ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 466, № 2, с. 137–140

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983:517.986

СЛЕД И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

© 2016 г. А. М. Бикчентаев

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 01.07.2015 г.
Поступило 24.07.2015 г.

Установлены новые свойства пространства интегрируемых (относительно точного нормального полуконечного следа) операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. Получено следовое неравенство для пары проекторов из алгебры фон Неймана, которое характеризует след в классе всех положительных нормальных функционалов на этой алгебре. Установлены новые свойства измеримого идемпотента. Получена полезная факторизация такого оператора; с ее помощью доказана неотрицательность следа от интегрируемого идемпотента. Показано, что если разность двух измеримых идемпотентов является положительным оператором, то эта разность есть проектор. Доказано, что полу-гипонормальный измеримый идемпотент является проектором. Показано, что гипонормальный измеримый трипотент является разностью двух ортогональных проекторов.

DOI: 10.7868/S0869565216020043

Настоящая работа продолжает исследования автора, начатые в статьях [1–3], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В разделе 2 установлены новые свойства пространства $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ интегрируемых (относительно следа τ) операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Показано, что если A – гипонормальный и B – когипонормальный τ-измеримые операторы и $AB \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $BA \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|BA\|_1 \le \|AB\|_1$, при этом $\tau(AB) = \tau(BA)$ и для самосопряженных A, B имеем $\tau(AB) = \tau(BA) \in \mathbb{R}$. Доказано, что если $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(A^*) = \overline{\tau(A)}$. Получено следовое неравенство для пары проекторов из $\mathcal{M}$, которое характеризует след в классе всех положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$.

В разделе 3 установлены новые свойства τ-измеримого идемпотента ($A = A^2$). Получена полезная факторизация такого оператора; с ее помощью для идемпотента $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ установлено, что $\tau(A) \in \mathbb{R}^+$. Поэтому если $A, A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$. Показано, что если разность двух τ-измеримых идемпотентов является положительным оператором, то эта разность есть проектор. Доказано, что полу-гипонормальный τ-измеримый идемпотент является проектором. Показано, что гипонормальный τ-измеримый трипотент ($A = A^3$) является разностью двух ортогональных проекторов.

*Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
E-mail: airat.bikchentaev@kpfu.ru*

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ – решетка проекторов в $\mathcal{M}$, I – единица $\mathcal{M}$, $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Если $P, Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, то проектор $P \wedge Q$ определяется равенством $(P \wedge Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$, а $P \vee Q = (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})^{\perp}$ проектирует на $\overline{\mathrm{Lin}(P\mathcal{H} \cup Q\mathcal{H})}$.

Отображение $\varphi\colon \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется следом, если $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$, для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \ge 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется точным, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \ne 0$; полуконечным, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y)\colon Y \in \mathcal{M}^+, Y \le X, \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$; нормальным, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup\varphi(X_i)$. Для следа φ определим $\mathfrak{M}_{\varphi}^+ = \{X \in \mathcal{M}^+\colon \varphi(X) < +\infty\}$ и $\mathfrak{M}_{\varphi} = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{M}_{\varphi}^+$. Ограничение $\varphi \mid \mathfrak{M}_{\varphi}^+$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_{\varphi}$, который будем обозначать той же буквой φ.

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Самосопряженный оператор присоединен к $\mathcal{M}$ тогда и только тогда,