Е. К. Липачёв

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
elipachev@gmail.com

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕЙВЛЕТАМИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

Рассеяние электромагнитной волны идеально проводящей периодической структурой в случае TM–поляризации моделируется краевой задачей для уравнения Гельмгольца $\Delta u\,(x,y)\;+\;k^2 u\,(x,y)\;=\;0$, с условием Неймана на границе $\{(x,f(x))|f(x+d)=f(x)\}$: $\partial_{\vec{n}} u\,(x,f(x))=g(x)$, условий излучения парциального типа, гарантирующим отсутствие приходящих из бесконечности волн, а также условия квазипериодичности $u(x+d,y)=exp\,(i\alpha d)\,u(x,y)$, $\alpha=ksin\theta$ (θ – угол падения волны).

В пространстве квазипериодических функций поставленная краевая задача однозначно разрешима и решение представимо в виде

$$u\,(x,y)=V\rho\,(x)\equiv\int G\,(k;x,y,\tau)\rho\,(\tau)\,d\ell_\tau,$$

где интеграл рассматривается на одном периоде, а плотность $\rho(x)$ определяется из интегрального уравнения

$$K\rho\equiv\frac{1}{2}\rho(x)+T\rho(x)=g(x),\;x\in[0,d],$$

$$(T\rho)\,(x)=\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{(x,f(x))}}\,[V\rho]\,(x,f\,(x))\,,$$

$$G\,(k;x,y,\tau)=\frac{i}{2d}\sum_{n\in\mathrm{Z}}\frac{1}{\beta_n}exp\,[i\alpha_n\,(x-\tau)+i\beta_n|y-f\,(\tau)\,|]\,,$$

$\alpha_n = \alpha + \frac{2\pi n}{d}$, $\beta_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$ (ветвь корня выбрана так, что $Im\beta_n \geqslant 0$).

Алгоритм приближенного решения краевой задачи основан на приближении вейвлетами решения интегрального уравнения. В качестве масштабирующей функции при построении кратномасштабного анализа используются B–сплайны φ порядков 1 и 2. С помощью процесса периодизации образуются базисы $\{\tilde{\varphi}_{pq}\}$, $\left\{\tilde{\psi}_{pq}\right\}$ пространства $L^2[0,d]$ и цепочка конечномерных пространств

$$\tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \cdots \subset \tilde{V}_i \subset \cdots, \quad dim\tilde{V}_i = 2^i, \quad \tilde{V}_{i+1} = \tilde{V}_i \oplus \tilde{W}_i.$$

В качестве аппроксимирующих пространств в алгоритме приближенного решения выбираются пространства

$$X_n \equiv \tilde{V}_n = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{W}_n$$

и приближенное решение ρ_n интегрального уравнения ищется в виде

$$\rho_n(x) = a_0\tilde{\varphi}_{00}(x) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{q=0}^{2^i-1} b_{iq}\tilde{\psi}_{iq}(x),$$

где коэффициенты a_{00}, b_{iq} $(i = 0,\ldots,n; q = 0,\ldots,2^{i-1})$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений метода Галеркина.

Теорема. *Приближенное решение $\rho_n(x)$ при $n \to \infty$ сходится к точному решению $\rho(x)$ интегрального уравнения краевой задачи рассеяния и справедлива оценка*

$$\|\rho - \rho_n\|_{L^2} \leqslant C2^{-n}\left(\|\rho\|_{L^2} + \|g\|_{H^1}\right),$$

где C – константа, не зависящая от n.