

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА 3D ПУЧКОВ БМЗ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЛАЗМЕ ИОНОСФЕРЫ И МАГНИТОСФЕРЫ

© 2016 г. В. Ю. Белашов^{1,2*}, Е. С. Белашова³

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

²Казанский государственный энергетический университет, г. Казань

³Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, г. Казань

*e-mail: vybelashov@yahoo.com

Поступила в редакцию 05.01.2016 г.

После доработки 05.03.2016 г.

На основе модели (трехмерного (3D) обобщенного уравнения Кадомцева–Петвиашвили) для магнитного поля $h = B_-/B$ изучается формирование, устойчивость и динамика 3D солитоноподобных структур типа пучков быстрых магнитозвуковых (БМЗ) волн, формирующихся в ионосферной и магнитосферной плазме на низкочастотной ветви колебаний в случаях, когда $\beta \equiv 4\pi n T/B^2 \ll 1$ и $\beta > 1$. Рассмотрение ведется с учетом высшей дисперсионной поправки, определяемой значениями плазменных параметров и угла $\theta = (\mathbf{V}, \mathbf{k})$, которая играет определяющую роль при распространении пучка БМЗ под углами к магнитному полю, близкими к $\pi/2$. При изучении устойчивости неоднородных решений используется метод исследования ограниченности гамильтониана при его деформациях на основе решения соответствующей вариационной задачи. При изучении эволюции и динамики 3D БМЗ волнового пучка уравнения интегрировались численно с использованием специально разработанных методов. Полученные результаты могут быть интерпретированы в терминах явления самофокусировки, как формирование стационарного пучка, рассеяние и самофокусировка уединенного пучка БМЗ волн. Для всех этих случаев детально следовались все стадии эволюции 3D пучков БМЗ волн в ионосферной и магнитосферной плазме.

DOI: 10.7868/S0016794016060043

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе изучается формирование, структура, устойчивость и динамика неоднородных (двумерных – 2D и трехмерных – 3D) солитоноподобных структур, формирующихся на низкочастотной ветви колебаний в ионосферной и магнитосферной плазме для случаев, когда $\beta \equiv 4\pi n T/B^2 \ll 1$ и $\beta > 1$. Такие процессы описываются уравнением [Belashov, 2014]

$$\partial_t u + \hat{A}(t, u)u = f, \quad f = \kappa \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} u dx, \quad (1)$$

$$\Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2,$$

которое отвечает закону дисперсии в предельном случае длинных волн [Карпман, 1973]:

$$\omega_{1,2} = \frac{v_A k}{2\sqrt{1 + k^2 c^2/\omega_{pe}^2}} \times \left\{ \left[(1 + \cos \theta)^2 + \frac{k^2 c^2}{\omega_{pi}^2} \frac{\cos^2 \theta}{1 + k^2 c^2/\omega_{pe}^2} \right]^{1/2} \pm \left[(1 - \cos \theta)^2 + \frac{k^2 c^2}{\omega_{pi}^2} \frac{\cos^2 \theta}{1 + k^2 c^2/\omega_{pe}^2} \right]^{1/2} \right\}$$

($\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2/m)^{1/2}$ и $\omega_{pi} = (4\pi n_i e^2/M)^{1/2}$ – соответственно электронная и ионная плазменные частоты, $v_A = B^2/4\pi n_i M$ – альвеновская скорость, M – масса иона, θ – угол между направлением волнового вектора и магнитным полем \mathbf{V}) и, в зависимости от вида дифференциального оператора \hat{A} , будет описывать продольно и поперечно распространяющиеся по отношению к внешнему магнитному полю волны. Случай, когда в

дисперсионном соотношении реализуется нижний знак (альвеновская мода), был детально исследован нами в работе [Belashov, 2015], здесь же нас будет интересовать случай знака “плюс”, когда оператор \hat{A} имеет вид:

$$\hat{A}(t, u) = \alpha u \partial_x - \partial_x^2 (v - \gamma_1 \partial_x - \gamma_2 \partial_x^3), \quad (2)$$

и уравнение (1) представляет собой обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) (уравнение класса БК – Белашова–Карпмана [Karman, 1991; Belashov, 2005]), и в случае, когда $\beta \equiv 4\pi n T / B^2 \ll 1$ при $\omega < \omega_{Bi} = eB / Mc$ (где ω_{Bi} – ионно-циклотронная частота), $|\mathbf{k}| r_D \ll 1$, описывает распространение быстрых магнитозвуковых (БМЗ) волн в замагниченной плазме при $k_x^2 \gg \mathbf{k}_\perp^2$, $v_x \ll v_A$ вблизи конуса углов по отношению к магнитному полю \mathbf{B} (которое предполагается однородным) $\theta = \arctg(M/m)^{1/2}$ [Belashov, 1994]. В этом случае функция u имеет смысл безразмерной амплитуды магнитного поля волны, $h = B_- / B$, коэффициенты при членах, описывающих нелинейные, диссипативные и дисперсионные эффекты, определяются параметрами плазмы и углом $\theta = (\mathbf{B}, \mathbf{k})$.

Уравнения (1), (2) не могут быть проинтегрированы аналитически. Поэтому для исследования устойчивости неоднородных решений мы будем использовать подход, развитый в [Белашов, 1991] и исследовать ограниченность гамильтониана уравнений (1), (2) при его деформациях, сохраняющих импульс системы, решая соответствующую вариационную задачу. При аналитическом исследовании данной системы мы также будем выполнять асимптотический анализ неоднородных решений. Для изучения эволюции 3D решений, включая распространение 3D пучка БМЗ волн в замагниченной плазме, уравнения интегрировались численно с использованием специально разработанных методов и кодов, детально описанных в работе [Belashov, 2005]. Ниже эти задачи будут рассмотрены для системы уравнений (1), (2).

2. УСТОЙЧИВОСТЬ И АСИМПТОТИКИ 2D И 3D РЕШЕНИЙ

Задача устойчивости уединенных волновых решений для моделей КП и БК остается до настоящего времени весьма актуальной и широко обсуждается в многочисленной литературе по теории солитонов (см., например, [Belashov, 2005; Liu, 1997; Pava, 2009; Esfahani, 2011]). Что касается бездиссипативного уравнения БК, она ранее уже была решена аналитически [Белашов, 1991], и здесь, при исследовании устойчивости решений уравнений (1), (2) с $v = 0$ мы будем следовать тех-

нике, развитой в указанной выше работе, в контексте обсуждаемой здесь задачи. Выполним преобразование координат и перепишем уравнения (1), (2) с $v = 0$ в гамильтоновском виде:

$$\partial_t u = \partial_x (\delta H / \delta u), \quad (3)$$

где

$$H = \int \left[-\frac{\varepsilon}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\lambda}{2} (\partial_x^2 u)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_\perp \partial_x v)^2 - u^3 \right] d\mathbf{r}, \quad (4)$$

$\partial_x^2 v = u$, $\varepsilon = \gamma_1 |\gamma_2|^{-1/2}$, $\lambda = \text{sign} \gamma_2$. Стационарные решения уравнения (3) определяются из вариационной задачи $\delta(H + v P_x) = 0$ ($P_x = \frac{1}{2} \int u^2 d\mathbf{r}$ – проекция импульса системы на ось x , v имеет смысл множителя Лагранжа), иллюстрирующей тот факт, что все финитные решения уравнения (3) есть стационарные точки гамильтониана (4) при фиксированном P_x . В соответствии с теоремой Ляпунова, стационарные точки динамической системы, реализующие максимум или минимум гамильтониана, являются абсолютно устойчивыми; если экстремум локальный, тогда возможны локально устойчивые решения. Неустойчивые состояния отвечают монотонной зависимости гамильтониана от его переменных, т.е. случаю, когда стационарная точка является седловой. Таким образом, необходимо доказать ограниченность гамильтониана (снизу) при фиксированном P_x . Рассмотрим в действительном векторном пространстве \mathbf{R} масштабные трансформации [Белашов, 2014] $u(x, \mathbf{r}_\perp) \rightarrow \zeta^{-1/2} \eta^{(1-d)/2} u(x/\zeta, \mathbf{r}_\perp/\eta)$ (где d – размерность задачи, а $\zeta, \eta \in \mathbf{R}$), сохраняющие проекцию импульса P_x . Гамильтониан, как функция параметров ζ, η , примет вид:

$$H(\zeta, \eta) = a \zeta^{-2} + b \zeta^2 \eta^{-2} - c \zeta^{-1/2} \eta^{(1-d)/2} + e \zeta^{-4}, \quad (5)$$

где $a = -(\varepsilon/2) \int (\partial_x u)^2 d\mathbf{r}$, $b = (1/2) \int (\nabla_\perp \partial_x v)^2 d\mathbf{r}$, $c = \int u^3 d\mathbf{r}$, $e = (\lambda/2) \int (\partial_x^2 u)^2 d\mathbf{r}$. Необходимые условия наличия экстремума определяются системой уравнений: $\partial_\zeta H = 0$, $\partial_\eta H = 0$, достаточные условия минимума гамильтониана есть система неравенств:

$$\begin{vmatrix} \partial_\zeta^2 H(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\zeta\eta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) \\ \partial_{\eta\zeta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) & \partial_\eta^2 H(\zeta_i, \eta_j) \end{vmatrix} > 0, \quad \partial_\zeta^2 H(\zeta_i, \eta_j) > 0.$$

Решая совместно эти уравнения и неравенства, имеем следующие результаты (см. рис. 1). В 3D случае ($d = 3$ в уравнениях) получаем, что при $\lambda = 1$, $\varepsilon > 0$ имеют место абсолютно устойчивые 3D решения, а при $\lambda = 1$, $\varepsilon \leq 0$ могут наблюдаться локально устойчивые решения, когда выполняет-

ся условие $ab^2 e/c^4 < 9/512$ на интегральные коэффициенты гамильтониана (5). Таким образом мы легко доказали возможность существования в модели БК абсолютно и локально устойчивых решений и нашли условия устойчивости для 3D солитонных решений. Интересно отметить, что уравнение БК, учитывающее, в отличие от обычного уравнения КП, дисперсионную поправку следующего порядка, имеет устойчивые 3D решения, чего в модели КП нет [Кузнецов, 1986]. Используемый здесь подход в приложении к задаче распространения пучка БМЗ волн в замагниченной плазме (см. следующий раздел) позволяет нам доказать, например, что 3D пучок, распространяющийся под углом θ к магнитному полю, не фокусируется и становится стационарным и устойчивым в конусе углов $\theta < \arctg(M/m)^{1/2}$, когда выполняется условие [Белашов, 2014]

$$(m/M - \text{ctg}^2\theta)^2 [\text{ctg}^4\theta(1 + \text{ctg}^2\theta)]^{-1} > 4/3.$$

Анализ асимптотик возможных решений уравнений (1), (2) показывает, что при $\gamma_2 > 0$ и $\gamma_1 = \pm 1$ асимптотики решений в терминах $w = u(x, |\mathbf{r}_\perp|, t)/V$ определяются следующим образом:

(а) когда скорость волны, распространяющейся вдоль оси x , $V > 0$ и $\gamma_1 = -1$, и когда $V < 0$, $\gamma_1 = -1$ (соответственно верхний и нижний знаки):

$$w = A_1 \exp\left\{ (2\gamma_2)^{-1/2} \left[C^2 + \sqrt{C^4 \pm 4\gamma_2} \right]^{1/2} \chi \right\}; \quad (6)$$

(б) когда $V < 0$, $\gamma_1 = 1$:

$$w = A_2 \exp\left\{ (2C^{-1}\gamma_2^{-1/2})^{-1} (2C^{-2}\gamma_2^{1/2} - 1)^{1/2} \chi \right\} \times \cos\left\{ (2C^{-1}\gamma_2^{-1/2})^{-1} (2C^{-2}\gamma_2^{1/2} + 1) \chi + \Theta \right\}, \quad (7)$$

где A_1, A_2 и Θ произвольные постоянные, $C = |V|^{-1/4}$ и $\chi = x + |\mathbf{r}_\perp| + (\kappa - V)t$.

Как можно видеть из выражений (6) и (7), уравнения (1), (2) с $v = 0$ в зависимости от знаков V и γ_1 могут иметь солитонные решения $u(x, |\mathbf{r}_\perp|, t)$ как с монотонными, так и с осциллирующими асимптотиками. Отметим также, что при $\gamma_1 = 0$ и любых $\gamma_2 > 0$ решения будут иметь вид $w = (A_1 + A_2\chi/C) \exp(\chi/\gamma_2^{1/4} C)$ и, следовательно, также представляют собой солитоны с монотонными асимптотиками [Karpman, 1991].

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ БМЗ ВОЛН В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Напомним, что в замагниченной плазме при $\beta \equiv 4\pi nT/B^2 \ll 1$ в области частот $\omega < \omega_{Bi} =$

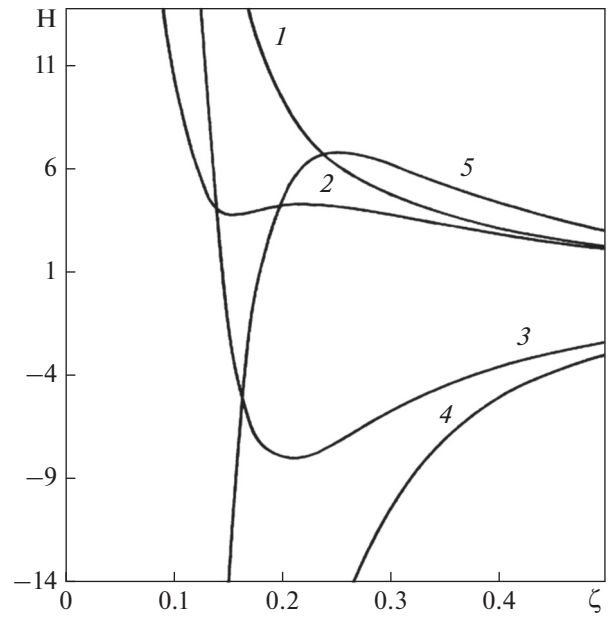


Рис. 1. Изменение $H(\zeta, \eta)$ при $d = 3$ для различных значений интегральных коэффициентов вдоль линий $\eta = (2b/c)\zeta^{5/2}$ при: (1) $a = 1.0, b = 1.0, c = 1.0, e = 0.025$; (2) $a = 1.0, b = 1.0, c = 1.0, e = 0.017$; (3) $a = -0.5, b = 1.0, c = 0.5, e = 0.02$; (4) $a = -0.5, b = 1.0, c = 0.5, e = -0.02$; (5) $a = 1.0, b = 1.0, c = 0.5, e = -0.02$.

$= eB/Mc$ могут распространяться БМЗ волны, а в уравнениях (1)–(5), с физической точки зрения, функция u есть безразмерная амплитуда магнитного поля волны: $h = B_-/B$. Соотношение дисперсии при $|\mathbf{k}|r_D \ll 1$, $k_x^2 \gg k_\perp^2$ и $v_x \ll v_A$ будет иметь вид

$$\omega \approx v_A k_x \left(1 + \mathbf{k}_\perp^2/k_x^2 + \chi(\theta) D^2 k_x^2 \right), \quad (8)$$

где \mathbf{k}_\perp – поперечная (по отношению к направлению распространения волны) компонента волнового вектора, v_x – x -компонента ионной скорости, D – длина дисперсии, а θ – угол между компонентой волнового вектора \mathbf{k}_x и внешним магнитным полем \mathbf{B} . Напомним также, что термин “слабая дисперсия” означает, что основным нелинейным процессом является трехволновое взаимодействие волн малой амплитуды; условие слабой нелинейности определяет малый угол между взаимодействующими волнами. При достаточно высокой ионной температуре, $\beta > m/M$, длина дисперсии в (8) определяется выражением [Belashov, 1994]

$$\chi(\theta) D^2 = \frac{c^2}{2\omega_{pi}^2} \text{ctg}^2\theta - \frac{1}{2} \rho_i^2 \left(3 - \frac{11}{4} \sin^2\theta \right), \quad (9)$$

где $\rho_i = v_{Ti}/\omega_{Bi}$ – ионный ларморовский радиус. При таком типе процесса плазма квазинейтральна, поскольку $\omega \ll \omega_{pi} = (4\pi n_i e^2/M)^{1/2}$. Из (9) можно видеть, что дисперсия положительна (фазовая скорость растет с ростом $|\mathbf{k}|$) за исключением областей углов вблизи $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Для близкого к поперечному по отношению к магнитному полю \mathbf{B} распространения, когда $|\pi/2 - \theta| \leq (\beta/4)^{1/2}$, дисперсия отрицательна и определяется эффектами, связанными с конечностью ρ_i . Известно, что для описания распространения БМЗ волны малой амплитуды с узким угловым распределением может быть использовано уравнение КП [(1), (2) при $v = \gamma_2 = 0$] [Манин, 1983]. При этом, для таких углов, когда дисперсия для малых $|\mathbf{k}|$ положительна (при достаточно высокой температуре ионов), 3D волновой пакет БМЗ в плазме с $\beta > m/M$ не формирует устойчивых стационарных решений и расплывается для углов $|\pi/2 - \theta| < (m/M)^{1/2}$ или коллапсирует вне этого конуса [Кузнецов, 1986] (заметим здесь, что иногда, в другой терминологии, подобное явление определяется, как “самосжатие” волн [Tsytovich, 1995]). В последнем случае, когда достаточно интенсивный пучок БМЗ волн ограничен в \mathbf{k}_\perp -направлении, может наблюдаться явление самофокусировки [Belashov, 2005]. Впервые такая задача была решена в работе [Манин, 1983] путем усреднения исходных уравнений и последующего численного их решения. Однако, соотношение (9) уже не будет справедливым для углов $\theta < (kc/\omega_{pi})^{1/2}$, где имеет место интенсивная перестройка механизма дисперсии колебаний. При $\beta < m/M$ дисперсия может быть определена для любого угла θ из гидродинамических уравнений, и структура БМЗ волны в этом случае будет зависеть от знака дисперсионного коэффициента

$$\gamma_1 = -v_A \chi(\theta) D^2 = v_A \frac{c^2}{2\omega_{pi}^2} \left(\frac{m}{M} - \text{ctg}^2 \theta \right),$$

который определяется углом θ , а именно: для близкого к поперечному распространения дисперсия отрицательна, если $|\pi/2 - \theta| \leq (m/M)^{1/2}$, и она положительна для всех остальных углов. При этом уравнение КП также может быть использовано, и для достаточно интенсивного пучка БМЗ волн, ограниченного в \mathbf{k}_\perp -направлении, можно ожидать самофокусировки пучка, распространяющегося под такими углами θ к магнитному полю такими, где дисперсия положительна [Захаров, 2012].

В обоих случаях, $\beta > m/M$ и $\beta < m/M$, необходимо учитывать, что вблизи конуса углов, где дис-

персия меняет знак, $\gamma_1 \rightarrow 0$. Разумеется, это вовсе не означает, что в этой области дисперсия исчезает, просто здесь описание, основанное модели уравнения КП в его стандартном виде, становится не верным. Вблизи конуса $|\pi/2 - \theta| \leq (\beta/4)^{1/2}$, где $\gamma_1 \rightarrow 0$ при $\beta > m/M$, результаты [Манин, 1983] нуждаются в уточнении, а то и пересмотре. Например, соотношение (8) должно быть дополнено дисперсионным членом следующего порядка, который здесь будет играть важную роль [Belashov, 2005]. Аналогичная ситуация имеет место при $\beta < m/M$ вблизи конуса углов $\theta = \text{arctg}(M/m)^{1/2}$. В обоих случаях соотношение дисперсии принимает вид $\omega \approx v_A k_x \left[1 + \mathbf{k}_\perp^2 / 2k_x^2 + c_0^{-1} (-\gamma_1 k_x^2 + \gamma_2 k_x^4) \right]$. Дисперсионная поправка следующего порядка может быть получена из разложения полного дисперсионного уравнения в ряд Тэйлора по k [Belashov, 2005]. В случае $\beta < m/M$, рассматриваемом детально ниже, имеем:

$$\gamma_2 = v_A \frac{c^4}{8\omega_{pi}^4} \left[3 \left(\frac{m}{M} - \text{ctg}^2 \theta \right)^2 - 4 \text{ctg}^4 \theta (1 + \text{ctg}^2 \theta) \right].$$

Таким образом, характер дисперсии становится существенно более сложным и определяется уже соотношением знаков коэффициентов γ_1 и γ_2 (см. рис. 2). При $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 < 0$ имеет место отрицательная дисперсия (область В на рис. 2), тогда как при $\gamma_{1,2} > 0$ (область А) и $\gamma_{1,2} < 0$ (область С) – “смешанная” дисперсия (знак дисперсии различен для малых и больших k). В этом случае распространение БМЗ волн малой амплитуды с узким угловым распределением будет уже описываться уравнением БК [Karpman, 1991], которое для бездиссипативного случая имеет вид [Belashov, 2014; Белашов, 2014]:

$$\partial_x \left(\partial_t h + \alpha h \partial_x h + \gamma_1 \partial_x^3 h + \gamma_2 \partial_x^5 h \right) = -(v_A/2) \Delta_\perp h, \quad (10)$$

где $\alpha = (3/2)v_A \sin \theta$. Здесь нелинейный член $\alpha h \partial_x h$ является следствием ренормализации скорости звука и отражает малую вероятность других нелинейных процессов, обусловленных векторной нелинейностью. В отличие от уравнения КП, 3D решения уравнения (10) имеют более сложную структуру и динамику, что определяется соотношением величин и знаков дисперсионных коэффициентов γ_1 и γ_2 . Так, мы установили, что в случае $\beta < m/M$, в отличие от случая $\beta > m/M$, рассмотренного в [Манин, 1983], 3D пучок БМЗ волн, распространяющийся в плазме под углом θ к внешнему магнитному полю, не самофокусируется и становится стационарным и устойчивым в

конусе углов $\theta < \arctg(M/m)^{1/2}$, когда выполняется условие

$$\left(\frac{m}{M} - \text{ctg}^2\theta\right)^2 \left[\text{ctg}^4\theta(1 + \text{ctg}^2\theta)\right]^{-1} > 4/3,$$

т.е. когда $\gamma_{1,2} > 0$ в (10). Данное заключение подтверждается нашими аналитическими (см. предыдущий раздел) и численными [Кагрман, 1991] результатами для 3D уединенных волновых структур, распространяющихся в слабо диспергирующих средах, где присутствие в уравнении БК высшей дисперсионной поправки (в отличие от уравнения КП) останавливает волновой коллапс на начальной стадии развития самофокусировочной неустойчивости. Этот результат принципиально важен, поскольку до появления работ [Кагрман, 1991; Белашов, 1991] ни аналитически, ни численно не было обнаружено 3D устойчивых волновых структур типа 3D солитонов. Именно учет дисперсионных эффектов высшего порядка позволил нам найти 3D устойчивые солитонные решения в модели уравнения БК, в отличие от результатов для стандартной модели уравнения КП [Захаров, 2012].

Для изучения динамики пучка БМЗ волн, имеющего узкое угловое распределение, нами решалась граничная задача (в отличие от [Кагрман, 1991], где рассматривалась задача Коши). При этом мы численно интегрировали соответствующее уравнение, поскольку точные аналитические решения уравнения БК, даже для бездиссипативного случая, в настоящее время не известны.

Рассмотрим задачу моделирования динамики пучка БМЗ волн в замагниченной плазме. Пусть имеется 3D пучок БМЗ, распространяющийся в плазме под углом θ к внешнему магнитному полю вблизи конуса углов $\theta = \arctg(M/m)^{1/2}$. Используя замены $x \rightarrow -st$, $y \rightarrow -s\kappa^{1/2}y$, $z \rightarrow -s\kappa^{1/2}z$, $t \rightarrow sx$, $h \rightarrow -(6/\alpha)h$, $s = |\gamma_2|^{1/4}$, и $\kappa = v_A/2$, из (10) получим

$$\partial_t \left(\partial_x h + 6h\partial_r h - \varepsilon \partial_r^3 h - \lambda \partial_r^5 h \right) = \Delta_\perp h, \quad (11)$$

где $\varepsilon = \gamma_1 |\gamma_2|^{-1/2}$, $\lambda = \text{sing } \gamma_2$. Уравнение (11) описывает распространение пучка БМЗ волн вдоль оси x от границы $x = 0$. Положим, что $\Delta_\perp = \partial_\rho^2 + (1/\rho)\partial_\rho$, а также $h_0 = h(t, 0, \rho) = \cos(mt) \exp(-\rho^2)$, что определяет граничное условие, как локализованный в плоскости (y, z) и периодический во времени аксиально-симметричный пучок БМЗ волн.

Уравнение (11) с граничным условием h_0 интегрировалось численно. Серии проведенных численных экспериментов по моделированию распространения пучка БМЗ для различных его ин-

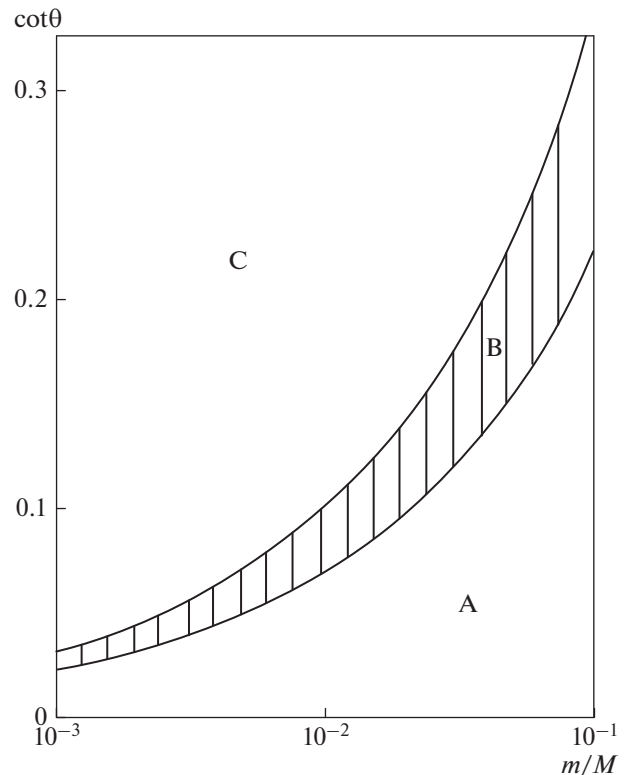


Рис. 2. Характер дисперсии для БМЗ волн в зависимости от угла θ и отношения m/M .

тенсивностей на границе $x = 0$, h_0 и разных углов θ (случаи А, В и С – см. выше) позволили получить следующие результаты. В области А (отвечающей $\lambda = 1$, $\varepsilon > 0$), подобно результатам, полученным в [Belashov, 2005] и [Белашов, 2014], для любых h_0 пространственная эволюция пучка БМЗ волн приводит на начальной стадии к фокусировке пучка, что определяется доминирующей ролью нелинейных процессов на этом временном интервале. При этом, как и для обычного уравнения КП, наблюдается (см. рис. 3, кривые 1 и 2) сжатие пучка в поперечном ρ -направлении в процессе его распространения вдоль оси x , так что его поперечный характерный размер $l_\rho(x) \sim l_\rho(0) h(0)/h(x)$ уменьшается с одновременным быстрым ростом интенсивности пучка на его оси с инкрементом $\Gamma = (1/2W)dW/dt \sim 2$ (где $W = \langle h^2 \rangle / 4\pi$ – энергия волны в единице объема), которая слабо зависит от ε . Характеристические размеры пучка, представляющего собой волновой импульс, при этом, уменьшаются, его “крылья” начинают отставать от его центральной части, и развивается неустойчивость самофокусировочного типа (см. рис. 3, кривые 1, 2, и рис. 4). Такой тип эволюции характеризуется также увеличением P и уменьшением (при не очень боль-

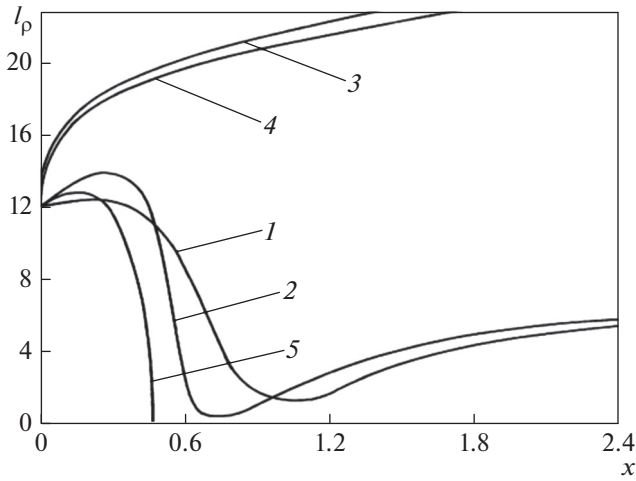


Рис. 3. Изменение поперечного сечения волнового пучка при его распространении в x -направлении: (1) $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1.34$; (2) $\lambda = 1$, $\varepsilon = 2.24$; (3) $\lambda = -1$, $\varepsilon = 1.34$; (4) $\lambda = -1$, $\varepsilon = -1.34$; (5) $\lambda = 0$, $\varepsilon = -1.34$.

ших $\varepsilon > 0$) гамильтониана H системы за счет нелинейного члена, который растет на этом отрезке эволюции более быстро, чем дисперсионные члены.

С дальнейшим ростом t , вследствие уменьшения поперечного характеристического размера волнового импульса l_p (см. рис. 3), член, пропорциональный пятой производной в уравнении (11), начинает играть доминирующую роль (что четко видно из анализа изменения интегральных членов, составляющих гамильтониан H). В результате, “схлопывание” крыльев волнового импульса позади основной его части не приводит к быстрому нарастанию интенсивности поля и формиро-

ванию сингулярности в области главного максимума, что имеет место в стандартной модели уравнения КП с $\gamma_1/\kappa > 0$ [Belashov, 2005], и образуется кольцевая область повышенной концентрации поля (рис. 5). Дальнейшая эволюция такой структуры приводит к формированию дополнительных максимумов на оси x позади импульса (рис. 5). При этом сжатие волнового импульса останавливается и начинается стадия его дефокусировки (см. рис. 3, кривые 1 и 2). Эта стадия заканчивается формированием стационарного волнового пучка, т.е. переходом в режим $h_{\max}(x) = \text{const}$ и $l_p(x) = \text{const}$, что соответствует результатам, полученным в разделе 2. Роль члена, пропорционального пятой производной в уравнении (11), наряду с описанной выше, состоит также в появлении мелкомасштабных осцилляций, формирующих регулярную осцилляторную структуру хвоста (рис. 5).

В областях В и С (см. рис. 2), отвечающих $\lambda = -1$ и $|\varepsilon| \geq 0$, звуковая волна рассеивается при ее распространении вдоль оси x при любой интенсивности пучка $h(0)$ на границе (см. кривые 3, 4 на рис. 3) подобно тому, как это происходит в процессе самовоздействия электромагнитной волны в средах, где производные $\partial^2\omega/\partial k_x^2$ и $\partial^2\omega/\partial k_\perp^2$ имеют разные знаки (например, это имеет место для ионно-циклотронных волн, вистлеров и т.д.) [Литвак, 1983].

На рисунке 3 можно также видеть, что при $\lambda = 0$, когда (11) переходит в уравнение КП с отрицательной дисперсией, решений в форме самофокусирующегося пучка БМЗ волн нет. Поэтому эффект самофокусировки не может наблюдаться

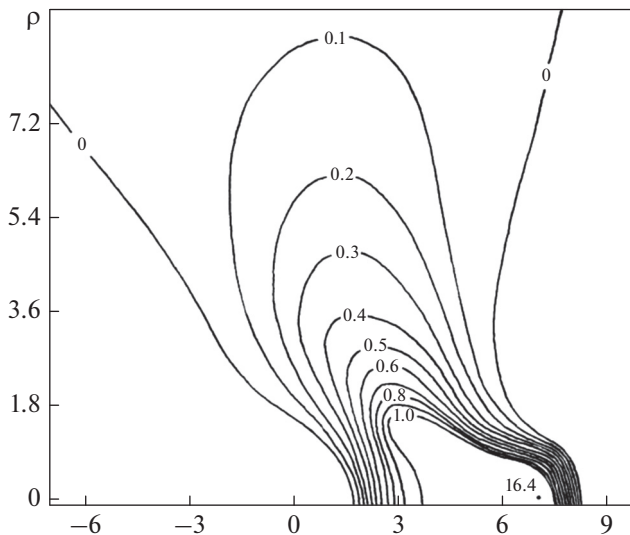


Рис. 4. Решение в (x, ρ) -плоскости при $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.89$, отвечающее стадии максимума амплитуды.

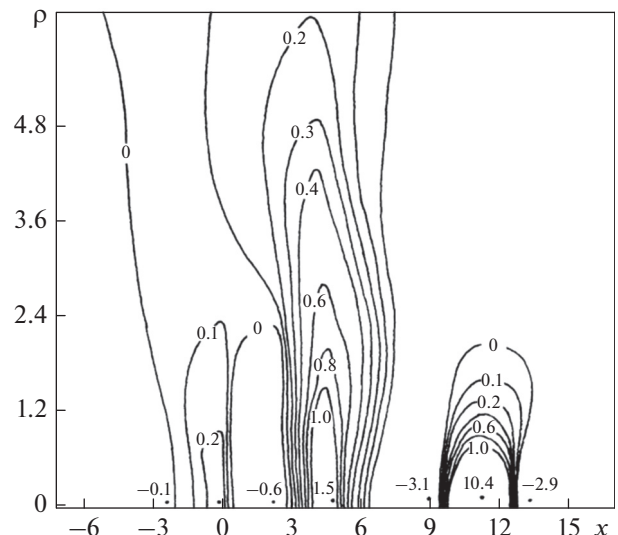


Рис. 5. Решение в (x, ρ) -плоскости при $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.89$.

в рассмотренной нами модели, когда $\lambda = 0$. Тестовые численные эксперименты для модели (11) с $\lambda = 0$ показали, что самофокусировка возможна только при $\epsilon < 0$ (рис. 3, кривая 5), т.е. когда пучок БМЗ волн, описываемый этой моделью, не отвечает никакой реальной ситуации [Belashov, 2005].

Таким образом, результаты изучения явления на основе модели уравнения БК (11) показывают, что явление самофокусировки пучка БМЗ волн, распространяющегося в плазме под углами к магнитному полю вблизи конуса $\theta = \arctg(M/m)^{1/2}$ не может наблюдаться, в отличие от стандартной модели уравнения КП, даже если дисперсия для малых k положительна. В этом случае, однако, наряду с рассеянием пучка, может наблюдаться его нелинейное стационарное распространение.

Отметим также, что при $|\pi/2 - \theta| \gg (m/M)^{1/2}$ уравнения (10) и (11) должны быть дополнены членами, пропорциональными смешанным производным, поскольку в этом случае $|\mathbf{k}_\perp| \geq k_x$ и в дисперсионном уравнении появляются члены, пропорциональные $k_x^i |\mathbf{k}_\perp^j|$, где $i, j = 1, 2, \dots$

В заключение заметим, что в реальных условиях в плазме ионосферы и магнитосферы необходимо учитывать также воздействие стохастических флуктуаций волнового поля $h(t, x, \mathbf{r}_\perp)$ на эволюцию волнового пучка, что должно быть учтено в основных уравнениях. Так, соответственно, уравнение (11) должно быть дополнено членом типа $\eta(t, x, \rho)$ и переписано в виде

$$\partial_t (\partial_x h + 6h\partial_t h - \epsilon \partial_t^3 h - \lambda \partial_t^5 h + \eta(t, x, \rho)) = \Delta_\perp h. \quad (12)$$

В работе [Belashov, 1995] уравнение (12) при $\lambda = 0$ для случая низкочастотных флуктуаций, когда $\eta = \eta(t)$, было проинтегрировано аналитически. Полученные при этом результаты могут быть легко распространены на (12) с $\eta = \eta(t)$. Так, интерпретация результатов [Belashov, 1995] в терминах данной задачи позволяет заключить, что даже малые стохастические флуктуации волнового поля будут приводить к затуханию волнового импульса при его распространении, сопровождающемуся трансформацией волны в осцилляторную структуру. В случае $\eta = \eta(t, x, \rho)$, однако, аналитическое изучение соответствующего процесса становится чрезвычайно сложным и в работе [Белашов, 2014] было выполнено численное интегрирование уравнения (12) со стохастическим членом, являющимся функцией времени и пространственных координат. На рисунке 6 показан пример результатов численного моделирования эволюции пучка БМЗ волн в среде со стохастическими флуктуациями волнового поля в форме гауссова шума в модели (12) с $\eta = \eta(t, x, \rho)$. Полученные результаты оказались качественно подобны случаю $\eta = \eta(t)$: наблюдается уменьшение ам-

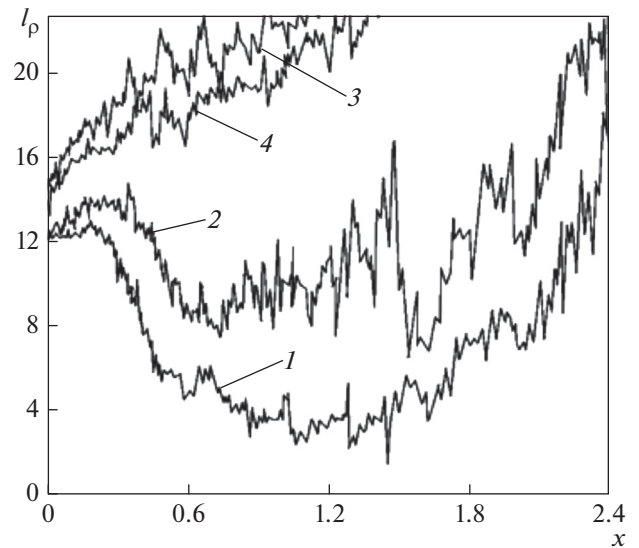


Рис. 6. Изменение поперечного сечения пучка при его распространении вдоль оси x в плазме с $\eta = \eta(t, x, \rho)$ при стандартном отклонении $\sigma = 0.04$ для тех же значений λ и ϵ , что на рис. 3.

плитуды пучка БМЗ волн при его распространении с последующим разрушением волны (ср. с рис. 3).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной работе на основе модели 3D уравнения БК для магнитного поля $h = B_-/B$, в предположении однородности внешнего магнитного поля \mathbf{B} , с учетом высшей дисперсионной поправки, определяемой параметрами плазмы и углом $\theta = (\mathbf{B}, \mathbf{k})$, аналитически и численно исследована задача устойчивости и динамики 3D солитоноподобных структур типа пучка БМЗ волн, формирующихся на низкочастотной ветви колебаний в плазме для случаев, когда $\beta \equiv 4\pi n T/B^2 \ll 1$ и $\beta > 1$. Полученные результаты показывают, что, в отличие от модели уравнения КП, при распространении пучка БМЗ волн под углами к внешнему магнитному полю вблизи конуса $\theta = \arctg(M/m)^{1/2}$ явление самофокусировки наблюдаться не может, даже если дисперсия для малых k положительна. Показано, что, наряду с рассеянием магнитного звука, может иметь место нелинейное стационарное распространение пучка, и доказана аналитически и численно возможность формирования в результате эволюции устойчивых 3D уединенных пучков БМЗ волн. Продемонстрировано, что в присутствии в среде стохастических флуктуаций волнового поля приводит к уменьшению амплитуды пучка БМЗ волн при распространении с последующим его разрушением.

В нашей работе не учитывались в явном виде возможные эффекты неоднородности внешнего магнитного поля, которые могут иметь место в ионосфере и магнитосфере Земли. Так, например, неоднородность поля может приводить к ускорению солитонов [Popel, et al., 1995] и другим явлениям, связанным с нарушением баланса между нелинейными и дисперсионными эффектами, например, к деформациям и разрушению солитонов, как это имеет место при распространении нелинейных волновых структур в средах с переменной дисперсией (см., например, [Belashov, 2005], [Белашова, 2006]) Последнее может быть обусловлено в плазме как неоднородностью ее состава в пространстве, что приведет к появлению пространственных зависимостей величин m/M , n_i , а следовательно и $\omega_{pi} = (4\pi n_i e^2/M)^{1/2}$, так и неоднородностью поля \mathbf{B} , а следовательно и $v_A = B^2/4\pi n_i M$. В этом случае и дисперсионные коэффициенты γ_1, γ_2 в уравнении БК станут функциями пространственных координат. В нашей модели эффект неоднородности магнитного поля, таким образом, может быть учтен, если мы предположим, что $\mathbf{B} = f(\mathbf{r})$, а следовательно и γ_1, γ_2 , и v_A есть функции \mathbf{r} в уравнениях (10), (11), однако такое обобщение уравнения БК выходит за рамки исследования, представленного в настоящей работе.

Отметим в заключение, что полученные результаты имеют самое непосредственное приложение к нелинейной волновой динамике в ионосферной и магнитосферной плазме, поскольку, на наш взгляд, будут способствовать лучшему пониманию физики нелинейных волновых процессов и могут оказаться полезными при интерпретации результатов лабораторных и космических экспериментов по возбуждению, эволюции и динамике взаимодействия солитонов БМЗ волн, а также эффектов самовоздействия, таких как волновой коллапс и самофокусировка волновых пучков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

– *Белашов В.Ю.* Об устойчивости двумерных и трехмерных солитонов в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. Т. 320. № 1. С. 85–89. 1991.

– *Белашов В.Ю.* Нелинейные эффекты волновой динамики БМЗ в плазме: самофокусировка и стабилизация пучка / Тр. XXIV Всерос. науч. конф. “Распространение радиоволн” РРВ-24, Иркутск, 2014. Т. 3. Иркутск: ИСЗФ СО РАН. С. 5–12. 2014.

– *Белашова Е.С., Белашов В.Ю.* Солитоны как математические и физические объекты. Казань: КГЭУ. 205 с. 2006.

– *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем // УФН. Т. 182. № 6. С. 569–592. 2012.

– *Кузнецов Е.А., Мушер С.Л.* Влияние коллапса звуковых волн на структуру бесстолкновительных ударных волн в замагниченной плазме // ЖЭТФ. Т. 91. Вып. 5(11). С. 1605–1619. 1986.

– *Литвак А.Г.* Об одном типе самовоздействия волн в плазме // Физика плазмы. Т. 9. № 3. С. 495–500. 1983.

– *Манин Д.Ю., Петвиашвили В.И.* Самофокусировка магнитозвуковой волны поперек магнитного поля // Письма в ЖЭТФ. Т. 38. Вып. 9. С. 427–430. 1983.

– *Belashov V.Yu.* Nonlinear effects for FMS waves propagating in magnetized plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. V. 36. P. 1661–1669. 1994.

– *Belashov V.Yu.* Dynamics of KP equation solitons in media with low-frequency wave field stochastic fluctuations // Phys. Lett. V. 197A. P. 282–289. 1995.

– *Belashov V.Yu., Vladimirov S.V.* Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo. 305 p. 2005.

– *Belashov V.Yu.* Dynamics of multidimensional nonlinear wave structures of the of the solitons and vortex types in dispersive complex media. Theory, simulation, applications / 17th Int. Congress on Plasma Physics – ICPP 2014, Lisbon, Portugal, 2014. Book of Abstracts. BAP. P. 35. 2014.

– *Belashov V.Yu., Belashova E.S.* Nonlinear dynamics of the 3D Alfvén waves in plasma of ionosphere and magnetosphere // J. Atmos. Solar-Terr Phys. V. 136. P. 150–154. 2015.

– *Esfahani A.* Instability of solitary waves of the generalized high-order KP equation // Nonlinearity. V. 24. P. 833–846. 2011.

– *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 175 с. 1973.

– *Karpman V.I., Belashov V.Yu.* Evolution of three-dimensional nonlinear pulses in weakly dispersive media // Phys. Lett. V. 154A. P. 140–144. 1991.

– *Liu Y., Wang X-P.* Nonlinear stability of solitary waves of a generalized Kadomtsev-Petviashvili equation // Comm. Math. Phys. V. 183. P. 253–266. 1997.

– *Pava J.A.* Nonlinear Dispersive Equations. Existence and Stability of Solitary and Periodic Travelling Wave Solutions / Math. Surveys and Monographs. V. 156. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. 2009.

– *Popel S.I., Vladimirov S.V., Tsytovich V.N.* Theory of modulational interactions in plasmas in the presence of an external magnetic field // Phys. Reports C 259. № 6. P. 327–405. 1995.

– *Tsytovich V.N.* Lectures on Non-Linear Plasma Kinetics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. 365 p. 1995.