида

$$y_{3,4} \sim q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\left(\pm S(x)\right) \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \right], \qquad (34)$$

если выполнены условия теоремы 4.

Условия теоремы 4 выполнены для широкого класса функций $q(x)$, например:

- для любых полиномов, которые стремятся к ∞ при $x \to \infty$;
- для функции $q(x)$, имеющую асимптотику при $x \to \infty$ вида

$$q(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-\gamma_k},\ \gamma_{k+1} > \gamma_k,\ \gamma_0 > -2;$$

- для $q(x) = a(\ln x)^{\alpha}$, $-\infty < \alpha < +\infty$;

- для функций вида $q(x) = \exp(P_k(x))$, $q(x) = \exp(\exp P_k(x))$, $q(x) = \exp[P_k(x)\exp(P_l(x))]$ и т.п., где $P_l(x)$ – полиномы степени l, лишь бы $q(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Замечание. Проще искать формальное асимптотическое решение уравнения (31), не переходя к новой переменной. Достаточно сделать замену неизвестной функции:

$$y(x) = z(x) q^{-1/4}(x) \exp\left(iS(x)\right), \ S(x) = \int\limits_a^x \sqrt{q(t)} dt.$$

Решение $z(x)$ полученного уравнения

$$z'' + z'\left(2iq^{1/2}(x) - \frac{1}{2}\frac{q'(x)}{q(x)}\right) + z\left(\frac{5}{16}\frac{q'(x)^2}{q(x)^2} - \frac{1}{4}\frac{q''(x)}{q(x)}\right) = 0$$

зачастую можно найти в виде формального ряда, первый член которого равен единице.

4 Линейные дифференциальные уравнения n – го порядка

В физических приложениях встречаются системы дифференциальных уравнений и уравнения высших порядков. Систему можно свести к одному уравнению высшего порядка и обратно. В этом разделе мы рассмотрим асимптотическое поведение решений для линейных уравнений

$$y^{(n)} + q_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_0(x)y = 0 \tag{35}$$

на интервале $x \in [a, +\infty)$ с комплекснозначными непрерывными коэффициентами. Уравнение вида

$$p^n + q_{n-1}(x)p^{n-1} + \ldots + q_0(x) = 0 \tag{36}$$

назовём *характеристическим.* Асимптотика решений уравнения (35) при $x \to \infty$ зависит от поведения на бесконечности корней $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ уравнения (36). Нахождение этих корней является непростой задачей. Ниже изложены относительно простые случаи.

4.1 Уравнения с почти постоянными коэффициентами

Хорошо известно как решать линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами [1]. Укажем условия, при которых эти уравнения являются эталонными для уравнения (35), то есть оно имеет решения, эквивалентные на бесконечности функциям $e^{\lambda_i x}$. Случай $x^s e^{\lambda_i x}$ рассматриваться не будет. Здесь $\lambda_i = const$.

Утверждение 1. *Если в уравнении (35) коэффициенты имеют вид*

$$q_k(x) = q_k^0 + r_k(x), \tag{37}$$

где q_k^0 – постоянные, и выполнены условия:

1. $\int\limits_a^\infty |r_k(x)|dx < \infty$, $1 \le k \le n$,
2. *корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения*

   $$\lambda^n + q_{n-1}^0 \lambda^{n-1} + \ldots + q_0^0 = 0$$

   различны,

тогда уравнение (35) имеет такую фундаментальную систему решений (ФСР) $\{y_1, \ldots, y_n\}$, что

$$y_j(x) = e^{\lambda_j x}[1 + o(1)], \; x \to \infty. \tag{38}$$

Эту асимптотику можно n раз дифференцировать:

$$y_j^{(k)}(x) = \lambda_j^k e^{\lambda_j x}[1 + o(1)], \; 0 \le k \le n\,. \tag{39}$$

Утверждение 2. *Пусть выполнены равенства (37) и условия:*

1. $\lim\limits_{x \to \infty} r_k(x) = 0, \quad 1 \le k \le n,$
2. $Re\lambda_j \ne Re\lambda_k$ *при всех* $j \ne k$,

тогда имеем асимптотику

$$y_j(x) = exp\{\lambda_j\, x + o(x)\},\; x \to \infty\,. \tag{40}$$

4.2 Уравнения с асимптотически простыми корнями

Характеристическое уравнения для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет не больше n корней. Некоторые корни могут совпадать и их называют кратными, в противном случае – простыми корнями. Для более сложного уравнения (35) корни характеристического уравнения (36) зависят от переменной x. Однако, и здесь можно ввести аналог простого корня.

Пусть при некотором j существуют пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p_j(x)}{p_k(x)} = c_{jk},\; 1 \le j, k \le n, \tag{41}$$

конечные или бесконечные. Корень $p_j(x)$ характеристического уравнения (36) называется *асимптотически простым*, если $c_{jk} \ne 1$ при всех $k \ne j$. Условие (41) означает, что все корни $p_j(x)$ отличаются при $x \to \infty$. В дальнейшем предполагается, что $q_k(x) \in C^2[a, \infty)$, $0 \le k \le n-1$. Рассмотрим два случая.

1. Корни одного порядка.

Утверждение 3. *Пусть $q_0(x) \neq 0$ при $x \gg 1$, все корни уравнения (36) асимптотически простые, и пусть $c_{jk} \neq 0$, $c_{jk} \neq 1$ при всех j, k, $j \neq k$. Тогда существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to\infty} q_k(x) q_0^{-1+k/n}(x) = a_k, 1 \le k \le n-1, \tag{42}$$

и асимптотика корней имеет вид

$$p_j(x) = [\lambda_j + o(1)] q_0^{1/n}(x),\ x \to \infty, \tag{43}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – корни уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + 1 = 0. \tag{44}$$

Условие (42) означает, что все члены $q_k(x)y^{(k)}$ уравнения (35) одинаково влияют при $x \gg 1$ на асимптотику решений.

Обратное утверждение также справедливо:

Утверждение 4. *Если асимптотика всех корней уравнения (36) имеет вид (43), где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – различные ненулевые числа, то пределы (42) существуют и конечны.*

Введём функции

$$l(x,p) = p^n + q_{n-1}(x)p^{n-1} + \ldots + q_0(x)\,, \tag{45}$$

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{p'_j(x)}{2}\,\frac{l''_{pp}(x, p_j(x))}{l'_p(x, p_j(x))}\,, \tag{46}$$

$$\varphi_{jk}(x) = p_j(x) - p_k(x) + p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)\,, \tag{47}$$

$$\widetilde{y}_j(x) = \exp\left(\int_a^x [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)]dt\right)\,, \tag{48}$$

где

$$l'_p(x,p_j(x)) = \frac{\partial l(x,p)}{\partial p}\Big|_{p=p_j(x)}, \; l''_{pp}(x,p_j(x)) = \frac{\partial^2 l(x,p)}{\partial p^2}\Big|_{p=p_j(x)}.$$

Утверждение 5. *Пусть выполнены условия (43) и*

1) уравнение (44) не имеет кратных корней;

2) при некотором j и при всех $k \neq j$ функции $Re\,\varphi_{jk}(x)$ не меняют знак при $x \gg 1$;

3) $\int^{\infty} \alpha(x)dx < \infty$, где

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (|q'_k|^2 |q_0|^{-2+(2k-1)/n} + |q''_k||q_0|^{-1+(k-1)/n}). \qquad (49)$$

Тогда уравнение (35) имеет такое решение $y_j(x)$, что

$$y_j(x) = \widetilde{y}_j(x)[1+o(1)],\; x \to \infty. \qquad (50)$$

Если условие 2) выполнено при всех j, то уравнение (35) имеет ФСР $\{y_1, \ldots, y_n\}$ вида (50).

Для уравнения

$$y'' \pm q(x)y = 0$$

условие 3) утверждения 4 принимает вид условия 2 из теоремы 4.

Утверждение 6. *Пусть выполнены условия 1) - 3) утверждения 4 и так же оценка*

4) $q'_k(x) = o(q_0^{1-(k-1)/n}(x)),\; x \to \infty,$

тогда при $0 \le m \le n$ имеем

$$y_j^{(m)}(x) = p_j^{(m)}(x)[1+o(1)],\; x \to \infty. \qquad (51)$$

2. Один из корней меньшего порядка роста.

Утверждение 7. *Пусть* $q_1(x) \neq 0$ *при* $x \gg 1$ *и*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p_n(x)}{p_k(x)} = 0,\ 1 \le k \le n-1, \tag{52}$$

а все остальные пределы (41) конечны, если $k \neq n$. *Тогда существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to\infty} q_k(x)[q_1(x)]^{(k-n)/(n-1)} = a_k,\ 0 \le k \le n-1, \tag{53}$$

где $a_0 = 0$, *и асимптотика корней уравнения (36) при* $x \to \infty$ *имеет вид*

$$p_k(x) = [\lambda_k + o(1)]q_1^{1/(n-1)}(x),\ 1 \le k \le n-1, \tag{54}$$

$$p_n(x) = \frac{-q_0(x) + o(q_0(x))}{q_1(x)}\,,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ *– корни уравнения*

$$\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \ldots + a_2\lambda + 1 = 0. \tag{55}$$

Условие (52) означает, что корень $p_n(x)$ является бесконечно малой величиной по сравнению с остальными корнями $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ при $x \to \infty$.

Утверждение 8. *Пусть справедливы равенства (54) и условия 1) и 2) для всех* j *утверждения 4, а так же*
3) $\int^{\infty} \left(|q_k'|^2|q_1|^{-2+(2k+1)/(n-1)} + |q_k''||q_1|^{-1+k/(n-1)}\right) dx < \infty$ *для всех* k.

Тогда уравнение (35) имеет ФСР $\{y_1, \ldots, y_n\}$*, для которых справедлива асимптотическая формула (50).*

Если ещё добавить условие $q_k'(x) = o(q_1^{(n+1-k)/(n-1)}(x))$ при $x \to \infty$ и при всех k, то для $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ справедлива формула (51).

5 Упражнения

5.1 Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение вида

$$y'' - xy = 0 \tag{56}$$

называется уравнением *Эйри*. Найдём главные асимптотики его решений при $x \to \pm\infty$.

Сравнивая его с (8), получим $p(x) = 0$ и $q(x) = -x$. Изначально, уравнение (56) не удовлетворяет условиям теорем 2, 3, A, B, C и D. Преобразуем его.

Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Применяем вторую замену Лиувилля (28)

$$s(x) = \int\limits_0^x \tau^{1/2} d\tau = \frac{2}{3} x^{3/2},$$

следовательно

$$x = \left(\frac{3s}{2}\right)^{2/3}$$

и уравнение (56) для функции $z(s) = y(x(s))$ приобретает вид

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{3s}\frac{dz}{ds} - z = 0.$$

Применяем к нему первую замену Лиувилля (26):

$$z(s) = u(s) \exp\left[-\frac{1}{6}\int\limits_1^s \tau^{-1} d\tau\right] = s^{-1/6} u(s),$$

получаем уравнение вида (22) на новую неизвестную функцию $u(s)$:

$$\frac{d^2u}{ds^2} - \left(1 - \frac{5}{36s^2}\right)u = 0.$$

Оно удовлетворяет условиям **теоремы 3**. Линейно независимые решения этого уравнения имеют асимптотические разложения:

$$u_1(s) = e^{-s}(1 + O(s^{-1})),\ u_2(s) = e^{s}(1 + O(s^{-1})) \text{ при } s \to +\infty.$$

Переходим обратно к переменной x и функции $y(x)$:

$$y_1 = x^{-1/4}\exp\left[-\frac{2}{3}x^{3/2}\right][1 + O(x^{-3/2})], \tag{57}$$

$$y_2 = x^{-1/4}\exp\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right][1 + O(x^{-3/2})] \text{ при } x \to +\infty. \tag{58}$$

В случае $x < 0$ сделаем замену $x = -t$ и получаем уравнение

$$y''_{tt} + ty = 0,\ t > 0. \tag{59}$$

Далее, поступаем как в предыдущем случае. Но можно обойтись и без преобразований Лиувилля, обратив внимание на то, что уравнение (59) удовлетворяет условиям **теоремы 4**. Найдём

$$S(t) = \int\limits_0^t \tau^{1/2} d\tau = \frac{2}{3}t^{3/2}$$

и, следовательно, имеются такие решения, что при $t \to +\infty$:

$$\widetilde{y}_{1,2} = t^{-1/4}\exp\left[\pm\frac{2i}{3}t^{3/2}\right][1 + O(t^{-3/2})]$$

или в вещественной форме и с переменной $x \to -\infty$:

$$y_3 = |x|^{-1/4}\left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + O(|x|^{-3/2})\right], \qquad (60)$$

$$y_4 = |x|^{-1/4}\left[\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + O(|x|^{-3/2})\right]. \qquad (61)$$

Решение, которому соответствует асимптотика (57), определяет функцию *Эйри*:

$$\mathrm{Ai(x)} = \frac{y_1(x)}{2\sqrt{\pi}}\,. \qquad (62)$$

Асимптотическое приближение функции Эйри при $x \to -\infty$ осциллирует:

$$\mathrm{Ai(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|x|^{-3/2})\right]. \qquad (63)$$

Эта функция часто встречается в задачах о распространении волн. Она описывает переходные процессы, например, переход от света к тени.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'' - (x^2 - a^2)y = 0,\ a \geq 0. \qquad (64)$$

Его решения называют *функциями Вебера-Эрмита* или *функциями параболического цилиндра.* Это уравнение возникает из уравнений Лапласа, Пуассона и других, когда используют метод разделения переменных для уравнений в частных производных второго порядка. Уравнения Лапласа и Пуассона фигурируют в задачах электромагнетизма, тепловых процессах, теории упругости и т.д.

Исследуем асимптотику решений при $x \to +\infty$. Функция $q(x) = x^2 - a^2$ удовлетворяет первому и второму условию теоремы 4. Пусть $x > 0$, тогда

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = x - \frac{a^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$q^{-1/4}(x) \sim x^{-1/2},\ S(x) = \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln x + o(1),\ x \to +\infty.$$

Для получения последних асимптотических оценок использовалось известное разложение из математического анализа:

$$(1+y)^m = 1 + my + \frac{m(m-1)y^2}{2!} + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)y^n}{n!} + o(y^n),\ |y| < 1. \qquad (65)$$

В нашем случае $y = a^2/x^2$ и $y \to 0$ при $x \to \infty$.

Из формулы (34) следуют главные асимптотики

$$y_1 \sim x^{-(a^2+1)/2} e^{x^2/2},\ y_2 \sim x^{(a^2+1)/2} e^{-x^2/2}. \qquad (66)$$

Пример 3. Выписать три члена асимптотики при $x \to \infty$ общего решения уравнения

$$2xy'' + 7y' + 2u = 0. \qquad (67)$$

Во избежании громоздких вычислений в начале применим второе преобразование Лиувилля:

$$s(x) = \int\limits^x |q(t)|^{1/2} dt = \int\limits^x \frac{dt}{t^{1/2}} = 2\sqrt{x},$$

тогда

$$y''_{ss} + \frac{6}{s}\,y'_s + y = 0.$$

После первого преобразования Лиувилля

$$y = z(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^{s} p(t)dt\right\} = z(s)\exp\left\{-3\int^{s}\frac{dt}{t}\right\} = z(s)s^{-3}$$

последнее уравнение изменится:

$$z''_{ss} + z\left(1 - \frac{6}{s^2}\right) = 0.$$

Оно удовлетворяет условиям **теоремы 2**. Согласно этой теореме одно решение ищем в виде

$$z_1(s) = e^{is}\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{-k}.$$

Положим $c_0 = 1$, тогда из системы (17) получим $c_1 = 3i$, $c_2 = -3$ и $c_k = 0$ при $k > 2$. Следовательно,

$$z_1 = e^{is}(1 + 3is^{-1} - 3s^{-2}).$$

Так как в уравнении функция $1 - 6/s^2$ вещественная, то коэффициенты $\widetilde{c}_k$ во втором решении

$$z_2(s) = e^{-is}\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k s^{-k}.$$

комплексно-сопряжены коэффициентам c_k:

$$z_2 = e^{-is}(1 - 3is^{-1} - 3s^{-2}).$$

Как видим, асимптотические ряды $z_{1,2}$ обрываются, следовательно, функции $z_{1,2}$ есть точные решения.

Возвращаемся к старым переменной x и функции $y(x)$:

$$y_{1,2} = x^{-3/2} e^{\pm 2i\sqrt{x}} \left(1 \pm \frac{3i}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{4x}\right).$$

Пример 4. Основное уравнение квантовой механики – уравнение Шрёдингера. В одномерном случае для одной частицы оно выглядит так

$$\hbar^2 \psi''_{rr} + 2m(\mathcal{E} - U(r))\psi(r) = 0,$$

где $\psi(r)$ – волновая функция, которая определяет состояния квантово-механической системы.

При условиях $\mathcal{E} > 0$, $\int^{\infty} |U(r)| dr < \infty$ согласно теореме B, имеются линейно независимые решения с асимптотиками

$$\psi_{1,2}(r) = e^{\pm ikr} + o(1),\ r \to \infty\,,$$

где $k = \sqrt{2m\mathcal{E}}/\hbar$.

Пример 5. Найти главную асимптотику при $x \to \infty$ уравнения

$$y'' - (1 + x^{-\alpha} \sin x) y = 0,\ 1/2 < \alpha \leq 1. \qquad (68)$$

Сравнивая с уравнением (12), получим $\varphi(x) = x^{-\alpha} \sin x$. Условие $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ справедливо:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \sin x = 0.$$

Оценка $\int^{\infty} |\varphi(x)|^n dx < \infty$ выполняется при $n = 2$:

$$\int^{\infty} |x^{-\alpha} \sin x|^2 dx \leq \int^{\infty} |x^{-2\alpha}| dx < \infty.$$

Следовательно, согласно теореме D:

$$y_{1,2} = \exp\left(\pm x \pm \frac{1}{2}\int^{x} t^{-\alpha}\sin t dt\right)[1+o(1)], \; x \to \infty.$$

Проинтегрировав два раза по частям, получим

$$\int^{x} t^{-\alpha}\sin t dt = -\frac{\cos x}{x^{\alpha}} - \frac{\alpha\sin x}{x^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int^{x}\frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}dt =$$

$$= -\frac{\cos x}{x^{\alpha}} + O(x^{-\alpha-1}), \; x \to \infty.$$

Следовательно,

$$y_{1,2} = \exp\left(\pm x \mp \frac{1}{2}x^{-\alpha}\cos x\right)[1+o(1)], \; x \to \infty.$$

Пример 6. Выписать несколько членов асимптотики при $x \to \infty$ решения уравнения

$$y'' + (x + \sin x)y = 0. \tag{69}$$

Уравнение удовлетворяет условиям теоремы 4. Здесь переход к другой переменной приведёт к громоздким рассчётам, ограничимся заменой неизвестной функции:

$$y(x) = z(x)q^{-1/4}(x)\exp\left(iS(x)\right), \; S(x) = \int_{1}^{x}\sqrt{q(t)}dt.$$

Для нашего уравнения:

$$y(x) = z(x)(x+\sin x)^{-1/4}\exp\left(i\int_{1}^{x}\sqrt{t+\sin t}\,dt\right).$$

Замена приводит к уравнению

$$z'' + p_1(x)z' + q_1(x)z = 0, \tag{70}$$

где

$$p_1(x) = 2i(x+\sin x)^{1/2} - \frac{1+\cos x}{2(x+\sin x)},$$

$$q_1(x) = \frac{5}{16}\frac{(1+\cos x)^2}{(x+\sin x)^2} + \frac{\sin x}{4(x+\sin x)}.$$

Разложим их в ряды при $x \to \infty$:

$$p_1(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} R_k(x)x^{-k/2},\ q_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(x)x^{-k},$$

где

$$R_{-1} = 2i,\ R_0 = 0,\ R_1 = i\sin x,\ R_2 = -\frac{1}{2}(1+\cos x),$$

$$R_3 = -\frac{i}{4}\sin^2 x, R_4 = \frac{1}{2}\sin x(1+\cos x),$$

$$R_5 = \frac{i}{8}\sin^3 x,\ R_6 = -\frac{1}{2}(1+\cos x)\sin^2 x, ...,$$

$$L_1 = \frac{1}{4}\sin x,\ L_2 = \frac{5}{16}(1+\cos x)^2 - \frac{1}{4}\sin^2 x,$$

$$L_3 = \frac{1}{4}\sin^3 x - \frac{5}{8}\sin x(1+\cos x)^2, ...$$

Чтобы понять почему получаются такие ряды, рассмотрим пример асимптотического разложения функции $(x + \sin x)^{1/2}$ из $p_1(x)$. Преобразуем её:

$$(x+\sin x)^{1/2} = x^{1/2}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^{1/2} = x^{1/2}\,(1+y)^{1/2}, \tag{71}$$

где $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Из свойства $|\sin x| \leq 1$ следует, что $y \to 0$ при $x \to \infty$. Значит, последовательность $\{y^n\}$, $n \in \mathbb{N}$ будет асимптотической при $y \to 0$ и формула (65) даст асимптотическое представление

$$(1+y)^{1/2} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + O(y^4),\ y \to 0.$$

Подставим в (71) и вернёмся к x:

$$(x+\sin x)^{1/2} = x^{1/2} + \frac{\sin x}{2} \cdot x^{-1/2} - \frac{\sin^2 x}{8} \cdot x^{-3/2} +$$
$$+ \frac{\sin^3 x}{16} \cdot x^{-7/2} + O(x^{-9/2}).$$

Асимптотическое разложение $z(x)$ будем искать в виде

$$z(x) \sim 1 + \sum_{k=3}^{\infty} g_k(x) x^{-k/2},\ x \to \infty.$$

Предполагаем, что $g_k(x)$ – ограниченные и периодические функции с периодом 2π. Подставляем все ряды в уравнение (70) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях. В результате получим систему уравнений на функции $g_k(x)$:

$$2ig_3' + \frac{1}{4}\sin x = 0,\ 2ig_4' + g_3'' = 0,$$

$$2i\left(g_5' - \frac{3}{2}g_3\right) + ig_3'\sin x + \frac{5}{16}(1+\cos x)^2 - \frac{1}{4}\sin^2 x + g_4'' = 0,$$

$$2i(g_6' - 2g_4) + ig_4'\sin x - \frac{1}{2}g_3'(1+\cos x) + \frac{1}{4}g_3\sin x + g_5'' - 3g_3' = 0,$$

. . . .

Первые два уравнения имеют периодические решения:

$$g_3 = -\frac{i}{8}\cos x + A_3,\; g_4 = -\frac{1}{16}\sin x + A_4.$$

Из третьего уравнения следует

$$g_5 = x\left(\frac{9i}{64} + \frac{3}{2}A_3\right) + i\left(\frac{1}{8}\sin x + \frac{11}{128}\sin 2x - \frac{1}{32}\cos x\right) + A_5.$$

Чтобы функция была ограничена при $x \to \infty$, необходимо положить

$$\frac{9i}{64} + \frac{3}{2}A_3 = 0,$$

что даёт

$$A_3 = -\frac{3i}{32}.$$

Таким образом находятся все ограниченные решения $g_k(x)$.

Асимптотическое разложение имеет вид:

$$y(x) = (x + \sin x)^{-1/4}\exp\left(i\int\limits_1^x \sqrt{t + \sin t}\,dt\right)\Bigg(1 - \frac{i\cos x}{8x^{3/2}} -$$

$$-\frac{3i}{32x^{3/2}} - \frac{\sin x}{16x^2} + i\frac{16\sin x + 11\sin 2x - 4\cos x}{128x^{5/2}} + \frac{i}{640x^{5/2}} + O(x^{-3})\Bigg).$$

Если сделать замену функции со знаком "-1" в экспоненте:

$$y(x) = z(x)q^{-1/4}(x)\exp\left(-iS(x)\right),$$

то получим асимптотическое разложение второго решения:

$$y(x) = (x + \sin x)^{-1/4}\exp\left(-i\int\limits_1^x \sqrt{t + \sin t}\,dt\right)\Bigg(1 + \frac{i\cos x}{8x^{3/2}} +$$

$$+\frac{3i}{32x^{3/2}} - \frac{\sin x}{16x^2} - i\frac{16\sin x + 11\sin 2x - 4\cos x}{128x^{5/2}} - \frac{i}{640x^{5/2}} + O(x^{-3})\Bigg).$$

5.2 Задачи для самостоятельного решения

Найти главную асимптотику при $x \to \infty$ линейно независимых решений уравнений:

1. $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$

2. $y'' + [1 + x^{-1}(1 + \sin x)]y = 0.$

3. $y'' + e^{2x} y = 0.$

4. $y''' + \left(4 + \dfrac{1}{x^2}\right) y'' + \left(1 + \dfrac{3}{x^{3/2}}\right) y' - \left(6 + \dfrac{1}{x^{5/2}}\right) y = 0.$

Выписать три члена асимптотики при $x \to \infty$ общего решения уравнения

5. $2xy'' + 5y' - 2u = 0.$

6. $y'' - (x^6 + 4x^5)y = 0.$

7. $y'' + (4x^2 + x^4)y = 0.$

8. $y'' + 2 \operatorname{sh} 2x \cdot y = 0.$

5.3 Ответы

1. $y_{1,2} = \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}}(1 + O(x^{-1}))$, $x \to \infty$.

2. $y_{1,2} = \exp\left(\pm i[x + \ln x]\right)[1 + o(1)]$, $x \to \infty$. Указание: теорема С.

3. $y_1 = e^{-x/2}(\cos e^x + O(e^{-x}))$, $y_2 = e^{-x/2}(\sin e^x + O(e^{-x}))$.

4. $y_1 = e^x(1+o(1))$, $y_2 = e^{-2x}(1+o(1))$, $y_3 = e^{-3x}(1+o(1))$.

5. $y_{1,2} = x^{-1}e^{\pm 2\sqrt{x}}\left(1 \mp \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

6. $y_1 = x^{-\frac{23}{2}}\exp\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-x^2+4x\right)\left(1 - \frac{29}{x} + \frac{929}{2x^2} + O(x^{-3})\right)$,
$y_2 = x^{\frac{17}{2}}\exp\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2-4x\right)\left(1 + \frac{27}{x} + \frac{649}{2x^2} + O(x^{-3})\right)$.
Указание: сделать только замену функции $y(x) = z(x)q^{-1/4}(x)\exp\left(\pm S(x)\right)$, $S(x) = \int\limits_a^x \sqrt{q(t)}dt$ и асимптотическое разложение $z(x)$ искать в виде $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^{-k}$.

7. $y_{1,2} = x^{-1}\exp\left[\pm i\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\right]\left(1 \pm \frac{2i}{x} - \frac{3}{x^2} + O(x^{-3})\right)$.

8. $y_{1,2} = \exp\left(\pm ie^x - \frac{x}{2}\right)\left(1 \mp \frac{ie^{-x}}{8} - \frac{9e^{-2x}}{128} + O(e^{-3x})\right)$.
Указание: сделать замену $s = e^x$, а затем совершить первую замену Лиувилля и применить теорему 2.

Литература

[1] Даишев Р.А. Дифференциальные уравнения / Р.А. Даишев, А.Ю. Даньшин – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 150 с.

[2] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 54 с.

[3] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 58 с.

[4] Мухарлямов Р.К. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КФУ, 2013. – 30 с.

[5] Егоров А. И. Дифференциальные уравнения для инженерных направлений / А. И. Егоров Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: КФУ, 2013. – 52 с.

[6] Эрдейи А. Асимптотические разложения / А. Эрдейи – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.

[7] Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды / М.В. Федорюк – М.: Либроком, 2015. – 544 с.

[8] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк – М.: Либроком, 2009. – 352 с.

[9] Ильин А.М., Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 248 с.

[10] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман – М.: И*Л, 1954. – 215 с.

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Часть I

Учебно-методическое пособие

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригинал-макетом

Подписано в печать 03.06.2016.
Форм. 60×84 1/16. Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая.
Печ. л 3.0. Тираж 50. Заказ 134.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КФУ
420012, Казань, ул. Бутлерова 4
Тел. 291-13-88, 291-13-47