КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра общей математики

Е.А. Широкова, О.С. Захарова

МАТЕМАТИКА ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ «ПРИРОДООБУСТРОЙСТВО И ВОДОПОЛЬЗОВАНИЕ» ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Казань-2016

Широкова Е.А. , Захарова О.С.

Математика для направления «Природообустройство и водопользование». Часть 2: Учебное пособие / Е.А. Широкова, О.С. Захарова. – Казань: Казанский университет, 2016. – 36 с.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, проф. Н.Г. Гурьянов

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КГАСУ В.Л. Крепкогорский
канд. техн. наук, доц. КГАСУ Н.А. Иваньшин

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике для студентов 1-го курса Института экономики, управления и финансов для направления «Природообустройство и водопользование». Изложенный материал рассчитан на изучение в первом семестре и содержит основные сведения из части математического анализа, включающей в себя следующие разделы: интеграл Римана и его приложения, дифференциальное исчисление функций многих переменных и приложения. Пособие также знакомит студентов с пакетом программ MAXIMA как с инструментом решения различных задач из представленного курса.

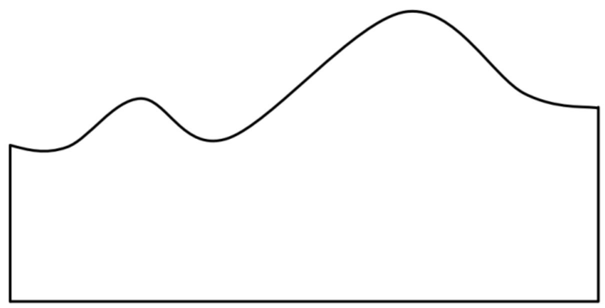
Принято на заседании кафедры общей математики
Протокол № 7 от 24.05.2016

Оглавление

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Площадь криволинейной трапеции

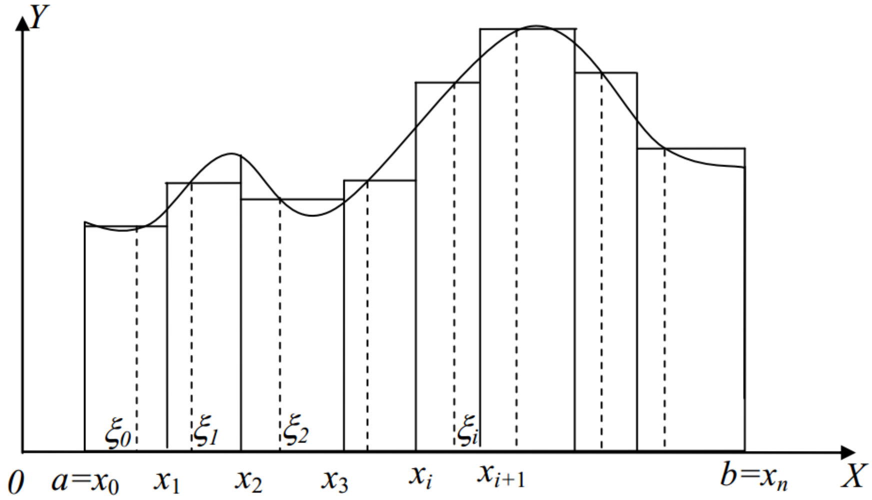
Представим, что мы должны подсчитать площадь земельного участка, изображенного на рисунке.



Такая фигура, ограниченная с трех сторон отрезками прямых, два из которых перпендикулярны третьему, а четвертая сторона пересекается прямой, перпендикулярной противоположному отрезку, только в одной точке, называется ***криволинейной трапецией***.

Очевидно, что любая плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций. Будем считать, что прямолинейные участки сторон нашей криволинейной трапеции так же, как на рисунке, параллельны координатным осям. В этом случае можно нижний отрезок считать отрезком оси абсцисс, где $a \le x \le b$, и точки криволинейного участка задать с помощью непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$.

Для того, чтобы найти площадь криволинейной трапеции, заменим трапецию объединением прямоугольников по следующей схеме.



Отрезок $[a,b]$ разделен на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,...,n$, где $x_0 = a,\ x_n = b$. На каждом отрезке выбрана точка ξ_i и в этой точке восстановлен перпендикуляр (прерывистая линия) до пересечения с кривой $y = f(x)$. Таким образом, вершиной перпендикуляра является точка с координатами $(\xi_i, f(\xi_i))$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построен прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. Очевидно, что чем меньше отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, тем меньше площадь прямоугольника отличается от площади криволинейной трапеции с основанием $[x_i, x_{i+1}]$. Обозначим Δ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Величина Δ называется ***диаметром разбиения***. Чем меньше диаметр разбиения, тем ближе сумма площадей построенных прямоугольников к площади исходной криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$.

Итак, за приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции возьмем

$$\sigma(f, R, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Здесь R означает способ выбора точек разбиения x_i, ξ – выбор отмеченных точек ξ_i. Введенная сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \sigma(f, R, \xi) = I$$

причем этот предел не зависит ни от R, ни от ξ, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а сам предел называется ***интегралом Римана по отрезку*** и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Этот интеграл и будет равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной кривой $y = f(x)$.

Любая ***непрерывная*** на отрезке функция является ***интегрируемой*** на этом отрезке. Хотя класс интегрируемых по Риману функций значительно шире, чем класс непрерывных функций, мы будем рассматривать только интегралы от непрерывных функций.

Пока непонятно, почему площадь криволинейной трапеции назвали ***интегралом*** – так же, как множество первообразных. Не видно связи между этими объектами. Тем не менее, связь есть. Отметим пока очевидные свойства интеграла Римана, следующие из свойств сумм и пределов.

Свойства интеграла Римана

1. **Линейность**. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, α и β– произвольные постоянные, то функция $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем

$$\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

2. **Аддитивность**. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $c\in[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Следствием этой формулы можно считать соотношение

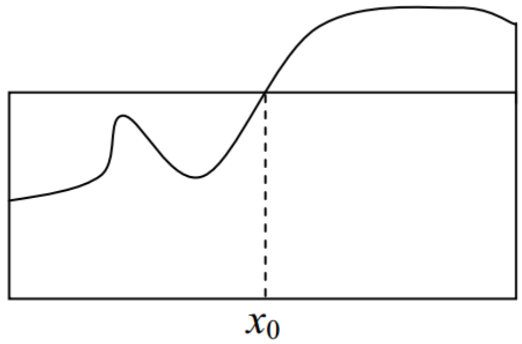
$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

То есть, замена направления интегрирования приводит к замене знака у интеграла.

3. **Теорема о среднем**. Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $x_0\in[a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(x_0)\cdot(b-a).$$

То есть, существует равновеликий криволинейной трапеции прямоугольник на том же основании с высотой, равной значению функции в промежуточной точке.



Формула Ньютона-Лейбница

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Будем рассматривать интегралы от этой функции на отрезках $[a,t]$ при всевозможных $t \in [a,b]$. Очевидно, что результат интегрирования зависит от значения верхнего предела интегрирования. Поэтому обозначим

$$I(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Имеем

$$I(a) = 0,\ I(b) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Рассмотрим

$$I(t+\Delta t) - I(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x)dx\,.$$

В соответствии с теоремой о среднем существует такое значение $\theta \in (0,1)$, что

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x)\,dx = f(t+\theta\cdot\Delta t)\cdot\Delta t\,.$$

Следовательно,

$$\frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = f(t+\theta\cdot\Delta t).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$ и пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ в точке $t \in [a,b]$, получим

$$I'(t) = f(t)\ .$$

Последнее означает, что функция $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Следовательно, если $\Phi(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x) = I(x) + C$ по свойству двух первообразных одной и той же функции. Следовательно, $\Phi(a) = C$, так как $I(a) = 0$, и $\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C$. Значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

Последняя формула, называемая формулой Ньютона-Лейбница, как раз обеспечивает связь между интегралом Римана (его еще называют

определенным интегралом) и первообразными. Формулу Ньютона-Лейбница еще записывают в виде

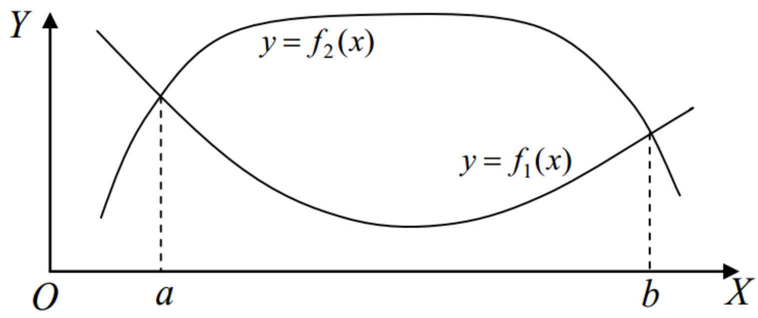
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Приложения интеграла Римана

Интеграл Римана по отрезку был нами введен как площадь криволинейной трапеции. Понятие площади неотделимо от понятия интеграла. С его помощью можно вычислять площади любых плоских областей, а также длины дуг, площади поверхностей и объемы тел.

1. Вычислить ***площадь области, расположенной между двумя кривыми*** $y = f_1(x)$ ***и*** $y = f_2(x)$ ***и над отрезком*** $[a,b]$, причем $f_1(a) = f_2(a), \quad f_1(b) = f_2(b)$.

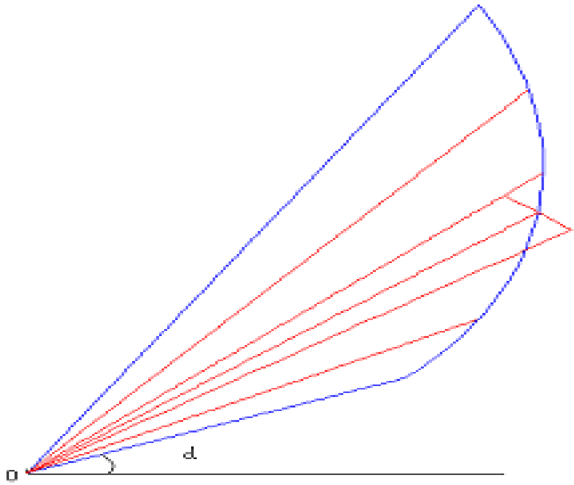


Очевидно, что площадь области между кривыми равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций, поэтому

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

2. Вычислить ***площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами (в полярных координатах)*** $\varphi = \alpha$ ***и*** $\varphi = \beta$***, а также заданной в полярных координатах кривой*** $r = f(\varphi), \quad \alpha < \varphi < \beta$ **.**

Проведем внутри криволинейного сектора лучи $\varphi = \varphi_k$, $k = 1,\dots,n-1$, разбивающие исходный сектор на мелкие криволинейные секторы $\varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}$, причем $\varphi_0 = \alpha, \quad \varphi_n = \beta$.



Заменим каждый мелкий криволинейный сектор круговым сектором с тем же углом при вершине и радиусом, равным значению $r(\tilde{\varphi}_k)$, где $\tilde{\varphi}_k \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$. Тогда площадь кругового мелкого сектора равна $r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k)/2$. При этом чем меньше разность $\varphi_{k+1} - \varphi_k$, тем меньше площадь кругового мелкого сектора отличается от площади соответствующего криволинейного мелкого сектора.

При достаточно частом разбиении исходного криволинейного сектора площадь его достаточно близка к величине

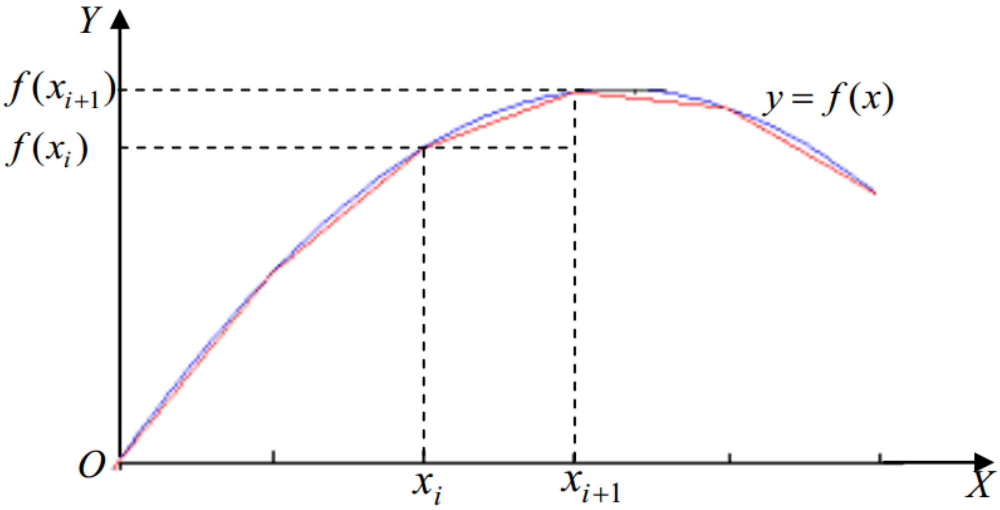
$$\sum_{k=0}^{n} r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k)/2 = \sum_{k=1}^{n+1} r^2(\tilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k/2.$$

Если теперь устремить к нулю наименьший из растворов малых криволинейных секторов, мы получим предел интегральных сумм – интеграл

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi,$$

который совпадает с площадью исходного криволинейного сектора.

3. Вычислить ***длину дуги кривой*** $y = f(x),\ x \in [a,b]$**.** Длиной дуги кривой мы будем называть предельную сумму длин вписанных в дугу хорд при стремлении этих хорд к точкам.



Разобъем отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,...,n$, где $x_0 = a$, $x_n = b$. Длина хорды, расположенной над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$, равна

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}\ .$$

Воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа и получим длину этой же хорды в виде

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f'(\xi_{i+1})(x_{i+1} - x_i)]^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_{i+1}))^2}\,\Delta x_i\ ,$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Таким образом, длина дуги всей кривой может быть приближена суммой

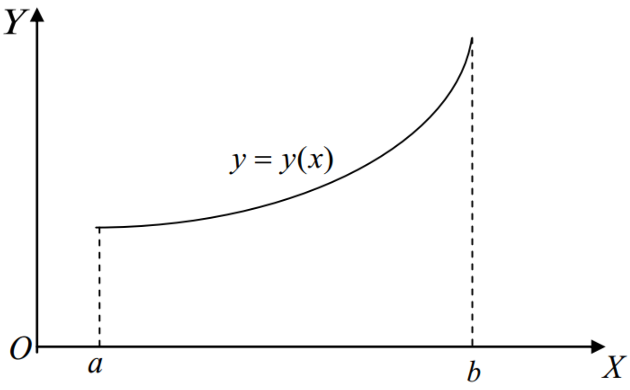
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_{i+1}))^2}\,\Delta x_i\ ,$$

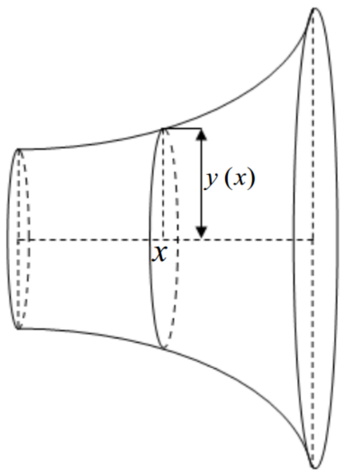
причем чем мельче разбиение отрезка $[a,b]$, тем точнее результат. При стремлении длины наименьшего из отрезков разбиения к нулю мы получим из суммы интеграл:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$$

который и дает выражение длины дуги данной кривой.

4.Вычислить ***объем тела вращения***, ограниченного поверхностью вращения кривой $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, вокруг оси OX и плоскостями $x = a$ и $x = b$.





Разбивая отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,...,n$, где $x_0 = a$, $x_n = b$, и проводя плоскости $x = x_i$, мы разобъем тело вращения на пласты, расположенные над отрезками $[x_i, x_{i+1}]$. Если высота пласта (длина отрезка $[x_i, x_{i+1}] = \Delta x_i$) небольшая, его объем можно приблизить объемом цилиндра, радиуса $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, боковая поверхность которого расположена над тем же отрезком $[x_i, x_{i+1}]$. При этом объемы цилиндра и пласта тем ближе, чем меньше величина Δx_i. Объем такого цилиндра равен $\pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i$. Поэтому приближенное значение объема заданного тела вращения равно

$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i+1})^2 \Delta x_i .$$

Переходя к пределу в такой интегральной сумме, получим

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx .$$

Методы вычисления интеграла Римана

Благодаря формуле Ньютона-Лейбница вычисление интеграла сводится к отысканию первообразной и вычислению значений этой первообразной в концах отрезка интегрирования. Поэтому основные приемы вычисления интеграла Римана так же, как в случае неопределенного интеграла, – замена переменной и интегрирование по частям.

1. Замена переменной. Пусть $x = \varphi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, где $\varphi(t)$ – монотонная непрерывная функция, имеющая непрерывную производную на интервале $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\Phi(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Согласно условию $\Phi(x)\big|_a^b = \Phi(\varphi(t))\big|_\alpha^\beta$.

Пример: Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot \cos t dt$.

Сделаем замену $\sin t = z$. Монотонная на отрезке $[0, \pi/2]$ функция $\sin t$ отображает этот отрезок в отрезок $[0,1]$. Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot \cos t dt = \int_0^1 z^3 dz = \frac{z^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2. **Интегрирование по частям**. Справедлива следующая формула:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx.$$

Доказательство. Так как согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b (u(x) \cdot v(x))'dx = (u(x) \cdot v(x))\big|_a^b$$

и согласно свойству определенного интеграла

$$\int_a^b (u(x) \cdot v(x))'dx = \int_a^b u(x) \cdot (v(x))'dx + \int_a^b (u(x))' \cdot v(x)dx,$$

сравнивая правые части последних двух равенств, получим требуемую формулу.

Пример. $\int_1^e \ln x dx = x \cdot \ln x\big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx = e - (e-1) = 1.$

При вычислении интегралов Римана можно использовать пакет программ MAXIMA. Для получения $\int_a^b f(x)dx$ необходимо ввести команду **integrate(f(x),x,a,b)** и нажать Shift+Enter.

Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Просматривая математические тексты, нетрудно наткнуться на выражения вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx \ \text{или} \ \int_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

С точки зрения введенного нами понятия интеграла Римана по отрезку приведенные интегральные выражения представляются бессмыслицей. Действительно, мы не сможем составить ни одной интегральной суммы, так как никогда не кончим разбивать бесконечный промежуток на конечные отрезки и выбирать на них отмеченные точки. И тем более, мы не сможем рассматривать последовательности интегральных сумм, соответствующих последовательностям таких разбиений с диаметрами разбиений, стремящимся к нулю. Что же понимают под такими интегралами?

Приведенные интегралы называются ***несобственными интегралами по бесконечному промежутку*** и определяются они при помощи интегралов Римана по конечным отрезкам следующим образом.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[\beta, b]$, $b > \beta$. То есть для любого $b > \beta$ существует

$$I(b) = \int_{\beta}^{b} f(x)\,dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to +\infty} I(b)$, то такой предел обозначают

$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx$$

и говорят, что этот несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл расходится.

Пример: Исследуем сходимость интеграла:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\nu}}\,dx.$$

Очевидно, что

$$I(b)=\begin{cases}\dfrac{b^{1-\nu}-1}{1-\nu}, \nu\neq 1\\ \ln b, \nu=1\end{cases}$$

Устремим теперь b к $+\infty$. Очевидно, что конечный предел функции $I(b)$ существует только при $\nu>1$:

$$\lim_{b\to+\infty} I(b)=\frac{1}{\nu-1}.$$

При $\nu\leq 1$ предел $I(b)$ бесконечен.

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\nu}dx$ сходится только при $\nu>1$, причем $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\nu}dx=\frac{1}{\nu-1}$.

При $\nu\leq 1$ несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\nu}dx$ расходится.

При вычислении несобственных интегралов по бесконечному промежутку также можно использовать пакет программ MAXIMA. Для получения

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$$

необходимо использовать команду **integrate(f(x),x,a,inf).**

Для получения

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

необходимо использовать команду **integrate(f(x),x,minf,b).**

Для несобственных интегралов по бесконечному промежутку от неотрицательных функций справедлива теорема, аналогичная теореме сравнения для числовых рядов:

Теорема: Если существует конечный $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$, причем $K\neq 0$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Несобственный интеграл от неограниченной функции

При вычислении интеграла Римана по отрезку существенным было то, что мы можем получить конечное значение функции в любой точке отрезка для подсчета значения интегральной суммы при соответствующем выборе отмеченных точек. Поэтому невозможно было вычисление интеграла Римана от функции, принимающей бесконечные значения в точках отрезка. Тем не менее, интеграл от такой функции в ряде случаев может быть вычислен, но называется он ***несобственным интегралом от неограниченной функции***. Здесь так же, как и в предыдущем случае, используется предельный переход.

Предположим, что функция $f(x)$, непрерывная в всех точках полуинтервала $(a,b]$, обладает свойством $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$. Тогда определим

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если такой конечный предел существует, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл сходится. В противном случае говорят, что интеграл расходится.

Пример.

Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{1}{x^\nu}dx$. Имеем

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\nu}=\begin{cases}\dfrac{1-\varepsilon^{1-\nu}}{1-\nu}, \nu\neq 1\\ -\ln\varepsilon, \nu=1\end{cases}$$

Устремим теперь ε к 0.

Очевидно, что конечный предел существует только при $\nu<1$. Он равен $\frac{1}{1-\nu}$. При $\nu\geq 1$ соответствующий предел бесконечен. Таким образом, несобственный интеграл сходится только при $\nu<1$. При $\nu\geq 1$ несобственный интеграл расходится.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций также существует аналог теоремы сравнения:

Теорема: Пусть точка a – особая точка для функций $f(x)$ и $g(x)$, которые при приближении к этой точке стремятся к $+\infty$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K,$$

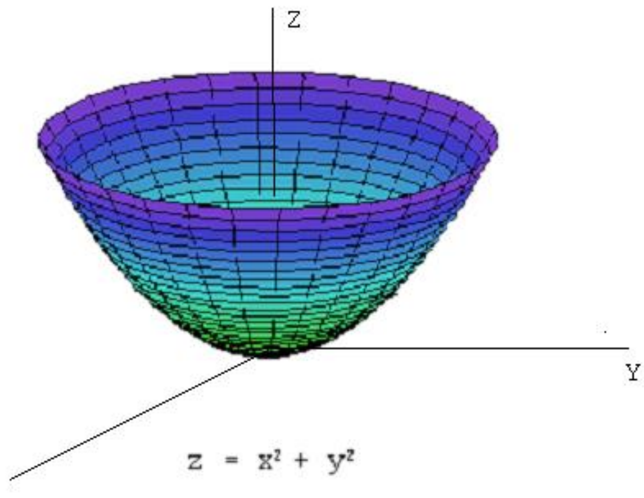
причем $K\neq 0$, то несобственные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \text{ и } \int_a^b g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С функциями двух переменных мы встречались в разделе «Аналитическая геометрия в пространстве», когда, например, знакомились с эллиптическим параболоидом, имеющим уравнение $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, или с гиперболическим параболоидом, имеющим уравнение $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$. Правые части приведенных выражений являются функциями переменных x и y. Если график функции одной переменной представляет собой плоскую кривую, характеризующую зависимость функции от переменной, то в случае двух переменных такую характеристику зависимости функции (z) от переменных (x и y) выражает поверхность.



$z = x^2 + y^2$

Для графического изображения зависимости функции трех и более переменных понадобилось бы пространство размерности, большей, чем 3. Поэтому такие графические изображения невозможны.

Многомерные пространства

Мы будем рассматривать n-мерные пространства R^{n}, элементами которых являются точки x, каждая из которых задается n координатами $(x^1, x^2, ..., x^n)$. В случае малой размерности пространства, чтобы не вводить верхние индексы, мы будем использовать традиционные координаты: x, y, z, u, v, w.

Определение: ***Расстоянием между точками*** $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ и $y = (y^1, y^2, ..., y^n)$ n-мерного пространства является величина

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + ... + (x^n - y^n)^2}\ .$$

Определение: ***Функцией*** n ***переменных*** $z = f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$, заданной на множестве D из пространства R^{n}, назовем закон, по которому каждой точке $x \in D$ ставится в соответствие вещественное число z.

Множество $D = D(f)$ называется ***областью определения*** функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется ***областью изменения*** этой функции, обозначается E или $E(f)$.

Примером функции двух переменных, заданной на всей плоскости XOY, является уже рассмотренная функция $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, графическая зависимость которой изображается с помощью эллиптического параболоида.

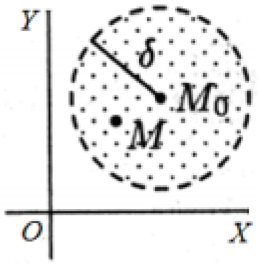
Предел функции многих переменных

Понятие предела функции в точке переносится с функций одной переменной на функции многих переменных $z = f(x),\ x \in D,$ следующим образом.

Определение: Пределом функции $z = f(x),\ x \in D,$ называется число

$$z_0 = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x \in D$, таких что $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $| f(x) - z_0 | < \varepsilon$.



Определение (для функции двух переменных):

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех и удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

выполняется неравенство $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$. Записывают:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \text{ или } A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!).

В случае функций двух переменных для вычисления предела в точке удобно переходить к полярным координатам в окрестности этой точки, а в случае функции трех переменных – к сферическим координатам.

Примеры: 1. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Переходя к полярным координатам в окрестности точки $(1, 0)$, запишем $x = 1 + r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$. Очевидно, что точка с координатами (x, y) стремится к точке с координатами $(1, 0)$ тогда и только тогда, когда $r \to 0$. Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{r \to 0} \frac{\ln(1 + r \cdot \cos\varphi + e^{r \cdot \sin\varphi})}{\sqrt{1 + r^2 + 2 \cdot r \cdot \cos\varphi}}.$$

Последний предел – это предел функции одной переменной r, непрерывной по r при $r=0$ для любого значения φ. Поэтому мы получаем ответ:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln 2\,.$$

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{2\cdot x\cdot y\cdot z}{x^3+2\cdot y^3-z^3}$.

Переходя к сферическим координатам в окрестности точки $(0,0,0)$, положим

$$x=r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi,\ y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi,\ \ z=r\cdot\cos\psi\,.$$

Точка с координатами (x,y,z) стремится к точке $(0,0,0)$ тогда и только тогда, когда $r\to 0$. Следовательно, искомый предел после перехода к сферическим координатам и сокращения числителя и знаменателя на величину r^3 равен

$$\lim_{r\to 0} \frac{2\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\psi\cdot\cos\psi}{(\cos^3\varphi+2\cdot\sin^3\varphi)\cdot\sin^3\psi-\cos^3\psi}\,.$$

Очевидно, что данный предел не существует, так как полученное после сокращения выражение не зависит от переменной r, а зависит только от значений φ и ψ. Ответ: предел не существует.

Непрерывность функции многих переменных в точке

Определение: Функция многих переменных $z=f(x),\ x\in D,$ называется ***непрерывной в точке*** $x_0=(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n)$, если точка x_0 входит в область определения функции D и предел функции равен значению функции в точке x_0, т.е. $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Из определения предела функции многих переменных следует, что в случае, когда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, для любого $\varepsilon>0$ существует такое значение $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых точек $x\in D$ таких, что $\rho(x,x_0)<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Таким образом, ***малым приращениям аргумента*** (в смысле расстояния в пространстве R^n) у функции, непрерывной в точке, соответствуют ***малые приращения функции.***

Как и в случае функций одной переменной, арифметические действия над непрерывными функциями не выводят из класса непрерывных функций, если нет деления на 0.

Дифференцируемость функции многих переменных

Требование дифференцируемости функции многих переменных в точке является более сильным, чем требование непрерывности функции в точке, так как не только обеспечивается малость приращения функции при малом приращении аргумента. Условие дифференцируемости состоит в том, что приращение функции, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, является результатом линейного преобразования этого бесконечно малого приращения аргумента.

Приращение аргумента функции многих переменных является n-мерным вектором. Линейное отображение n-мерного вектора $x=(x^1,...,x^n)$ в пространство размерности 1 задается матрицей-строкой размера $1\times n$:

$$A(x)=(a_1,....,a_n)\cdot\begin{pmatrix}x^1\\ ...\\ x^n\end{pmatrix}.$$

Поэтому **условие дифференцируемости функции многих переменных в точке** формулируется следующим образом:

Функция $z=f(x)=f(x^1,x^2,....,x^n)$ дифференцируема в точке $x_0=(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n)$, если существует матрица-строка $(a_1,a_2,...,a_n)$ такая, что для любого вектора приращений аргумента $\Delta x=(\Delta x^1,\Delta x^2,...,\Delta x^n)$ имеет место представление

$$\Delta z= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a_1\cdot\Delta x^1+a_2\cdot\Delta x^2+...+a_n\cdot\Delta x^n+\alpha ,$$

где величина α настолько мала, что

$$\lim_{\rho(x_0+\Delta x,x_0)\to 0}\frac{\alpha}{\rho(x_0+\Delta x,x_0)}=0.$$

При этом матрица-строка $(a_1,a_2,...,a_n)$ называется производной матрицей, а величина α называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho(x_0+\Delta x,x_0)$.

Частные производные и дифференциал

Предположим, что функция $z = f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ дифференцируема в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$. Как выразить элементы производной матрицы-строки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ через заданную функцию?

Выберем вектор приращений так, что приращения происходят только по k-му аргументу x^k. Вектор приращений аргумента в этом случае имеет вид $\Delta x = (0, 0, ..., 0, \Delta x^k, 0, ..., 0)$, следовательно, $\rho(x_0 + \Delta x, x_0) = |\Delta x^k|$. Приращение функции примет вид

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0^1, ..., x_0^k + \Delta x^k, ..., x_0^n) - f(x_0^1, ..., x_0^n) = a_k \cdot \Delta x^k + \alpha,$$

$$\lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x^k} = 0.$$

Последние соотношения являются условием дифференцируемости функции $g(x^k) = f(x_0^1, ... x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n)$ одной переменной x^k в точке x_0^k. При этом

$$a_k = \frac{dg(x^k)}{dx^k}\Big|_{x^k = x_0^k} = \frac{df(x_0^1, ... x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n)}{dx^k}\Big|_{x^k = x_0^k}.$$

Таким образом, k-й элемент производной матрицы-строки является производной по k-й переменной x^k заданной функции в точке x_0^k при фиксированных остальных переменных $x^j = x_0^j, j \neq k$. Такая производная называется ***частной производной функции многих переменных*** $f(x^1, x^2, ..., x^n)$ по переменной x^k в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ и обозначается

$$\frac{\partial f(x^1, ..., x^n)}{\partial x^k}\Big|_{x = x_0} = f'_{x^k}(x_0).$$

Итак, производная матрица-строка, участвующая в определении условия дифференцируемости функции многих переменных в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$, состоит из частных производных по соответствующим переменным в точке x_0:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (f'_{x^1}(x_0), f'_{x^2}(x_0), ..., f'_{x^n}(x_0)).$$

Главная часть приращения функции многих переменных в точке x_0, принимающая теперь вид $\sum_{k=1}^{n} f'_{x^k}(x_0) \cdot \Delta x^k$, называется ***дифференциалом функции*** $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. Таким образом, приращение функции имеет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=df(x_0)+\alpha \text{, где } \lim_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \frac{\alpha}{\rho(x_0+\Delta x, x_0)}=0$$

Остановимся теперь на дифференцировании функции двух переменных. Вводят понятия полного и частных приращений функции.

Определение: ***Полное приращение функции*** имеет место, когда получают приращения оба аргумента функции

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

а ***частные приращения функции*** соответствуют приращению одного из аргументов:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y),$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Определение: Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

то он называется ***частной производной функции*** $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке M_0 обычно обозначают символами

$$f'_x(x_0,y_0), f'_x\big|_{M_0}.$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z=f(x,y)$ по переменной y:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z=f(x,y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Полный дифференциал фунции $z=f(x,y)$ имеет вид

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Для независимых переменных при этом полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$.

Пример: Найдем частные производные функции $f(x,y)=\ln(x+3y)$.

Имеем $f'_x=\dfrac{1}{x+3y}$, $f'_y=\dfrac{3}{x+3y}$.

Для того, чтобы найти частную производную функции с помощью MAXIMы можно воспользоваться командой **diff**. Так получить выше найденные производные можно по командам **diff(log(x+3*y),x)** и **diff(log(x+3*y),y).**

Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ называются ***частными производными первого порядка***. Их можно рассматривать как функции от $(x,y)\in D$. Эти функции также могут иметь частные производные, которые называются ***частными производными второго порядка***:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y)$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и других порядков. Так, к примеру,

$$z'''_{xxy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial x^2}.$$

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной***.

Теорема (Шварц): Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z=f(x,y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Пример: Найти f'''_{xxy} функции $f(x,y)=\ln(x+3y)$. Имеем

$$f'''_{xxy}=\left(((\ln(x+3y))'_x)'_x\right)'_y=\left(\left(\frac{1}{x+3y}\right)'_x\right)'_y=-\left(\frac{1}{(x+3y)^2}\right)'_y=\frac{6}{(x+3y)^3}.$$

Для того, чтобы вычислить ту же производную с помощью MAXIMA, воспользуемся командой **diff(log(x+3*y),x,2,y,1)**.

Дифференциалы высших порядков

Полный дифференциал функции

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Дифференциал второго порядка определяется по формуле

$$d^2z=d\left(dz\right).$$

Тогда непосредственным вычислением получим:

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx+\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy.$$

Отсюда следует, что

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Символически это записывается так

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка:

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot z,$$

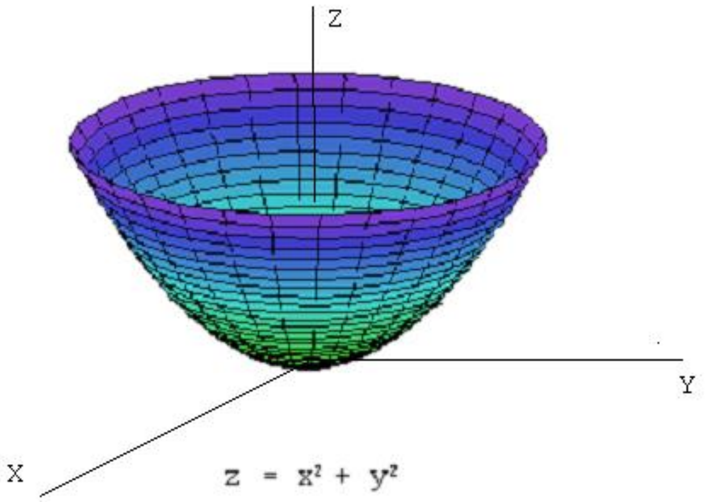
где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3=\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2\cdot\frac{\partial}{\partial y}dy+3\frac{\partial}{\partial x}dx\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Упражнение. Найти $d^2 f$ для функции $f(x,y)=\ln(x+3y)$ в точке (1,1).

Локальный экстремум функции многих переменных

Точкой локального экстремума функции $f(x)=f(x^1,x^2,...,x^n),\ x\in D,$ называется такая точка $x_0=(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n)\in D$, для которой в области D существует окрестность, в которой разность $f(x)-f(x_0)$ не меняет знак. В частности, точка x_0 является точкой минимума, если $f(x)-f(x_0)>0,\ x\neq x_0$, и точка x_0 является точкой максимума, если $f(x)-f(x_0)<0,\ x\neq x_0$.



Необходимое условие локального экстремума

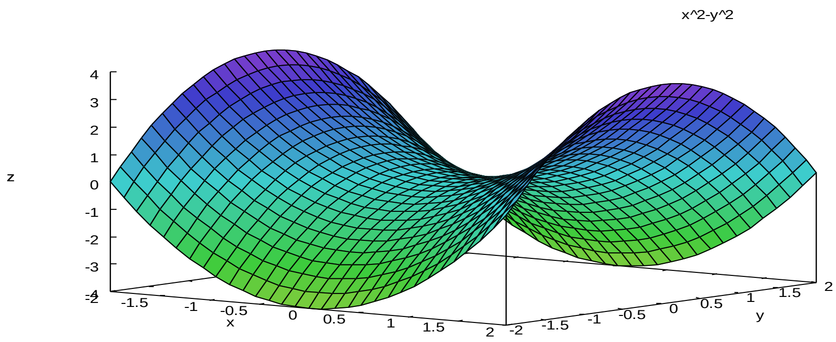
Пусть x_0 – точка экстремума, и функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Рассмотрим функцию одной переменной $g(x^k)=f(x_0^1,...,x_0^{k-1},x^k,x_0^{k+1},...,x_0^n)$, где k – любое натуральное число между 1 и n. Эта функция имеет точкой экстремума точку x_0^k, и значит, $g'(x_0^k)=f'_{x^k}(x_0^1,...,x_0^n)=0$. Следовательно, необходимым условием экстремума функции многих переменных $f(x)$ в точке x_0, где она дифференцируема, является следующее условие:

$$f'_{x^1}(x_0) = f'_{x^2}(x_0) = \ldots = f'_{x^n}(x_0) = 0.$$

Точка, в которой все частные производные первого порядка данной функции равны нулю, называется **критической точкой** этой функции.

Достаточное условие локального экстремума

Выполнение необходимого условия экстремума не обязательно обеспечивает действительное наличие экстремума в точке, то есть, критическая точка функции может не быть точкой локального экстремума. В качестве примера рассмотрим функцию двух переменных $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Критической точкой для этой функции является точка (0,0). Однако эта точка является не экстремальной, а седловой.



Для того чтобы выяснить, достигается ли в критической точке экстремум и какой, следует обратиться к дифференциалу второго порядка в этой точке. Итак, пусть x_0– критическая точка для функции многих переменных $f(x)$. В этом случае $df(x_0) = 0$. В соответствии с формулой Тейлора

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \alpha, \text{ где } \lim_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \frac{\alpha}{\rho^2(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0.$$

Поэтому знак разности $f(x) - f(x_0)$ в окрестности точки x_0 определяется знаком дифференциала второго порядка в точке x_0 при всевозможных малых приращениях dx^k, $k = 1,\ldots,n$.

Второй дифференциал функции в точке представляет собой ***квадратичную форму*** относительно переменных dx^k, $k = 1,\ldots,n$. Поэтому исследование вопроса о наличии экстремума сводится к исследованию вопроса о сохранении знака квадратичной формы, а значит, к вычислению угловых миноров соответствующей матрицы из коэффициентов.

Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть критическая точка имеет координаты (x_0, y_0). Рассмотрим приращение функции в окрестности этой точки:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot dx \cdot dy + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (dy)^2] + \alpha.$$

Если при любом сочетании бесконечно малых приращений dx и dy выражение в квадратных скобках не меняет знак, то данная критическая точка является точкой локального экстремума. Вынесем за квадратную скобку множитель $(dy)^2$. Знак приращения функции совпадает со знаком квадратного трехчлена

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot t^2 + 2 \cdot f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot t + f''_{yy}(x_0, y_0), \; t = \frac{dx}{dy}$$

относительно t. Как известно, квадратный трехчлен не меняет знак в том случае, если не имеет корней, то есть если его дискриминант отрицателен. В случае отрицательного дискриминанта знак квадратного трехчлена определяется знаком коэффициента при наибольшей степени (или знаком свободного члена).

Достаточное условие локального экстремума: Критическая точка с координатами (x_0, y_0) является точкой локального экстремума, если

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) < 0.$$

При этом мы имеем точку минимума, если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, и точку максимума, если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Условный экстремум функции нескольких переменных

Представим, что мы решаем задачу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ не внутри треугольной области, как в предыдущем параграфе, а в области $x^4 + y^4 \le 4$. После нахождения критических точек внутри круга мы должны найти наибольшие и наименьшие значения на границе – кривой $x^4 + y^4 = 4$. Если решать задачу по аналогии с предыдущим решением, очевидно, что после выражения одной из переменных через другую в уравнении границы и подстановки в выражение исходной функции мы получим довольно сложное представление исходной функции на граничной окружности:

$z = x^2 \mp x\sqrt[4]{4-x^4} + \sqrt{4-x^4} - 2x \pm \sqrt[4]{4-x^4}$. Более того, граничная кривая может иметь такое уравнение, из которого невозможно явно выразить одну переменную через другую.

Задачи нахождения наибольших и наименьших значений функции при выполнении условий относительно переменных называются ***задачами нахождения условных экстремумов***. В приведенном примере условием является равенство $x^4 + y^4 = 4$.

Лагранжем был разработан метод решения таких задач. Итак, пусть нужно найти наибольшие и наименьшие значения функции $z = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ при выполнении условия $g(x^1, x^2, ..., x^n) = 0$. Для этого следует построить новую функцию, называемую функцией Лагранжа

$$L(x^1, x^2, ..., x^n, \lambda) = f(x^1, ..., x^n) + \lambda \cdot g(x^1, ..., x^n).$$

Число переменных функции Лагранжа на 1 больше, чем число переменных исходной функции $f(x^1, x^2, ..., x^n)$. Далее ищутся критические точки функции $L(x^1, x^2, ..., x^n, \lambda)$ из системы

$$\begin{cases} L'_{x^1} = 0, \\ L'_{x^2} = 0, \\ \quad .... \\ L'_{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Среди полученных критических точек будут точки, дающие условные экстремумы.

Пример: Найти условные экстремумы функции $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ при условии $4x^2 + y^2 = 25$.

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25)$$

и найдем ее критические точки из системы

$$\begin{cases} 2x + 12y + 8\lambda x = 0, \\ 12x + 4y + 2\lambda y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Рассмотрим одновременно два первых уравнения системы в виде

$$\begin{cases} 2x(1+4\lambda) + 12y = 0, \\ 12x + 2y(2+\lambda) = 0. \end{cases}$$

Если решать эту систему относительно переменных x и y, то, применяя правило Крамера, получим следующее: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение $x=0, y=0$. Однако это решение противоречит третьему уравнению исходной системы. Поэтому единственная возможность получить ненулевые решения системы из двух первых уравнений – это приравнять главный определитель системы из двух уравнений нулю: $4(1+4\lambda)(2+\lambda)-144=0$. Следовательно, λ – корень квадратного уравнения $4\lambda^2+9\lambda-34=0$. Решив это уравнение, получим два значения: $\lambda=2$ и $\lambda=-\frac{17}{4}$.

При $\lambda=2$ система из первых двух уравнений превращается в одно соотношение $x=-\frac{2}{3}y$. Подставляя это соотношение в третье уравнение, получим критические точки $x=\pm 2, y=\mp 3$. Значение исходной функции в этих точках: $z=-50$.

При $\lambda=-\frac{17}{4}$ система из первых двух уравнений превращается в соотношение $x=\frac{3}{8}y$. Подставляя это соотношение в третье уравнение, получим критические точки $x=\pm\frac{3}{2}, y=\pm 4$. Значение исходной функции в этих точках: $z=\frac{425}{4}$.

Таким образом, условным минимумом исходной функции является значение -50, условным максимумом является значение $\frac{425}{4}$.

Задачи условного экстремума могут решаться и при нескольких условиях.

Пусть нужно найти наибольшие и наименьшие значения функции $z=f(x^1,x^2,...,x^n)$ при выполнении условий $g(x^1,x^2,...,x^n)=0$ и $h(x^1,x^2,...,x^n)=0$. В таком случае число переменных функции Лагранжа увеличивается на 1, и функция Лагранжа будет иметь вид

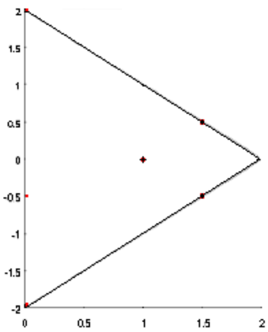
$$L(x^1,x^2,...,x^n,\lambda,\mu)=f(x^1,...,x^n)+\lambda\cdot g(x^1,...,x^n)+\mu\cdot h(x^1,...,x^n).$$

Дальше, как и в предыдущем случае, ищутся критические точки функции Лагранжа, которые являются точками условного экстремума исходной функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в области

Так же, как в случае функции одной переменной, заданной на отрезке, функция двух переменных, заданная в замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо в критических точках, лежащих в заданной области, либо в граничных точках области. Трудность этого случая в том, что у области на плоскости, имеется бесконечное множество граничных точек.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ в треугольнике, образованном прямыми $x = 0,\ y = x - 2,\ y = -x + 2$.



Прежде всего, найдем критические точки заданной функции, решив систему

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ -x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, и мы получаем критическую точку (1,0). Эта точка лежит внутри заданной области, поэтому мы вычисляем в этой точке значение функции: $z(1,0) = -1$.

Теперь переходим к граничным точкам. Заданная область имеет 3 прямолинейных граничных участка:

1) $x = 0,\ |y| \le 2$,

2) $0 \le x \le 2,\ y = x - 2$,

3) $0 \le x \le 2,\ y = -x + 2$.

На участке 1) $z = z_1(y) = y^2 + y,\ \ -2 \le y \le 2$. Функция $z_1(y)$ на отрезке [-2,2] принимает наибольшее значение, равное 6, в точке 2 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке -1/2.

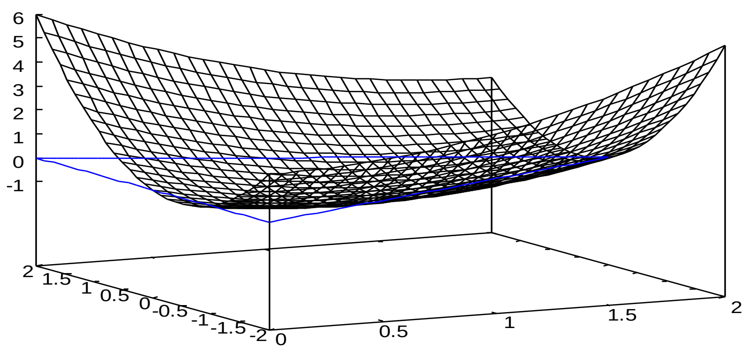
На участке 2) $z = z_2(x) = x^2 - x(x-2) + (x-2)^2 - 2x + (x-2) = x^2 - 3x + 2$, $0 \le x \le 2$. Функция $z_2(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 2, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке 3/2.

На участке 3):

$z = z_3(x) = x^2 - x(-x+2) + (-x+2)^2 - 2x + (-x+2) = x^2 - 9x + 6, \qquad 0 \le x \le 2.$

Функция $z_3(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 6, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -3/4, в критической точке 3/2.

Получив значения в критической точке и наибольшие и наименьшие значения на отрезках границы (-1, 6, -1/4, 2, -3/4), мы выбираем среди них наибольшее и наименьшее. Это значения 6 (наибольшее значение данной функции в заданном треугольнике) и -1 (наименьшее значение данной функции в заданном треугольнике). Трехмерное изображение соответствующей поверхности выглядит следующим образом.



Приложения дифференциала функции нескольких переменных

1. **Вычисление приближенного значения функции в точке**.

Предположим, что нам необходимо вычислить значение $\dfrac{2+\ln 0{,}97}{\sqrt{4{,}02}}$.

Очевидно, что если заменить аргумент логарифма единицей, а выражение под корнем в знаменателе четверкой, значение легко сосчитать. Воспользуемся формулой приближенного вычисления функции двух переменных:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Пусть $f(x,y) = \dfrac{2+\ln x}{\sqrt{y}}$. Обозначим $x_0 = 1,\ y_0 = 4,\ \Delta x = -0{,}03,\ \Delta y = 0{,}02.$

Теперь вычислим дифференциал в точке (x_0, y_0):

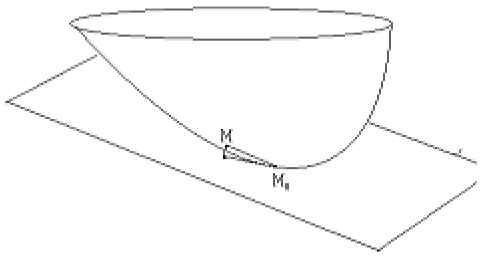
$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cdot(-0{,}03) + f'_y(x_0, y_0)\cdot 0{,}02 = \frac{-0{,}03}{2} - \frac{0{,}02}{8} = -0{,}0175.$$

Поскольку $f(x_0, y_0) = 1$, то получим $\dfrac{2 + \ln 0{,}97}{\sqrt{4{,}02}} \approx 0{,}9825$.

2. Касательная плоскость к поверхности, заданной в явном виде.

Рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$, заданную над плоской областью D.

Уравнение плоскости, касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), имеет вид $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$.



3. Производная по направлению.

1) Случай функции двух переменных $f(x, y)$.

Направление задается вектором. Выберем единичный вектор, задающий направление на плоскости: $\vec{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Этот вектор образует угол α с положительным направлением оси OX.

Определение: ***Производной функции двух переменных по направлению*** $\vec{l}$ называется выражение

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\alpha.$$

2) Случай функции трех переменных $f(x, y, z)$.

Пусть задан единичный вектор $\vec{l}$, образующий углы α, β и γ с осями OX, OY и OZ, соответственно. Если обозначить координаты вектора $\vec{l}$ через a, b и с, то по формуле косинуса угла между двумя векторами $\vec{l}$ и $\vec{i}$ получим $a = \cos\alpha$. Аналогично, $b = \cos\beta, c = \cos\gamma$. Таким образом, единичный вектор, образующий углы α, β и γ с осями OX, OY и OZ, имеет координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Производной функции трех переменных по направлению $\vec{l}$ называется выражение

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos\gamma.$$

Определение: ***Градиентом*** функции $f(x^1,...,x^n)$ называется вектор

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n}\right).$$

Поэтому производную функции по направлению, задаваемому единичным вектором $\vec{l}$, можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\mathrm{grad} f, \vec{l}\,),$$

где справа в формуле стоит скалярное произведение градиента функции и единичного вектора направления.

Основное свойство градиента: среди всевозможных направлений наибольшее, причем положительное, значение производная по направлению принимает по направлению градиента. Это свойство следует из определения скалярного произведения. Поскольку положительность производной означает рост функции, направление градиента в точке – это направление наибольшего роста функции.

Формула Тейлора для функции многих переменных

Как и в случае функций одной переменной, для функций многих переменных $f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ формула Тейлора дает связь между приращением функции в точке и ее дифференциалами в этой же точке:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + ... + \frac{1}{m!} d^m f(x_0) + \alpha,$$

где $\lim\limits_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \dfrac{\alpha}{\rho^m(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0$.

В частности, для функции двух переменных имеем:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cdot dx + f'_y(x_0, y_0)\cdot dy +$$

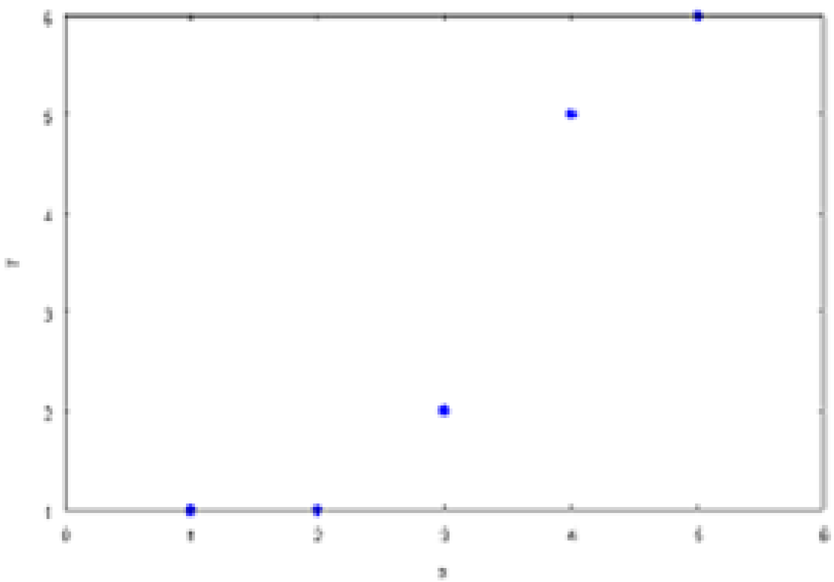
$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot (dx)^2 + 2\cdot f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot dx\cdot dy + f''_{yy}(x_0, y_0)\cdot (dy)^2] + ... + \alpha.$$

Здесь $\lim\limits_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0} \dfrac{\alpha}{\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^m} = 0$.

Метод наименьших квадратов

Поиск локальных экстремумов функции двух переменных активно применяется в задаче о проведении прямой линии, наиболее близкой к n заданным точкам на плоскости. Известно, что через одну точку можно провести бесчисленное множество прямых, через две точки – единственную прямую. Через произвольные 3 точки прямую провести нельзя. Тем более, через 5 точек. Но представим, что проведены замеры в 5 точках (x=1, x=2, x=3, x=4, x=5). Значения, полученные при замерах, соответственно, равны: y=1, y=1, y=2, y=5, y=6.

Нанесем результаты наблюдений на плоскость. Мы видим, что если соединить точки последовательно, полученная линия будет близка к прямой.



Учитывая, что замеры производятся неточно, мы хотим нарисовать приближенный график линейной зависимости y от x. Не существует прямой, проходящей через пять полученных на плоскости точек, но можно постараться провести прямую максимально близко к полученным точкам.

Уравнение прямой на плоскости $y = Ax + B$ зависит от двух параметров A и B. Нужно подобрать их так, чтобы при значениях x, равных 1, 2, 3, 4 и 5, значения $Ax + B$ мало отличались от 1, 1, 2, 5 и 6, соответственно. Это значит, что нужно подобрать такие A и B, чтобы значение функции

$$F(A,B) = (A\cdot 1 + B - 1)^2 + (A\cdot 2 + B - 1)^2 + (A\cdot 3 + B - 2)^2 + (A\cdot 4 + B - 5)^2 + (A\cdot 5 + B - 6)^2$$

было минимальным. Это значит, должно выполняться необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} F'_A = 0, \\ F'_B = 0. \end{cases}$$

В данном случае после приведения подобных членов получим систему

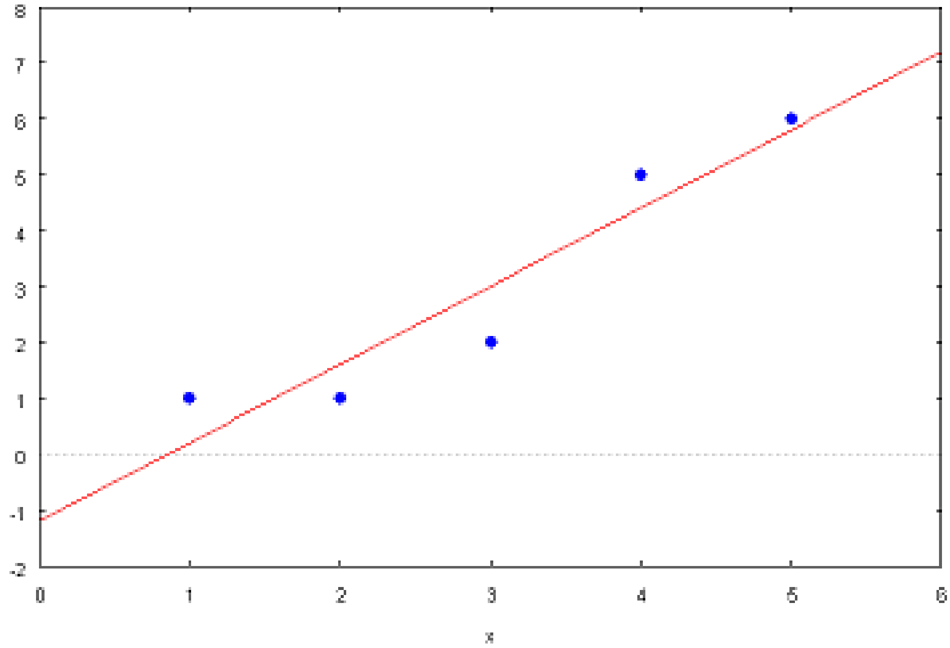
$$\begin{cases} 110A+30B=118, \\ 15A+5B=15. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A=\frac{7}{5}, B=-\frac{6}{5}$.

Таким образом, уравнение искомой прямой:

$$y=\frac{7}{5}x-\frac{6}{5}.$$

Нарисуем график с помощью MAXIMA: введем **xy: [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 5], [5, 6]]; plot2d([[discrete, xy], 7/5*x-6/5], [x,0,6],[style, points, lines]);** и нажмем Shift+Enter. Получим



Предложенный метод нахождения прямой, проходящей наиболее близко к заданным точкам, называется ***методом наименьших квадратов.***

Заметим, что пакет программ MAXIMA содержит этот метод. Для того, чтобы решить ту же задачу при помощи компьютера, следует сначала ввести координаты точек на плоскости: записать **load (lsquares);**

M : matrix ([1,1], [2,1], [3,2], [4,5], [5,6]) и нажать Shift+Enter.

Компьютер выведет на экран и запомнит 5 заданных точек в виде матрицы из двух столбцов. Затем введем команды **lsquares_estimates (M, [x,y], y = A*x+B, [A,B])** и нажмем Shift+Enter. Компьютер выведет на экран ответ $A=\frac{7}{5}, B=-\frac{6}{5}$, который мы уже получили выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Секаева Л.Р. Курс лекций по математике для бакалавров-геологов: Учебное пособие/ Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева, Е.А. Широкова. – Казань: Казанский федеральный университет, 2014. – 251 с.

2. Гусак А.А. Высшая математика / А.А. Гусак. В двух томах. – Минск. ТетраСистемс, 2009.

3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев.– М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003 – 654 с.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

Загрузка программы MAXIMA

http://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows/5.28.0-Windows/maxima-5.28.0-2.exe/down

Практикум по работе в программе MAXIMA

http://www.pmtf.msiu.ru/chair31/students/spichkov/maxima2.pdf