Математические заметки

Том 98 выпуск 3 сентябрь 2015

УДК 517.983+517.986

К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Пусть $\mathscr{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, $L_1(\mathscr{M},\tau)$ – банахово пространство τ-интегрируемых операторов. Получены следующие результаты.

Если $X = X^*$, $Y = Y^*$ – τ-измеримые операторы и $XY \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $YX \in L_1(\mathscr{M},\tau)$ и $\tau(XY) = \tau(YX) \in \mathbb{R}$. В частности, если $X, Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$ и $XY \in \mathfrak{S}_1$, то $YX \in \mathfrak{S}_1$ и $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) \in \mathbb{R}$. Если $X \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$.

Пусть A – τ-измеримый оператор. Если оператор A τ-компактен и $V \in \mathscr{M}$ является сжатием, то из $V^*AV = A$ следует, что $VA = AV$. Имеем $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*||A|$. Это представление является новым и для ограниченных идемпотентов в $\mathscr{H}$. Если $A = A^2 \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $\tau(A) = \tau(\sqrt{|A|}\,|A^*|\sqrt{|A|}) \in \mathbb{R}^+$. Если $A = A^2$ и A (или A^*) полу-гипонормален, то A нормален; тем самым, A является проектором. Если $A = A^3$ и A гипонормален или когипонормален, то A нормален; тем самым, $A = A^* \in \mathscr{M}$ и является разностью двух взаимно ортогональных проекторов $(A + A^2)/2$, $(A^2 - A)/2$. Если $A, A^2 \in L_1(\mathscr{M},\tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10638

Введение. Пусть $\mathscr{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, $L_1(\mathscr{M},\tau)$ – банахово пространство τ-интегрируемых операторов. В работе получены следующие результаты об алгебраических и порядковых свойствах следа τ и элементов $*$-алгебры $\widetilde{\mathscr{M}}$ всех τ-измеримых операторов.

Если $X, Y \in \widetilde{\mathscr{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $XY \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то

$$YX \in L_1(\mathscr{M},\tau) \qquad \text{и} \qquad \tau(XY) = \tau(YX) \in \mathbb{R}$$

(теорема 2.1). В частности, если $X, Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$ и $XY \in \mathfrak{S}_1$, то

$$YX \in \mathfrak{S}_1 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) \in \mathbb{R}.$$

Если $X \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то

$$\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$$