КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра общей математики

Е.А. Широкова, О.С. Захарова

МАТЕМАТИКА ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ «ПРИРОДООБУСТРОЙСТВО И ВОДОПОЛЬЗОВАНИЕ». ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Казань-2016

Широкова Е.А. , Захарова О.С.

Математика для направления «Природообустройство и водопользование». Часть 1: Учебное пособие / Е.А. Широкова, О.С. Захарова. – Казань: Казанский университет, 2016. – 136 с.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, проф. Н.Г. Гурьянов

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КГАСУ В.Л. Крепкогорский
канд. техн. наук, доц. КГАСУ Н.А. Иваньшин

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике для студентов 1-го курса Института экономики, управления и финансов для направления «Природообустройство и водопользование». Изложенный материал рассчитан на изучение в первом семестре и содержит основные сведения из линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, части математического анализа, включающей в себя понятия о функциях, теорию пределов, основы дифференциального и интегрального исчисления. Пособие также знакомит студентов с пакетом программ MAXIMA как с инструментом решения различных задач из представленного курса.

Принято на заседании кафедры общей математики
Протокол № 7 от 24.05.2016

Оглавление

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Матрицы

Определение: ***Матрица*** – это прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; \ldots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; a_{23} \; \ldots \; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; a_{m3} \; \ldots \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

где числа a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ - элементы матрицы, m - число строк, n - число столбцов.

Обозначения: $A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\ j=1}^{m,\ n}$ или $A_{m\times n}$

Здесь индекс внизу обозначает ***размер матрицы*** $m\times n$.

Определение: Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют ***главную диагональ***. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего правого угла, образуют ***побочную диагональ***.

Определение: Если число строк и столбцов совпадает ($m = n$), то матрица называется ***квадратной***. Если матрица содержит одну строку ($m = 1$), то она представляет собой ***вектор-строку***. Аналогично, ***вектор-столбец*** имеет один столбец ($n = 1$).

Определение: Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной матрицей***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение: Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой Е.

Пример: $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка

Определение: Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой О.

В матричном исчислении матрицы О и Е играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение: Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером называется матрицей ***транспонированной к данной***.

Обозначение: A^T

Определение: ***Матрицы*** A ***и*** B ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы матриц: $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$, где $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$.

Т.е. сравнивать мы можем только те матрицы, у которых равны размеры.

Свойство транспонирования: $\left(A^T\right)^T=A$

Замечание.

Матрица – это таблица, несущая определенную информацию. Она не вычисляется, законными действиями с матрицами являются лишь те, которые допустимы при работе с объектами, которые исследуются с помощью матриц.

Операции над матрицами

Пусть заданы две матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$, $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ равных размеров, тогда для них справедливы следующие операции

1) ***Суммой двух матриц*** $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$: $A+B=C$

Пример: $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&3\\2&5&10\end{pmatrix}$

2) ***Разностью двух матриц*** $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$: $A-B=C$

Пример: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 6 & 5 & 2\end{pmatrix}$

3) ***Произведением матрицы*** $A_{m\times n}$ ***на число*** k называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что $c_{ij}=ka_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$: $C=kA$

Пример: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}, k=2, \quad C=kA=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix}$

Определение: Матрица $-A=\left(-1\right)A$ называется ***противоположной*** А.

Разность матриц $A-B$ можно определить еще так $A-B=A+(-B)$.

4) ***Произведением матриц*** $A_{m\times n}$ и $D_{n\times p}=(d_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}d_{1k}+a_{i2}d_{2k}+...+a_{in}d_{nk}, i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}$,

т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения С равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B .

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Пример:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}\end{pmatrix}$$

Итак, мы перемножили матрицы размерами 3×3, 3×2 и получили матрицу - произведение размером 3×2.

Свойства операций сложения и умножения на число

Пусть A, B, C - матрицы, α, β - числа, тогда справедливы:

1. Свойство переместительности: $A+B=B+A$;
2. Свойство сочетательности: $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$;

3. $A+O=A$;

4. $A-A=O$;

5. $1\cdot A=A$;

6. Свойство распределительности: $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

7. Свойство распределительности : $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;

8. Свойство сочетательности: $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$,

9. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$.

Свойства умножения матриц

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$ (переместительного свойства нет).

Более того, если матрица AB существует, то матрица BA может не существовать. Поэтому принято говорить «умножим матрицу A справа на B», тогда получим AB. При умножении матрицы A «слева на B» имеем BA. Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Матрицы A и B называются ***перестановочными***, если $AB=BA$.

2. Произведение квадратной матрицы на единичную матрицу того же порядка равно самой матрице, т.е. $A\cdot E=E\cdot A=A$.

Доказательство:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Итак, $A\cdot E=A$ Нетрудно показать, что $E\cdot A=A$. Ч.Т.Д.

3. $\left(A\cdot B\right)^T=A^T\cdot B^T$;

4. $A\cdot\left(BC\right)=(AB)\cdot C$;

5. $A(B+C)=AB+AC$;

6. $(A+B)C=AC+BC$;

7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B$.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

2. Умножение всех элементов матрицы на число, отличное от нуля;

3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение: Две матрицы называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.

Это важное свойство матриц используется при решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Рассматривая матрицу коэффициентов некоторой СЛАУ, отметим, что если умножить некоторую строку на какое-то число и прибавить ее к другой строке матрицы, то получаем эквивалентную матрицу, то есть матрицу коэффициентов СЛАУ, имеющей то же решение, что и предыдущая. Это свойство следует из того, что аналогичную процедуру можно производить с системами линейных алгебраических уравнений.

Определители

Определение: Каждой ***квадратной матрице*** можно поставить в соответствие ***число***, называемое ***определителем матрицы*** и обозначаемое

$$\Delta = \det M = \det\left[a_{ij}\right]_{i=1,\,j=1}^{n,\ n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

В определителе различают ***главную диагональ*** (слева направо, сверху вниз) и ***побочную диагональ*** (слева направо, снизу вверх).

Определитель вычисляется методом разложения по ряду (строке или столбцу) путем сведения определителя n-го порядка к линейной комбинации n определителей $(n-1)$-го порядка. Каждый новый определитель также сводится к вычислению определителей меньшего – уже $(n-2)$-го – порядка…. И так последовательно вычисление определителя любого порядка сведется к вычислению определителей 2-го порядка.

Определители второго порядка

Определение: ***Определителем*** (***детерминантом***) второго порядка называется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \qquad (1)$$

составленное из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - *элементов* определителя. Элементы определителя расположены в строках и столбцах, количество которых <u>всегда совпадает</u>. Индексы i и j элемента a_{ij} указывают на положение элемента в структуре определителя: i - номер строки, j - номер столбца, на пересечении которых расположен элемент. *Порядком* определителя называется содержащееся в нем число строк (столбцов).

Формула (1) задает правило вычисления определителя Δ второго порядка, а именно: ***определитель второго порядка равен разности произведений его элементов первой и второй диагоналей***.

Определители могут быть любого порядка, то есть содержать любое число строк (столбцов). Если все элементы определителя – числа, то определитель также является числом.

Примеры: Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1$ 2) $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 52$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3) = 0$

Определители третьего порядка

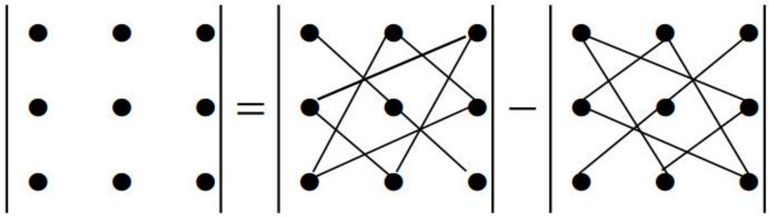
Определение: ***Определителем*** (***детерминантом***) третьего порядка называется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (2)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}aa_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Числа a_{ij} - элементы определителя, они расположены в трех строках и трех столбцах его (***ряды определителя***). Первый индекс i указывает номер строки, а второй j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Используемое в формуле (2) правило вычисления определителя третьего порядка (правило треугольника) схематично можно представить в виде



Определение: ***Минором*** M_{mn} элемента a_{mn} определителя называется определитель на единицу меньшего порядка, образованный из исходного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Элемент определителя занимает *четное место*, если сумма номеров его строки и столбца есть четное число, и *нечетное место*, если эта сумма есть нечетное число.

Определение: ***Алгебраическим дополнением*** (минором со знаком) A_{mn} элемента a_{mn} определителя называется минор этого элемента взятый со знаком плюс, если элемент занимает четное место, и со знаком минус, если его место нечетное, т.е

$$A_{mn} = (-1)^{m+n} M_{mn}$$

Знаки алгебраических дополнений элементов определителей третьего порядка можно задать следующей таблицей:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ТЕОРЕМА Разложения определителя по элементам некоторого ряда: *Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения* (под рядом понимается строка или столбец).

Т.е. для определителя третьего порядка имеем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= \qquad (3)$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=$$

$$=a_{31}A_{11}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=\ldots$$

Доказательство:

Непосредственным вычислением для разложения по первой строке получим:

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}=\Delta$$

(по определению).

Для второго столбца:

$$a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=\ldots=\Delta$$

(по определению). Ч.Т.Д.

Таким образом, на ряду с формулой (2) для вычисления определителя третьего порядка можно пользоваться данной теоремой. При разложении по первой строке имеем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Определители старших порядков также вычисляются с использованием теоремы разложения.

Можно вычислять определитель третьего порядка также присоединив к исходной матрице снизу две ее первых строки

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

выделить в направлении главной диагонали три линии, соединяющие три элемента, перемножить элементы каждой из линий и сложить со знаком «+», затем, аналогично, в направлении побочной диагонали перемножить по три элемента, стоящих на соответствующих прямых и сложить со знаком «–».

Свойства определителей

Свойства определителей не зависят от их порядка, причем свойства, сформулированные для строк, справедливы и для столбцов. Приведем без доказательства несколько основных свойств определителя.

1. Равноправность строк и столбцов.

Определитель не меняет своего значения при замене всех его строк соответствующими столбцами, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух параллельных рядов определителя его абсолютная величина сохраняет прежнее значение, а знак меняется на обратный.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\Delta$$

3. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Если определитель имеет две одинаковых или пропорциональных строки (столбца) он также равен нулю.

Доказательство: Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вынося множитель первой строки, получим определитель с двумя совпадающими строками. Поменяв местами эти строки, в силу свойства 2 получим определитель $-\Delta$. Но, очевидно, что эта операция определитель не изменяет, поэтому $\Delta = -\Delta$ и, следовательно, $\Delta = 0$.

5. Определители, у которых равны нулю все элементы одной строки или столбца, равны нулю.

6. Если все элементы какого-либо ряда умножить на любое число и просуммировать их с соответствующими элементами параллельного ряда, то значение определителя не изменится.

Примеры: Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 6 & 15 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6\cdot 5 - 2\cdot 15 = 0$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 8\cdot 3 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 6\cdot 8\cdot 1 =$

$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0$

Другой способ (разложение по элементам третьей строки) по формуле (3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7(12-15) - 8(6-12) + 9(5-8) =$$

$= -21 + 48 - 27 = 0$

Третий способ вычисления с использованием свойств определителей: Вычитаем из 3 столбца 2-ой столбец и из 2-го столбца 1-ый столбец (значение определителя при этом не меняется – св-во 6)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=0 (по свойству 4)

3) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -7 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{43}{2} & -12 \end{vmatrix} =$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 43 & -24 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{6} & 4 \\ 0 & \frac{115}{24} & 1 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix}=115$$

В примере используется метод приведения к треугольному виду, который состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований получить нули под главной диаганалью. В этом случае определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Современные компьютерные средства позволяют мгновенно осуществлять различные действия с матрицей. Например, пакет программ MAXIMA дает возможность вводить матрицу, а затем вычислять ее определитель.

Так команда **M:matrix([1,2,3],[-1,0,-2],[0,-1,3]);** вводит матрицу размера 3×3, а затем команда **determinant(M);** вычисляет определитель этой матрицы.

Обратная матрица

С использованием определителя вводится понятие обратной матрицы.

Определение: Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель $\Delta \neq 0$.

Если квадратная матрица A невырожденная, то можно построить для нее обратную матрицу A^{-1}.

Определение: ***Обратной матрицей*** квадратной матрицы A называют матрицу A^{-1}, для которой выполняется соотношение $A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=E$.

Если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где Δ - определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Свойства обратной матрицы:

1. Пусть определитель матрицы A равен $\det A$, определитель матрицы A^{-1} равен $\det(A^{-1})$, тогда $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$,

2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,

3. $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$.

Для построения обратной матрицы с помощью пакета программ MAXIMA необходимо использовать команду **invert:** для матрицы, введенной по команде **M:matrix([1,2,3],[-1,0,-2],[0,-1,3]);** находим обратную по команде **invert(M).**

Рангом матрицы

Определение: ***Рангом матрицы*** называют порядок наибольшего не равного нулю определителя, составленного из ее элементов.

Свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Для вычисления ранга матрицы с помощью пакета программ MAXIMA используют команду rank: для матрицы, введенной по команде **M1:matrix([1,2,3],[-1,0,-2],[0,-1,3],[-1,0,-1]);** ранг матрицы вычислим по команде **rank(M1); (3).**

Системы линейных алгебраических уравнений

Определение: ***Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)***, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа $a_{ij}, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами системы, а x_j – неизвестные, которые подлежат нахождению.

Решить систему уравнений значит найти числа x_j, $j=1,\ldots,n$ такие, что при подстановке в исходную систему уравнений каждое уравнение системы обратится в тождество. Решение может быть неединственным.

Определение: Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Определение: Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется ***частным решением системы***.

Совокупность всех частных решений называется общим решением.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Определение: Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение.

Определение: Система уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется ***нулевым*** или ***тривиальным***.

Решение систем линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных осуществляется методами, использующими понятия определителя и матрицы.

Решение СЛАУ с помощью матриц

Систему n уравнений относительно n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + ... + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + ... + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + ... + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases} \tag{9}$$

можно представить в матричном виде. Для этого зададим матрицу коэффициентов A, вектор-столбцы неизвестных X и свободных членов B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ & & .... & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (9) принимает вид:

$$A\cdot X = B \tag{10}$$

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

Предположим, что матрица A коэффициентов системы (10) невырождена ($\det A \neq 0$). Для решения матричного уравнения (10) умножим его слева на матрицу A^{-1}, обратную к A:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B.$$

Учитывая, что $A^{-1}\cdot A = E$ и $E\cdot X = X$, получим решение

$$X = A^{-1}\cdot B. \tag{11}$$

Таким образом, решение определенной (имеющей единственное решение) системы уравнений сводится к вычислению произведения обратной матрицы системы и столбца свободных членов.

Пример:

Решить систему $\begin{cases} 2x_1+6x_2-7x_3=13 \\ 3x_1-4x_2+5x_3=9 \\ 7x_1+2x_2+5x_3=37 \end{cases}$

Запишем систему в матричном виде $A\cdot X=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

Основной определитель этой системы уравнений совпадает с определителем матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}=2(-30)-6(-20)-7(34)=-178.$$

Подсчитаем алгебраические дополнения элементов определителя:

$$A_{11}=-30,\ A_{12}=20,\ A_{13}=34,$$
$$A_{21}=-44,\ A_{22}=59,\ A_{23}=38,$$
$$A_{31}=2,\ A_{32}=-31,\ A_{33}=-26$$

Тогда

$$A^{-1}=-\frac{1}{178}\begin{pmatrix} -30 & -44 & 2 \\ 20 & 59 & -31 \\ 34 & 38 & -26 \end{pmatrix}$$

и по формуле (11):

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-\frac{1}{178}\begin{pmatrix} -30 & -44 & 2 \\ 20 & 59 & -31 \\ 34 & 38 & -26 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 37 \end{pmatrix}=-\frac{1}{178}\begin{pmatrix} -30\cdot 13-44\cdot 9+2\cdot 37 \\ 20\cdot 13+59\cdot 9-31\cdot 37 \\ 34\cdot 13+38\cdot 9-26\cdot 37 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{178}\begin{pmatrix} -712 \\ -356 \\ -178 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Ответ: $x_1=4,\ x_2=2,\ x_3=1$.

Метод Крамера решения СЛАУ

Построим решение системы двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (5)$$

относительно неизвестных x, y методом исключения одной из неизвестных. Для этого умножим перовое уравнение на a_{22}, второе на $(-a_{12})$ и сложим:

$$x(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + y(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

После чего получим: $x(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Аналогично для y: $y(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -b_1a_{21} + b_2a_{11}$.

Если выражение $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$, то система (5) имеет единственное решение

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\ . \qquad (6)$$

Если выражение $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$, система может не иметь решений (быть несовместной), или иметь бесчисленное множество решений.

Приведенный прием решения задачи можно использовать и при большем числе уравнений и неизвестных, но его реализация становится весьма затруднительной. Для упрощения этого процесса вводятся определители.

Полученное выше решение (6) можно записать через определители второго порядка

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Эти формулы называют ***формулами Крамера***.

Определитель Δ, стоящий в знаменателе этих формул, составленный из коэффициентов при неизвестных называют ***основным определителем системы***, поскольку от его значения зависит, совместна ли система уравнений, имеет ли она единственное решение, или их бесчисленное множество. Действительно, решение (7) получено из формул (см. вывод (6))

$$x \cdot \Delta = \Delta_x,\ y \cdot \Delta = \Delta_y \qquad (8)$$

Используя формулы (7),(8), получим следующие выводы:

1) При $\Delta \neq 0$ справедливы формулы (7), которые дают единственное решение задачи.

2) При $\Delta = 0$ обратимся к формулам (8), из которых имеем:

А) если $\Delta_x \neq 0$ (или $\Delta_y \neq 0$), то приходим к противоречию в уравнении для переменной x (или y), а, следовательно, решения системы не существует.

Итак, система несовместна, если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$.

Б) если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то уравнения (8) обращаются в тождества при любых значениях x и y. То есть система имеет бесчисленное множество решений.

Метод Крамера для систем с большим числом неизвестных

Для случая линейных систем из n уравнений относительно n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \end{cases}$$

формулы Крамера также справедливы и имеют вид

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = 1,\ldots,n,\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

где Δ - главный определитель системы n-го порядка, а Δ_j – также определитель n-го порядка, отличающийся от Δ j-м столбцом: он заменен столбцом из свободных членов $b_i,\ i = 1,\ldots,n$.

Метод Крамера для систем с тремя неизвестными

Пусть $n = 3$ и система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ и } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда решение системы имеет вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Примечание.

1) Метод Крамера применим при решении систем практически любого порядка, если число неизвестных совпадает с числом уравнений и основной определитель системы не равен нулю.

2) В случае $\Delta = 0$ метод Крамера приводит к большому объему вычислений, поэтому обычно используются другие методы.

Пример:

1) Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 13 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 9 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 37 \end{cases}$.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(-30) - 6(-20) - 7(34) = -178.$$

Определитель Δ отличен от нуля, следовательно, система имеет одно решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 6 & -7 \\ 9 & -4 & 5 \\ 37 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 13(-30) - 11(44) + 37(2) = -712,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 3 & 9 & 5 \\ 7 & 37 & 5 \end{vmatrix} = -13(-20) + 9(59) - 37(31) = -356,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 13 \\ 3 & -4 & 9 \\ 7 & 2 & 37 \end{vmatrix} = 13(34) - 9(-38) + 37(-26) = -178.$$

Получим: $x_1 = \dfrac{-712}{-178} = 4,\ x_2 = \dfrac{-356}{-178} = 2,\ x_3 = \dfrac{-178}{-178} = 1$.

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$.

2) Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 13 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 22 \end{cases}$.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 6(-31) - 7(26) = 0.$$

Пользуясь 4-ым и 6-ым свойствами определителя (см. стр 8,9), вычислим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 6 & -7 \\ 9 & -4 & 5 \\ 22 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 6 & -7 \\ 9 & -4 & 5 \\ 9 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 3 & 9 & 5 \\ 5 & 22 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 3 & 9 & 5 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 13 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & 2 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 13 \\ 3 & -4 & 9 \\ 3 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: система неопределенна и имеет бесконечное множество решений.

Метод Гаусса решения СЛАУ

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots + a_{3n}\cdot x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m. \end{cases} \qquad (12)$$

Метод Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных состоит из двух этапов: прямой ход и обратный ход.

На прямом ходе система приводится к виду, при котором матрица системы имеет треугольный вид – под главной диагональю все элементы равны 0. Этого можно добиться путем использования элементарных преобразований: умножением строк на число и сложением строк.

Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Исключим переменную x_1 из остальных уравнений системы. Для этого умножим первое уравнение системы (12) на $-a_{21}/a_{11}$ и прибавим ко второму, в результате получим уравнение, в котором коэффициент при x_1 обращается в ноль, т.е. переменная x_1 исключается из этого уравнения. Аналогично поступим с третьим уравнением (12), прибавляя к нему первое уравнение умноженное на $-a_{31}/a_{11}$ и т.д. Преобразовав все уравнения, приходим к системе, эквивалентной исходной (12):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ \qquad + a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 + \ldots + a'_{2n}\cdot x_n = b'_2, \\ \qquad + a'_{32}\cdot x_2 + a'_{33}\cdot x_3 + \ldots + a'_{3n}\cdot x_n = b'_3, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + a'_{m2}\cdot x_2 + a'_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a'_{mn}\cdot x_n = b'_m, \end{cases} \qquad (13)$$

где $a'_{ik}(i = 2,3,\ldots,m;\ k = 2,3,\ldots,n)$ – новые коэффициенты.

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$ и оставляя неизменными первые два уравнения системы (13), преобразуем ее так, чтобы в остальных уравнениях коэффициенты при x_2 обратились в нуль. Продолжая таким образом исключать неизвестные, систему (13) можно привести к одной из следующих сиситем:

$$\begin{cases} c_{11}\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + c_{13}\cdot x_3 + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}\cdot x_2 + c_{23}\cdot x_3 + \ldots + c_{2n}\cdot x_n = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}\cdot x_3 + \ldots + c_{3n}\cdot x_n = d_3, \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}\cdot x_n = d_n, \end{cases} \tag{14}$$

где $c_{ij}(i, j = 1,2,3,\ldots,n)$ – некоторые коэффициенты, d_i – свободные члены;

$$\begin{cases} c_{11}\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + c_{13}\cdot x_3 + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}\cdot x_2 + c_{23}\cdot x_3 + \ldots + c_{2n}\cdot x_n = d_2, \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad c_{kk}\cdot x_k + \ldots + c_{kn}\cdot x_n = d_k, \end{cases} \tag{15}$$

где $k < n$;

$$\begin{cases} c_{11}\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + c_{13}\cdot x_3 + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}\cdot x_2 + c_{23}\cdot x_3 + \ldots + c_{2n}\cdot x_n = d_2, \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad 0\cdot x_n = d_k, \end{cases} \tag{16}$$

где $k \le n$.

Система (14) имеет единственное решение. Оно отыскивается **на обратном ходе**: начиная с последнего уравнения и последовательно доходя до первого, используем их для нахождения неизвестных. Из последнего уравнения (14) выражается x_n, значение x_{n-1} – из предпоследнего и т.д. Определив $x_2, x_3, \ldots, x_n$, из первого уравнения находят x_1.

Система (15) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения системы можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $n-k$ неизвестных ($x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$), входящих в это уравнение; из предпоследнего уравнения можно выразить x_{k-1} через эти неизвестные и т.д. В полученных формулах, выражающих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения.

Система (16) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять последнему уравнению.

Итак, преимуществом метода Гаусса является то, что он применим к любой системе линейных уравнений.

Для простоты применения метода приведенные преобразования совершают над ***расширенной матрицей системы*** – матрицей составленной из коэффициентов системы $a_{ij}(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ и свободных членов $b_j(j=\overline{1,m})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Прямая черта отделяет матрицу системы от столбца свободных членов.

Примеры:

1) Решить систему $\begin{cases} x_1+6x_2-7x_3=9 \\ 2x_1-4x_2+5x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=21 \end{cases}$.

Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 21 \end{array}\right).$$

Осуществим прямой ход метода Гаусса, т.е. приведем матрицу к треугольному виду. Для этого сначала получим нули в первом столбце под элементом $a_{11}=1$, стоящим на главной диагонали. Выберем множитель k для первой строки так, чтобы при сложении со второй строкой (поэлементно!) первый элемент второй строки обратился в ноль: $k=-2$. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 21 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot k \\ \lrcorner + \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & 13 \\ 3 & 2 & 5 & 21 \end{array}\right)$$

Аналогично, суммируем элементы третьей строки с элементами первой строки, умноженной на $k=-3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 21 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot k \\ \\ \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & -16 & 26 & -6 \end{array}\right)$$

Осталось получить нуль во втором столбце под главной диагональю: умножим вторую строку на $k=-1$ и суммируем ее элементы с соответствующими элементами третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & -16 & 26 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot k \\ \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Прямой ход выполнен. Оформляют его следующим образом

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & -16 & 26 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система

$$\begin{cases} x_1+6x_2-7x_3=9 \\ -16x_2+19x_3=-13, \\ 7x_3=7 \end{cases}$$

из которой легко выражаются неизвестные в обратном порядке x_3, x_2, затем x_1 (обратный ход):

$$7x_3=7 \qquad \Rightarrow x_3=1$$

$$-16x_2+19x_3=-13 \Rightarrow x_2=\frac{-13-19x_3}{-16} \Rightarrow x_2=\frac{-32}{-16}=2$$

$$x_1+6x_2-7x_3=9 \quad \Rightarrow x_1=9-6x_2+7x_3 \Rightarrow x_1=9-12+7=4$$

Ответ: $x_1=4,\ x_2=2,\ x_3=1$.

2) Решить систему $\begin{cases} x_1+6x_2-7x_3=9 \\ 2x_1-4x_2+5x_3=5 \\ 3x_1-14x_2+17x_3=1 \end{cases}$

Осуществим прямой ход метода Гаусса, собирая нули под главной диагональю.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & -14 & 17 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & -32 & 38 & -26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

После первого шага прямого хода получили, что вторая и третья строка совпадают с точностью до множителя и на втором шаге элементы третьей строки обращаются в нули. Получаем тождество

$0x_3 = 0$. Следовательно, x_3 может принимать любые значения, а остальные неизвестные выражаются через x_3. Система в этом случае является неопределенной и имеет бесконечное множество решений:

$$x_3 = t,\ x_2 = \frac{-13-19t}{-16},\ x_1 = 9 - \frac{3(13+19t)}{8} + 7t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3) Решить систему $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5 \\ \quad 16x_2 - 19x_3 = 2 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 16 & -19 & 2 \end{array}\right)$$

Осуществим прямой ход метода Гаусса, т.е. приведем матрицу к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 16 & -19 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & 16 & -19 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right)$$

В третьей строке получили противоречие $0x_3 = -11$, так как не существует таких значений x_3. Следовательно, система несовместна. Решений нет.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

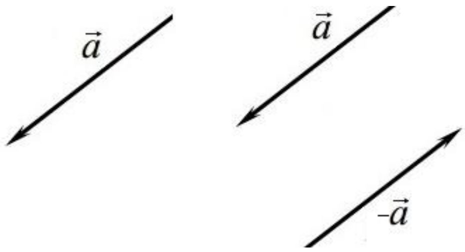
Векторы

Определение: ***Скалярная величина (скаляр)*** определяется одним параметром – величиной, например, 3, -5, 3.14 и так далее.

В дальнейшем скаляры будем обозначать буквами и так далее.

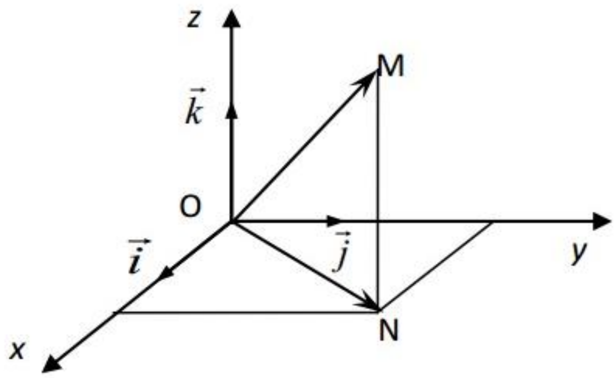
Определение: ***Вектор*** – это направленный отрезок, характеризуемый двумя параметрами – длиной и направлением. Векторы обозначают следующим образом: $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$.

В последнем случае говорят «вектор с началом в точке А и концом в точке В». Это не означает, что у вектора фиксированы начальная и конечная точка. Тот же вектор (с той же длиной и тем же направлением) можно параллельно перенести, и тогда у него будут другие начало и конец. Геометрически конец вектора традиционно обозначают стрелкой.



Векторы, параллельные друг другу, имеющие одинаковые длины, но противоположно направленные, называются взаимно противоположными и при записи различаются знаками.

Для того чтобы задать вектор в пространстве, проще всего поместить его начало в начало координат, тогда координаты конечной точки вектора полностью определят вектор. Поэтому векторы можно задавать с помощью координат.

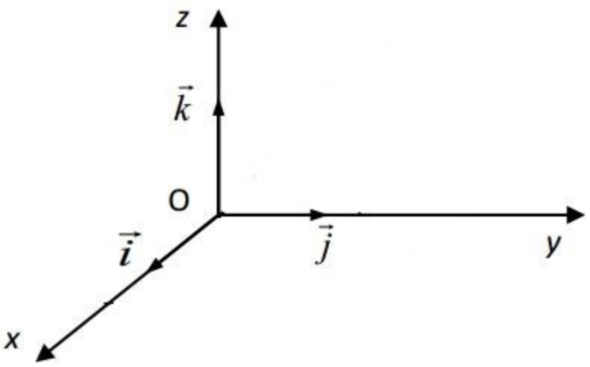


$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, если $O(0,0,0)$, $M(x, y, z)$

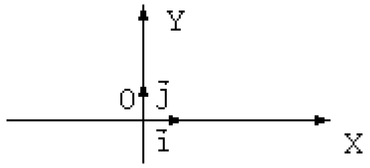
Таким образом, ***координаты*** – это проекции вектора на координатные оси.

Используя координаты вектора, легко получить его длину (расстояние от конца до начала): $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Простейшими векторами в пространстве являются векторы единичной длины, имеющие направления координатных осей. Они называются ***ортами*** и обозначаются $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Эти векторы имеют следующие координаты: $\bar{i}(1,0,0)$, $\bar{j}(0,1,0)$, $\bar{k}(0,0,1)$.



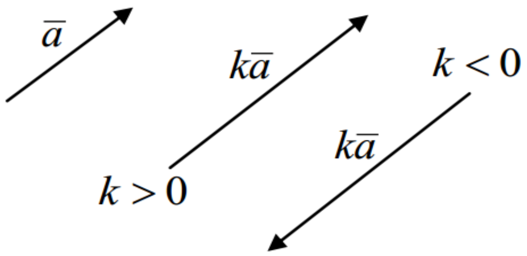
В случае вектора на плоскости XOY используются две координатные оси и каждый вектор имеет две координаты. В этом случае ортами являются векторы $\bar{i}(1,0)$, $\bar{j}(0,1)$.



Кроме того, имеет смысл ввести нулевой вектор $\vec{0}$ – вектор, имеющий нулевую длину и не имеющий направления.

Линейные преобразования векторов

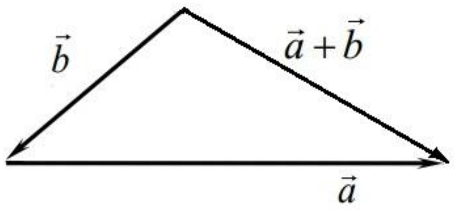
1) Умножение вектора на число. Умножение вектора на положительное число $k > 0$ означает умножение длины вектора на это число при сохранении направления вектора. Умножение вектора на отрицательное число $k < 0$ означает умножение длины вектора на число $|k|$ и замена направления вектора на противоположное.



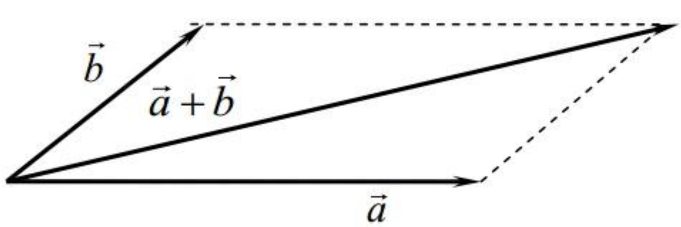
При умножении на число координаты вектора умножаются на это число: $\bar{a} = (x, y, z), \;\; k \cdot \bar{a} = (k \cdot x, \, k \cdot y, \, k \cdot z)$.

2) Сложение векторов. Вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ может быть получен одним из следующих способов.

А) Приставим начало вектора $\bar{b}$ к концу вектора $\bar{a}$, а затем соединим начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$. Полученный вектор, конец которого совпадает с концом вектора $\bar{b}$ и является вектором $\bar{c}$. Очевидно, что результат суммирования не зависит от перестановки слагаемых $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

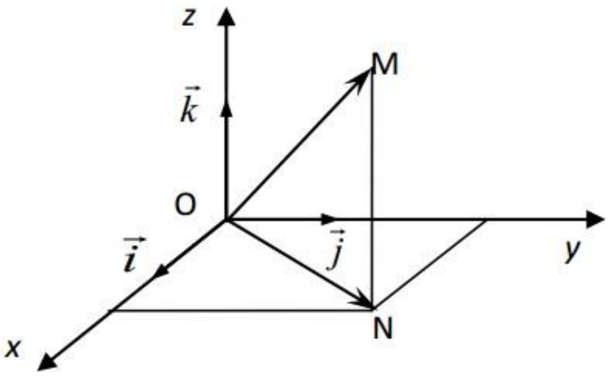


Б) Поместим начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в одну точку. Если считать эти векторы сторонами параллелограмма, то вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ будет диагональю того же параллелограмма, причем начало вектора будут находиться в точке, совпадающей с началами векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



При сложении векторов их соответствующие координаты складываются: если вектор $\bar{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а вектор $\bar{b}$ координаты (x_2, y_2, z_2), то вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ имеет координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Нетрудно показать, используя свойства подобных треугольников, что линейные преобразования векторов удовлетворяют следующему равенству: $\lambda\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\cdot\bar{a}+\lambda\cdot\bar{b}$.

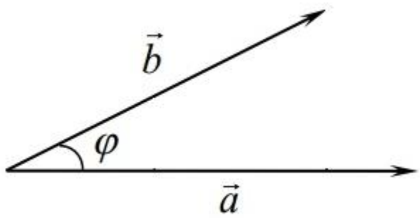
3) Разложение вектора по базису в трехмерном пространстве и на плоскости. Используя координаты вектора и орты, легко заметить, что вектор $\bar{a}$ с координатами (x,y,z) представляет собой следующую линейную комбинацию векторов-ортов: $\bar{a}=x\cdot\bar{i}+y\cdot\bar{j}+z\cdot\bar{k}$.



Такое представление вектора называется разложением вектора по базису, где ***базисом*** является набор ортов $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$. В случае вектора на плоскости XOY базисом является набор $(\bar{i},\bar{j})$. В соответствии с количеством векторов базиса плоскость называется двумерным пространством, а пространство – трехмерным пространством.

Скалярное произведение векторов

Определение: ***Скалярным произведением*** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является ***число***, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними: $(\bar{a},\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.



Из определения скалярного произведения следует, что $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$. Заметим, что в силу взаимной перпендикулярности скалярное произведение двух разных ортов равно нулю, а скалярный квадрат орта равен 1.

Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$,

2) $((\bar{a}_1+\bar{a}_2),\bar{b})=(\bar{a}_1,\bar{b})+(\bar{a}_2,\bar{b})$.

Найдем выражение скалярного произведения с помощью координат. Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а вектор $\bar{b}$ координаты (x_2, y_2, z_2). Их разложения по базису имеют вид $\bar{a}=x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}$ и $\bar{b}=x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}$, соответственно. Применяя свойства скалярного произведения, получим $(\bar{a},\bar{b})=(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k})\cdot(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k})=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$.

Используя скалярное произведение двух векторов, легко найти угол между этими векторами. В соответствии с определением скалярного произведения

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|},$$

следовательно,

$$\varphi=\arccos\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}.$$

Условие взаимной перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=0.$$

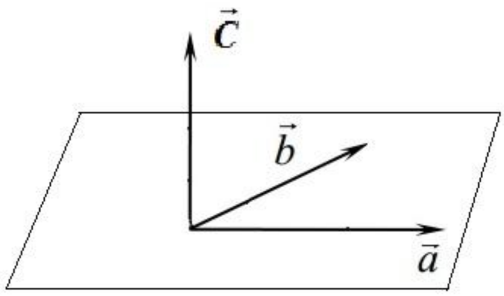
Векторное произведение векторов

Определение: ***Векторным произведением*** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является ***вектор*** $\bar{c}$, обладающий следующими свойствами:

1) его длина равна произведению длин двух векторов на синус меньшего угла между ними,

2) он перпендикулярен плоскости, в которой лежат оба исходных вектора, а значит, перпендикулярен каждому из исходных векторов,

3) его направление выбрано так, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют ***правую тройку***. То есть если направить средний палец правой руки по вектору $\bar{a}$, а большой – по вектору $\bar{b}$, то указательный примет направление вектора $\bar{c}$.



Обозначение векторного произведения: $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ или $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

Из определения имеем:

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi,\ [\bar{a}, \bar{a}] = 0,\ [\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}].$$

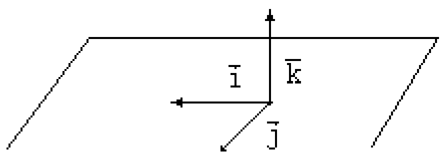
Кроме того, справедливы свойства:

1) $[\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}] = [\bar{a}_1, \bar{b}] + [\bar{a}_2, \bar{b}]$,

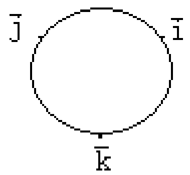
2) $[\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}] = \lambda \cdot [\bar{a}, \bar{b}]$.

Нетрудно заметить, что

$[\bar{i}, \bar{j}] = -[\bar{j}, \bar{i}] = \bar{k}$, $[\bar{j}, \bar{k}] = -[\bar{k}, \bar{j}] = \bar{i}$, $[\bar{k}, \bar{i}] = -[\bar{i}, \bar{k}] = \bar{j}$.



Запомнить, какой орт получается как векторное произведение двух других ортов, легко, если пользоваться следующей схемой.



Если при движении от первого в векторном произведении вектора ко второму мы движемся против часовой стрелки, результатом векторного произведения будет третий вектор со знаком «+», если по часовой стрелке, то третий вектор со знаком «–».

Представляя векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с координатами, соответственно, (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) в виде разложения по базису $\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$ и пользуясь свойствами векторного произведения, получим:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) \cdot \bar{i} + (z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2) \cdot \bar{j} + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \cdot \bar{k}.$$

Запомнить векторное произведение в координатной форму проще всего с применением определителя:

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

В правой части последнего равенства находится определитель третьего порядка.

Нетрудно доказать, что это модуль векторного произведения $[\overline{a},\overline{b}]$ совпадает с площадью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из определения векторного произведения следует, что ***векторное произведение двух ненулевых векторов*** $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ ***равно нулю тогда и только тогда, когда векторы*** $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ ***параллельны.***

Пример:

1) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(3,4,5)$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=?$

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=\overline{i}(2\cdot 5-4\cdot 3)-\overline{j}(1\cdot 5-3\cdot 3)+\overline{k}(1\cdot 4-3\cdot 2)=(-2,4,-2)$$

Смешанное произведение векторов

Определение: ***Смешанным произведением*** трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$.

Из определений скалярного и векторного произведений следует, что ***если все три вектора*** $\overline{a}$***,*** $\overline{b}$ ***и*** $\overline{c}$***, участвующие в смешанном произведении, лежат в одной плоскости, то*** $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0$**.**

Если координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равны, соответственно, (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) и (x_3,y_3,z_3), то смешанное произведение вычисляется с помощью определителя третьего порядка:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Нетрудно доказать, что абсолютная величина смешанного произведения трех векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Векторы произвольной размерности

По аналогии с двумерными и трехмерными векторными пространствами рассматривают векторные пространства X размерности n, где n – произвольное натуральное число. Такой вектор уже не изобразишь графически, и представляет он собой упорядоченный набор из n координат: $x=(x^1,x^2,...,x^n)$. При записи многомерного вектора верхнюю стрелку над буквой не изображают.

Операции с n-мерными векторами:

1) умножение на число: $\alpha\cdot x=(\alpha\cdot x^1,\alpha\cdot x^2,...,\alpha\cdot x^n)$,

2) сложение: $x+y=(x^1+y^1,x^2+y^2,...,x^n+y^n)$,

3) скалярное произведение: $(x,y)=x^1\cdot y^1+x^2\cdot y^2+...+x^n\cdot y^n$.

Определение: Пространство векторов, в котором заданы такие операции, называется ***евклидовым пространством***. Аналогом длины вектора x в таком пространстве является **норма** вектора, которая равна $\|x\|=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+...+(x^n)^2}$.

Базис в векторном пространстве

Мы использовали понятие базис применительно к двумерным и трехмерным векторам как систему, соответственно, двух или трех взаимно ортогональных векторов единичной длины: $\bar{i}$, $\bar{j}$ в случае векторов на плоскости и $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ в случае векторов в пространстве.

Однако в качестве базиса на плоскости могут служит любые два ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ плоскости, не лежащие на одной прямой, так как любой вектор $\bar{c}$ на плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса: $\bar{c}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{b}$. Действительно, сравнивая координаты векторов в левой и правой частях последнего равенства, мы сведем задачу определения коэффициентов α, β к решению линейной системы из двух уравнений с ненулевым главным определителем.

В качестве базиса в трехмерном пространстве могут служить любые три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ пространства, не лежащие в одной плоскости, так как любой вектор $\bar{d}$ в пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации $\bar{d} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c}$. Коэффициенты α, β, γ могут быть определены как решение линейной системы из трех уравнений с ненулевым главным определителем.

Вообще, ***базисом в*** n***-мерном пространстве*** векторов называется такой набор из n ненулевых векторов этого пространства, что любой вектор данного пространства может быть представлен как линейная комбинация векторов базиса.

Необходимое и достаточное условие того, что набор из n векторов представляет базис, является ***отличие от нуля определителя из координат векторов набора.*** Это условие обеспечивает ***линейную независимость*** векторов набора. То есть невозможность найти такую линейную комбинацию векторов набора, которая приводила бы к нулевому вектору.

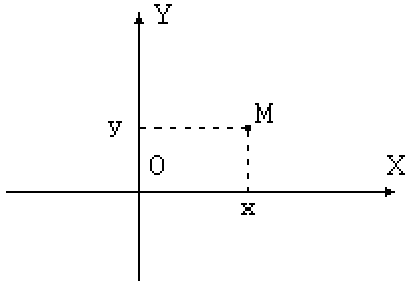
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Точка на прямой

Точка M на прямой (шкале) задается одним числом (координатой), указывающим, на сколько единиц длины точка M удалена от начальной точки O. На шкале должно быть задано положительное направление движения. Если точка M удалена в положительном направлении от O, то координата берется со знаком «+», если в направлении, противоположном положительному направлению, то координата берется со знаком «–». Примером является **шкала температур**, где температуры определяются с определенным знаком.

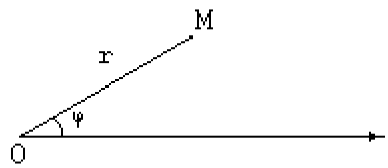
Точка на плоскости

Для задания точки на плоскости приходится использовать две шкалы, называемые координатными осями (ось абсцисс и ось ординат), пересекающимися в точке O, называемой началом координат. Традиционно изображают взаимно перпендикулярные оси координат OX и OY, причем ось OX изображают горизонтально, а ось OY вертикально. Обычно принято задавать такие направления положительных движений по осям, что положительное направление оси OX после поворота на 90^0 против часовой стрелки совпадает с положительным направлением оси OY.



Произвольная точка M на плоскости задается координатами (x, y) ее проекций на координатные оси. Каждая проекция получается проведением через M прямой, параллельной оси, до пересечения с другой осью. Такая система координат называется **декартовой** (по имени знаменитого математика и философа Рене Декарта, жившего в 17 веке).

Другим способом задания точки на плоскости является задание точки в **полярной** системе координат. Для задания такой системы координат следует задать направленный луч (называемый **полярной осью)**, который обычно изображают горизонтальным, направленным вправо. Положение точки М на плоскости задают расстоянием до начала луча (полярный радиус точки r) и углом, на который следует повернуть луч, чтобы точка оказалась на нем (полярный угол точки φ).



Полярные координаты точки М (r,φ) имеют следующие особенности: первая координата неотрицательна, а вторая координата неоднозначна, так как вместо угла φ можно взять угол $\varphi+2\pi k$ при любом целом k.

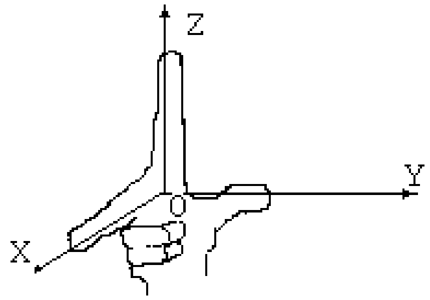
Связь между декартовыми и полярными координатами осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

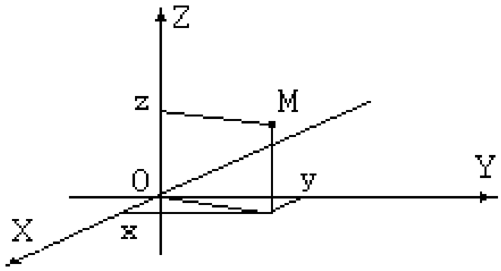
Точка в пространстве

Для задания точки в пространстве требуется уже 3 координаты.

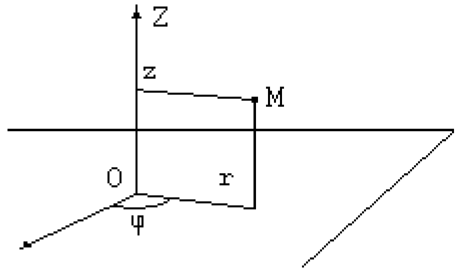
В случае ***декартовой системы координат*** мы строим 3 оси координат, традиционно взаимно перпендикулярные. Кроме того, обычно задают координатные оси OX, OY и OZ, составляющие **правую тройку.** Это означает, что если средний и большой пальцы правой руки, направить, соответственно, вдоль осей OX и OY в положительном направлении, то указательный палец правой руки укажет положительное направление оси OZ.



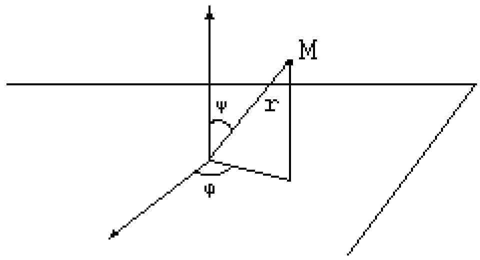
Координаты точки М (x, y, z) в пространстве определяется проекциями точки на соответствующие оси, причем проекции получаются проведением через М плоскостей, параллельных координатным плоскостям, до пересечения с координатными осями.



Другой координатной системой является ***цилиндрическая система координат***. При такой системе координат задается координатная плоскость и перпендикулярная ей координатная ось. На плоскости задаются полярные координаты, причем начало полярной оси находится в точке О пересечения заданной координатной оси с заданной координатной плоскостью. Проекция точки на плоскость задается полярными координатами. Проекция точки на заданную ось определяет третью координату. Таким образом, точка М задается координатами (r, φ, z). Связь между цилиндрическими координатами и декартовыми координатами следующая: аппликата z в декартовых и в цилиндрических координатах одна и та же, а координаты r и φ связаны с координатами x и y так же, как связаны декартовы и полярные координаты на плоскости.



Еще одна координатная система в пространстве – ***сферическая система координат***. Здесь также задаются плоскость и перпендикулярная ей ось. В точке их пересечения ставится точка О. Из точки О в заданной плоскости проводится полярная ось. Точка М в пространстве задается расстоянием r до точки О (выбор радиуса сферы), углом ψ, который отрезок, соединяющий точку О с точкой М, образуют с заданной осью (выбор параллели), а также углом, который образует проекция отрезка ОМ на заданную плоскость с полярной осью (выбор меридиана).



Связь между сферическими и декартовыми координатами осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi, \\ y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi, \\ z = r\cdot\cos\psi, \end{cases} \qquad \varphi\in[0,2\pi],\ \psi\in[0,\pi].$$

Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками проще всего измерять с помощью декартовых координат в прямоугольной системе благодаря теореме Пифагора.

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, x_1 и x_2 расположены на прямой, то расстояние между ними определяется по формуле:

$$\rho(M_1,M_2) = |\,x_1 - x_2\,|.$$

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) расположены на плоскости, то

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) расположены в пространстве, то

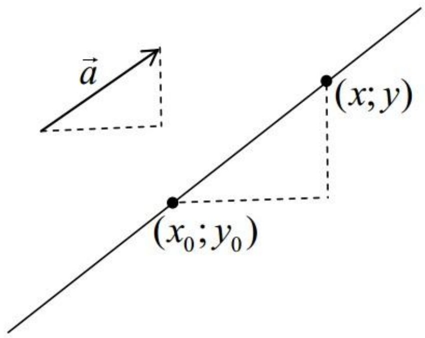
$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\ .$$

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, $(x^1{}_1, x^2{}_1, ..., x^n{}_1)$ и $(x^1{}_2, x^2{}_2, ..., x^n{}_2)$ расположены в n-мерном пространстве, то расстояние между ними равно

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k{}_1 - x^k{}_2)^2}\ .$$

Прямая

Определение: Простейшей плоской кривой является ***прямая*** – геометрическое место точек, соединив любые две из которых, мы получим отрезок, параллельный заданному вектору.



Рассмотрим прямую в плоскости XOY. Фиксировать прямую, параллельную данному вектору $\bar{a}$ с координатами (α, β) мы сможем, задав одну точку с координатами (x_0, y_0), через которую прямая проходит. Выберем на прямой произвольную точку с координатами (x, y). Тогда из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}\ . \qquad (1)$$

Соотношение (1) называют ***каноническим уравнением прямой***, оно является основой для получения разных видов уравнения прямой на плоскости.

Приравнивая обе части (1) переменной t, $-\infty \le t \le +\infty$, мы получим ***параметрическое уравнение прямой***:

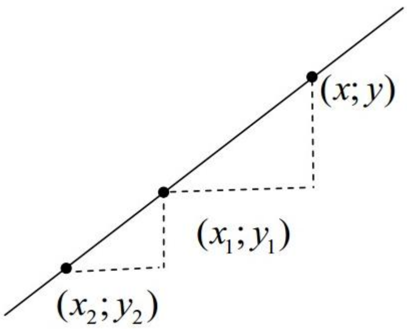
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t. \end{cases}$$

Вводя угловой коэффициент прямой $k = \beta / \alpha$ (тангенс угла, образуемого прямой с положительным направлением OX), мы получим из (1) ***уравнение прямой с угловым коэффициентом:***

$$y = y_0 + k \cdot (x - x_0).$$

Приравнивая нулю координаты направляющего вектора α и β, получим **прямые, параллельные координатным осям**: $x = x_0$ и $y = y_0$.

Прямая на плоскости может задаваться не только точкой и направляющим вектором, но и двумя различными точками.



Составляя пропорции сторон подобных треугольников, получим соотношение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это линейное соотношение представляет собой ***уравнение прямой, проходящей через две различные точки***.

Частным случаем последнего уравнения является уравнение прямой, проходящей через точки, расположенные на осях координат. Пусть прямая проходит через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$. Легко заметить, что ее уравнение принимает вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, называемое **уравнением прямой в отрезках** (имеются в виду отрезки, отсекаемые на осях).

Любая прямая на плоскости XOY представляется линейным уравнением вида

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0.$$

И наоборот, любое линейное уравнение вида $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ ***описывает прямую на плоскости XOY.***

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые, задаваемы уравнениями $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$.

Возможны следующие случаи взаимного расположения этих прямых:

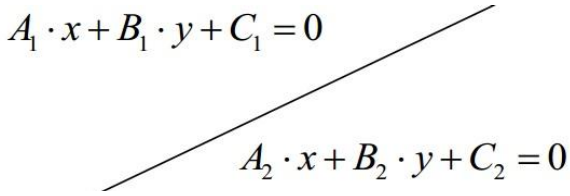
1) прямые совпадают,

2) прямые параллельны,

3) прямые пересекаются в одной точке.

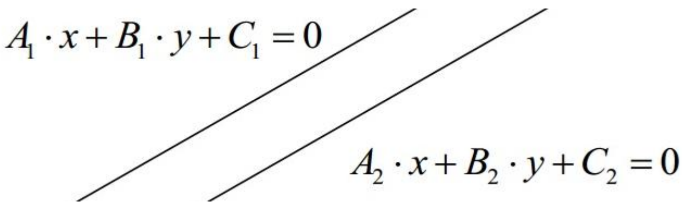
Исследуем соотношение между коэффициентами уравнений прямых в каждом из перечисленных случаев.

В случае 1) оба уравнения, описывающие одну и ту же прямую, должны совпадать или отличаться коэффициентом, на который можно сократить.



Таким образом, в данном случае $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

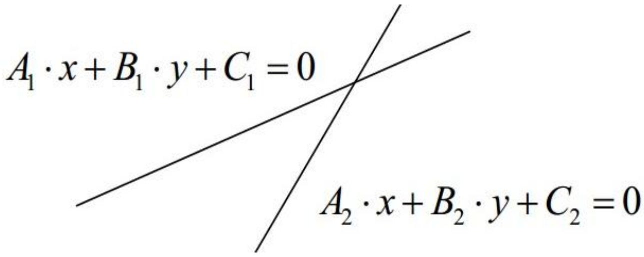
В случае 2) угловые коэффициенты обеих прямых одинаковы.



То есть, $k = -\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{A_2}{B_2}$. Отсюда получим условие параллельности:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

В случае 3) угловые коэффициенты прямых разные, то есть, $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, и, следовательно, прямые пересекаются в одной точке.



Точка пересечения двух прямых на плоскости находится решением системы уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Сравните рассмотренные случаи со случаями разрешимости системы из двух уравнений с двумя неизвестными.

Кривые второго порядка

Определение: ***Кривой второго порядка*** называется кривая, описываемая уравнением второй степени, то есть уравнением, в которое переменные x и y входят с суммарной степенью не более 2:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0.$$

Обратное неверно: не любое уравнение второй степени задает реальную кривую.

Так, если в уравнении $x^2 + 4y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ выделить полные квадраты, мы получим уравнение $(x-1)^2 + (2y-1)^2 = -1$, которому не может удовлетворить никакая точка из плоскости XOY с координатами (x, y).

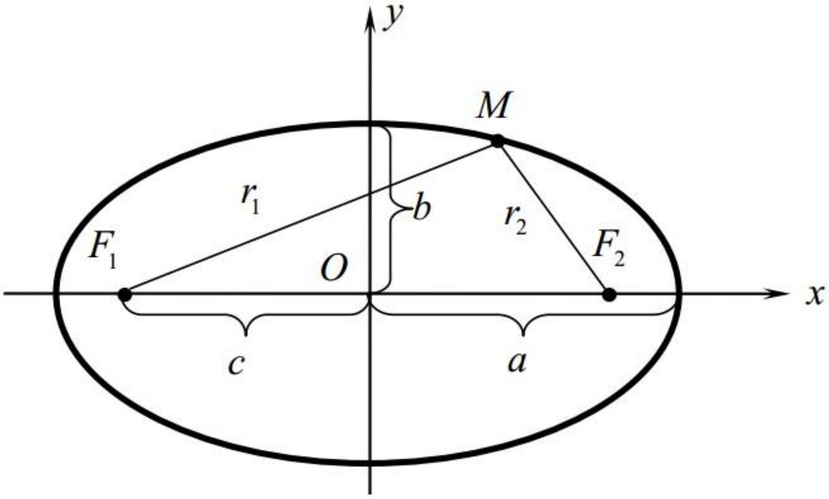
Существуют ***три основных уравнения второй степени***, задающие (с точностью до сдвига и поворота координатных осей) ***три основные кривые второго порядка: эллипс, гиперболу и параболу*.**

1. Эллипс

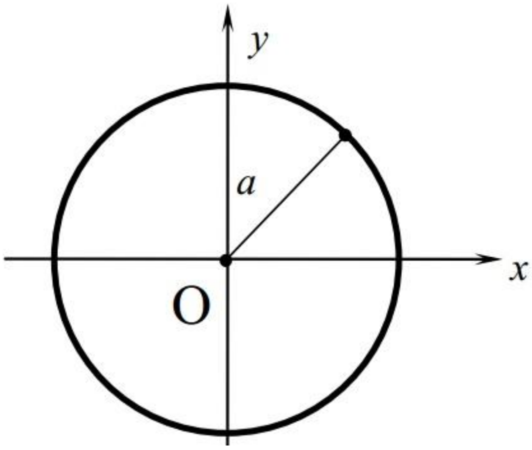
Каноническое уравнение эллипса, приведенное к координатным осям, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эллипс пересекает ось OX в точках $\pm a$, а ось OY в точках $\pm b$. Нетрудно видеть, что вместе со значением x уравнению удовлетворяет и $-x$, а вместе с y и $-y$. Следовательно, эллипс – кривая, симметричная относительно осей координат.



Значения a и b называются полуосями эллипса. В случае, когда полуоси равны, эллипс превращается в окружность $x^2 + y^2 = a^2$.



Как известно, ***окружность*** – геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром окружности.

Определение: ***Эллипс*** – геометрическое место точек, сумма $r_1 + r_2$ расстояний от которых до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная. Фокусы эллипса, уравнение которого приведено выше, расположены на оси OX в точках $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$, если $a > b$, и на оси OY в точках $\pm\sqrt{b^2 - a^2}$, если $b > a$.

Параметрическое задание эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos t, \\ y = b\cdot\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Для изображения эллипса с полуосями 5 и 3 с помощью MAXIMA воспользуемся параметрическим представлением эллипса и командой **plot2d([parametric,5*cos(t),3*sin(t),[t,0,2*%pi]])**.

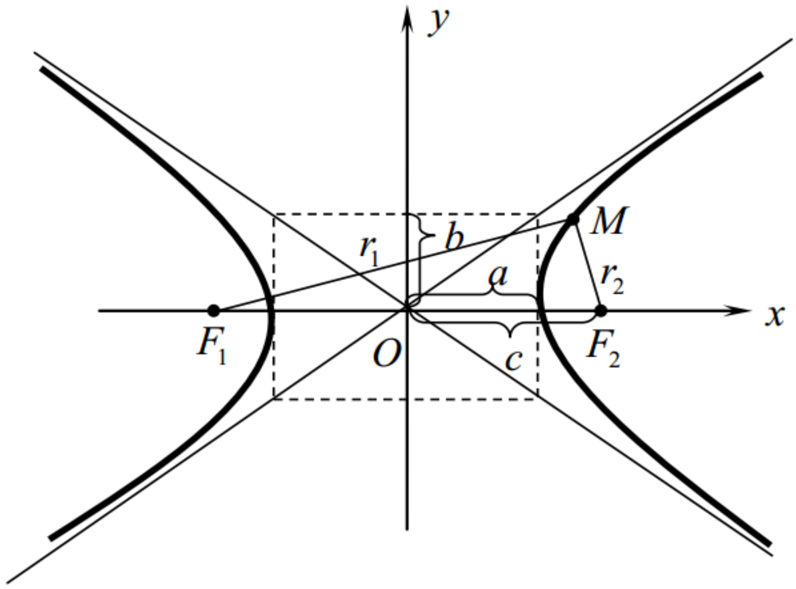
2. Гипербола

Определение: ***Гиперболой*** называют геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы, приведенное к координатным осям, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

если фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на оси OX в точках $\pm\sqrt{a^2+b^2}$. В этом случае гипербола пересекает ось OX в точках $\pm a$, а ось OY не пересекает.

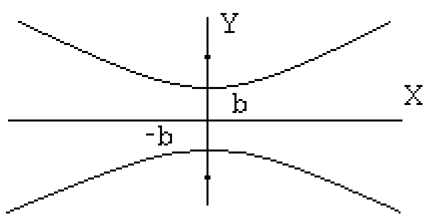


В отличие от эллипса, расположенного в конечной части плоскости, гипербола – кривая, ветви которой уходят в бесконечность.

В том случае, когда фокусы гиперболы расположены в точках $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ на оси OY, гипербола задается ***каноническим уравнением***

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

она пересекает ось OY в точках $\pm b$ и не пересекает ось OX.



Параметрическое задание гиперболы, пересекающей ось OX:

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Параметрическое задание гиперболы, пересекающей ось OY:

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{sh} t, \\ y = \pm b \cdot \operatorname{ch} t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Здесь функции $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ – гиперболические синус и косинус, соответственно, имеющие представление

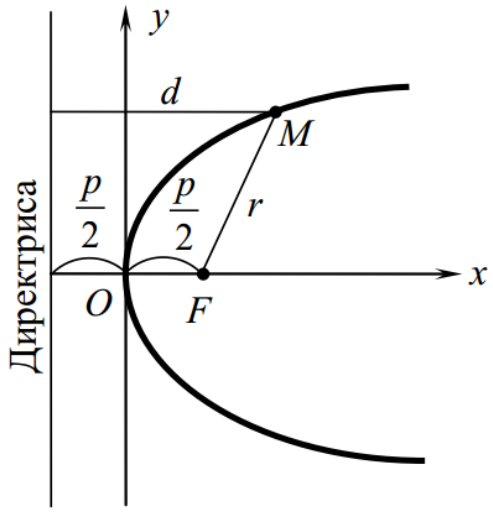
$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \ \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

и удовлетворяющие соотношению $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

Для изображения правой ветви гиперболы с полуосями 5 и 3 с помощью MAXIMA воспользуемся параметрическим представлением эллипса и командой **plot2d([parametric,5*cosh(t),3*sinh(t),[t,-2,2]])**.

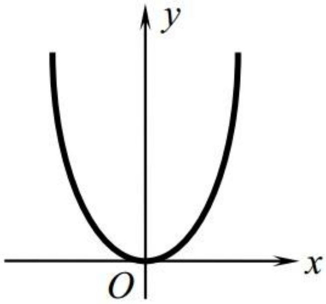
3. Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии r от данной точки F, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и осью симметрии OY имеет вид $y = A \cdot x^2$. В случае $A > 0$

парабола расположена в верхней полуплоскости, в случае $A < 0$ – в нижней полуплоскости.



Уравнение параболы с осью симметрии OX имеет вид $x = B \cdot y^2$.

В качестве **параметрического задания** можно взять

$\begin{cases} x = t, \\ y = A \cdot t^2, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$, в первом случае и

$\begin{cases} x = B \cdot t^2, \\ y = t, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$, во втором случае.

То есть роль параметра играет одна из декартовых координат.

Для изображения параболы $y = 3x^2$ с помощью MAXIMA воспользуемся явным представлением параболы и командой **plot2d(3*x^2,[x,-2,2])**.

Любое уравнение вида $A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$, если оно имеет смысл, приводится путем линейной замены переменных вида

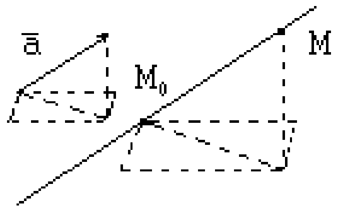
$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot \tilde{x} - \sin\alpha \cdot \tilde{y} + \beta, \\ y = \sin\alpha \cdot \tilde{x} + \cos\alpha \cdot \tilde{y} + \gamma, \end{cases}$$

к уравнению одного из трех перечисленных типов относительно $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Указанная линейная замена переменных означает сдвиг, растяжение и поворот новых декартовых координатных осей относительно старых.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве

Определение прямой как геометрического места таких точек, что отрезок, соединяющий любые две из них, параллелен заданному вектору, сохраняется и для случая пространственных прямых. Единственная разница в том, что заданный вектор $\bar{a}$ имеет уже три координаты (α,β,γ), заданная точка прямой M_0 имеет три координаты (x_0, y_0, z_0), и переменная точка прямой M также имеет три координаты (x, y, z).



Поэтому, используя подобие соответствующих треугольников, мы вместо соотношения (1) получим двойное равенство

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}. \qquad (2)$$

Приравнивая все части (2) переменной t, $-\infty \le t \le +\infty$, мы получим ***параметрическое уравнение пространственной прямой***:

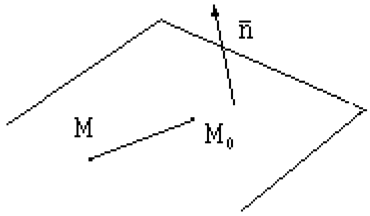
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + \gamma \cdot t, \end{cases}$$

Второй способ задания пространственной прямой – как геометрическое место точек пересечения двух плоскостей – мы сможем использовать после знакомства с плоскостями.

Плоскость

Определение: Простейшей из пространственных поверхностей является ***плоскость*** – геометрическое место таких точек, что отрезок, соединяющий любые две из них, перпендикулярен данному вектору, называемому ***нормалью к плоскости***.

Зададим плоскость с данной нормалью $\bar{n}$ (A,B,C) с помощью точки M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0), лежащей в этой плоскости.



Если взять произвольную, отличную от M_0, точку M с координатами (x, y, z) в данной плоскости, то согласно определению и условию взаимной перпендикулярности двух векторов имеем $\overline{\mathrm{MM}_0} \cdot \bar{n} = 0$. Используя координаты этих векторов получим условие взаимной перпендикулярности в виде

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$

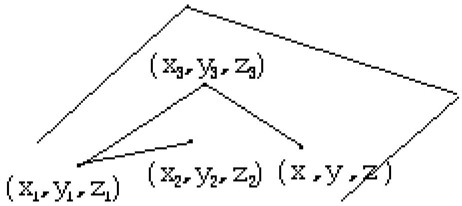
Последнее уравнение и есть ***уравнение плоскости, проходящей через данную точку***. В частности, уравнения плоскостей, параллельных координатным плоскостям, имеют вид $x = x_0$, $y = y_0$ или $z = z_0$.

В случае, когда какой-то из коэффициентов уравнения плоскости отличен от нуля, можно выразить соответствующую координату через две другие координаты, например, при $C \neq 0$

$$z = z_0 - \frac{A}{C} \cdot (x - x_0) - \frac{B}{C} \cdot (y - y_0).$$

Такое уравнение может считаться ***параметрическим заданием плоскости***, где в качестве двух независимых параметров выступают две из координат, а третья линейно выражается через два параметра.

Плоскость в пространстве может задаваться не только нормалью и одной точкой, но и тремя различными точками, с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), через которые она проходит.



Рассматривая три вектора, лежащие в одной плоскости, получим в соответствии со свойством смешанного произведения соотношение

$$\begin{vmatrix} (x-x_1) & (y-y_1) & (z-z_1) \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ (x_3-x_1) & (y_3-y_1) & (z_3-z_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Если разложить определитель по верхней строке, получим линейную комбинацию разностей $(x-x_1)$, $(y-y_1)$ и $(z-z_1)$, то есть линейное уравнение относительно координат переменной точки плоскости x, y и z.

Любая плоскость в пространстве XYZ представляется линейным уравнением вида

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0.$$

И наоборот, любое линейное уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ задает плоскость.

Упражнение. Выведите уравнение плоскости «в отрезках»: плоскости, отсекающей на координатных осях, соответственно, отрезки длиной a,b и c.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ и прямую

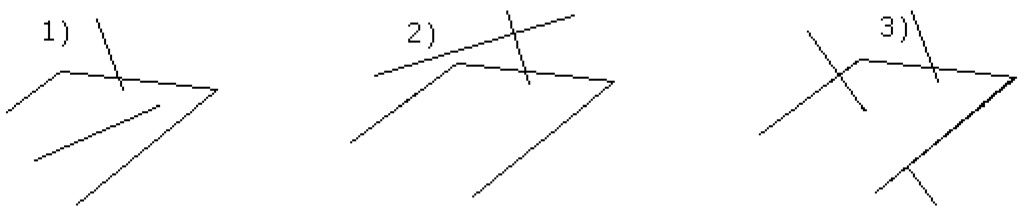
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + \gamma \cdot t. \end{cases}$$

Возможны следующие ***варианты взаимного расположения прямой и плоскости:***

1) прямая лежит в плоскости,

2)прямая параллельна плоскости, то есть не пересекает плоскость,

3) пересекать плоскость в единственной точке.



В случае 1) направляющий вектор прямой и нормаль к плоскости взаимно перпендикулярны, то есть, $\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C = 0$, и существует общая точка у прямой и плоскости (существование одной такой точки обеспечивает принадлежность всех точек прямой данной плоскости);

В случае 2) $\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C = 0$ и на прямой существует точка, не лежащая в плоскости (существование такой точки обеспечивает то, что все точки прямой не принадлежат данной плоскости);

В случае 3) $\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C \neq 0$.

Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость с уравнением $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ и точку с координатами $\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\right)$. Расстоянием от заданной точки до заданной плоскости является длина перпендикулярного к плоскости отрезка с концом в заданной точке. Таким образом, следует провести через заданную точку $\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\right)$ прямую, перпендикулярную заданной плоскости. Параметрическими уравнениями такой прямой являются уравнения

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + A \cdot t, \\ y = \tilde{y} + B \cdot t, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = \tilde{z} + C \cdot t, \end{cases}$$

Найдем то значение параметра t_0, при котором прямая пересекает заданную плоскость. При этом значении параметра точка прямой становится точкой плоскости, то есть,

$$A \cdot \left(\tilde{x} + A \cdot t_0\right) + B \cdot \left(\tilde{y} + B \cdot t_0\right) + C \cdot \left(\tilde{z} + C \cdot t_0\right) + D = 0.$$

Выражая t_0 из последнего уравнения, получим

$$t_0 = -\frac{A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C \cdot \tilde{z} + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Следовательно, основанием перпендикуляра, опущенного из заданной точки $\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\right)$ на заданную плоскость, является точка с координатами $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, где

$$x_0 = \tilde{x} - \frac{A \cdot \left(A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C \cdot \tilde{z} + D\right)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y_0 = \tilde{y} - \frac{B \cdot \left(A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C \cdot \tilde{z} + D\right)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z_0 = \tilde{z} - \frac{C \cdot \left(A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C \cdot \tilde{z} + D \right)}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Осталось найти расстояние между точками $\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \right)$ и $\left(x_0, y_0, z_0 \right)$:

$$d = \frac{\left| A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C \cdot \tilde{z} + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Таким образом, чтобы вычислить расстояние от точки до плоскости, следует взять модуль левой части уравнения плоскости с заданными координатами точки и разделить на корень из суммы квадратов коэффициентов уравнения плоскости при переменных.

Взаимное расположение двух плоскостей

Возможны следующие ***варианты взаимного расположения*** двух плоскостей, представленных уравнениями

$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$:

1) плоскости совпадают,

2) плоскости параллельны,

3) плоскости пересекаются.

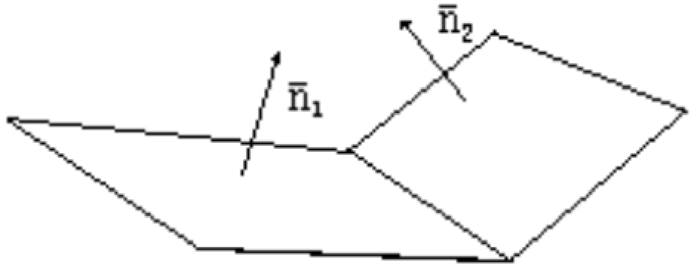
В случае 1) коэффициенты в уравнениях плоскостей могут отличаться только сомножителем, на который можно сократить. Это означает, что должно выполняться соотношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

В случае 2) нормальные векторы обеих плоскостей должны совпадать, или быть параллельными, но уравнения должны оставаться различными за счет свободных членов. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

В случае 3) нормальные векторы плоскостей не должны быть параллельными. Это значит, что $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2 \neq 0$.



Геометрическим местом точек пересечения двух плоскостей является прямая. Направляющим вектором этой прямой является векторное произведение нормалей к заданным плоскостям.

Упражнение. Запишите параметрическое уравнение прямой, получаемой пересечением плоскостей $2x-y+3z=5$ и $x-4y+z=0$.

Для получения точки пересечения ***трех плоскостей*** следует решить систему

$$\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0, \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0, \\ A_3\cdot x+B_3\cdot y+C_3\cdot z+D_3=0. \end{cases}$$

Мы знаем, что решение единственно, если главный определитель системы отличен от нуля. Система не имеет решений, если ранги главной и расширенной матриц системы различны**.**

Упражнение. Приведите примеры геометрических картин в случаях, когда три плоскости а) пересекаются в одной точке, б) имеют множество точек пересечения – прямую, в) не имеют общих точек. Как эти примеры согласуются с теорией разрешимости систем линейных уравнений с точки зрения определителей?

Поверхности второго порядка

Определение: ***Поверхностью второго порядка*** называют геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени, то есть уравнению, в котором координаты x, y и z входят в суммарной степени не выше 2.

Такое уравнение имеет вид

$$A\cdot x^2+B\cdot x\cdot y+C\cdot y^2+D\cdot x\cdot z+E\cdot y\cdot z+F\cdot z^2+K\cdot x+L\cdot y+M\cdot z+N=0.$$

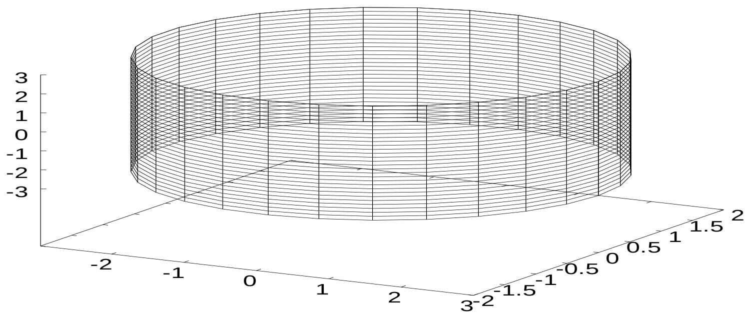
Не всякое уравнение, представляющее линейную комбинацию произведений не более двух переменных, определяет реальную поверхность, а случаев, когда реальная поверхность существует, очень много. Мы рассмотрим несколько типов поверхностей второго порядка.

1. Цилиндрические поверхности.

Уравнение второй степени, не содержащее одной из переменных, задает ***цилиндрическую поверхность***. Например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

задает связь между координатами x и y, но не накладывает ограничений на координату z. В итоге получается поверхность, «вырастающая» из соответствующего эллипса, расположенного в плоскости XOY. Из каждой точки эллипса перпендикулярно плоскости XOY выходит прямая, называемая ***образующей*** данной цилиндрической поверхности. В совокупности эти образующие составляют цилиндрическую поверхность, а сам эллипс называется ***направляющей цилиндрической поверхности***.



Аналогичным способом получаются цилиндрические поверхности из кривых второго порядка, лежащих в других координатных плоскостях.

Для трехмерного изображения цилиндрической поверхности красного цвета высотой 6 с эллипсом, имеющим полуоси 3 и 2, в качестве направляющей, воспользуемся командами

load(draw);

draw3d(color = red, parametric_surface(3*cos(t), 2*sin(t), z, t, 0, 2*%pi, z, -3, 3)).

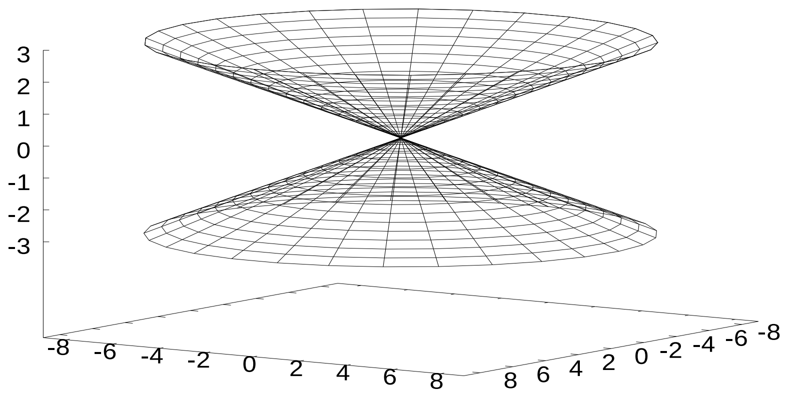
2. Конические поверхности

Определение: ***Коническими поверхностями*** называют поверхности, построенные с помощью ***образующих***, не параллельных друг другу, как в цилиндрических поверхностях, а проходящих через одну и ту же точку и через точки направляющей.

Примером конической поверхности является круговой конус с направляющей – окружностью.

Уравнение кругового конуса с направляющей, лежащей в плоскости, параллельной плоскости XOY, имеет вид

$$z^2 = R^2 \cdot (x^2 + y^2).$$



Для трехмерного изображения конической поверхности коричневого цвета используем команды

load(draw);

draw3d(color=brown,parametric_surface(3*z*cos(t),3*z*sin(t),z,t, 0,2*%pi,z,-3,3)).

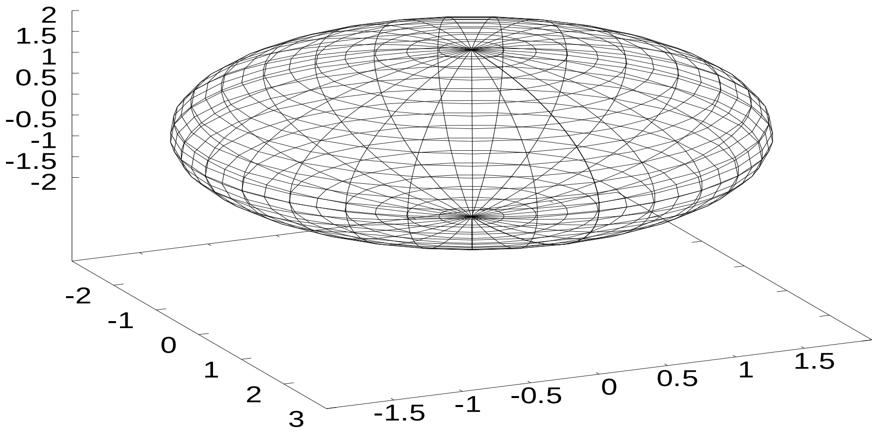
3. Поверхности вращения

Рассмотрим в плоскости XOY эллипс, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Начнем вращать эту кривую относительно оси OX. Кривая опишет поверхность, называемую ***эллипсоидом вращения*** и имеющую уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$



При вращении вокруг оси OX выражение y^2 в уравнении эллипса заменяется на выражение y^2+z^2. Аналогично при вращении вокруг оси OY мы получим эллипсоид вращения с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

Для трехмерного изображения эллипсоида вращения вокруг оси OX голубого цвета используем команды

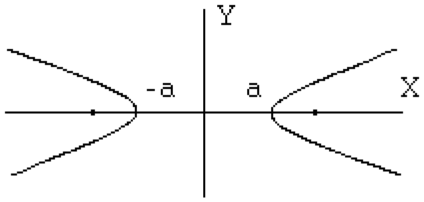
load(draw);

draw3d(color = blue, parametric_surface(3*cos(t)*sin(s), 2*sin(t)*sin(s), 2*cos(s),t,0,2*%pi, s,0,%pi)).

Это поверхность вращения эллипса с полуосями 3 и 2.

Рассмотрим в плоскости XOY гиперболу, описываемую уравнением

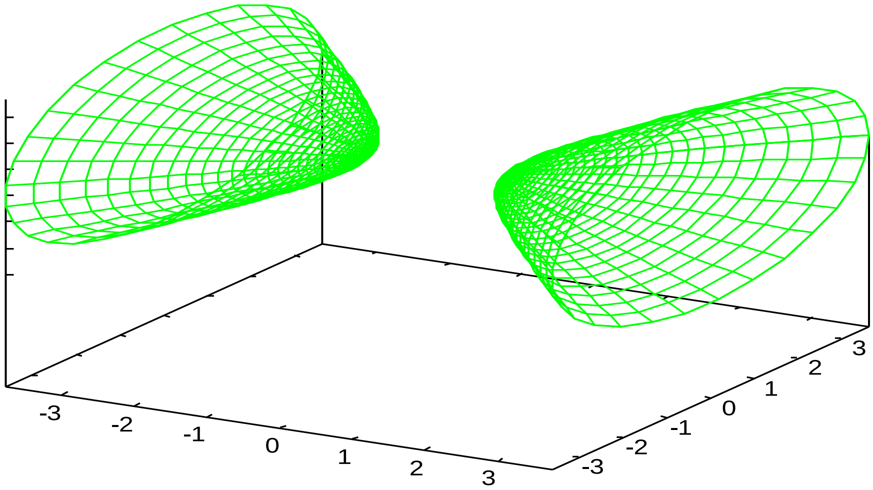
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Будем вращать эту кривую вокруг оси OX. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

и называемую ***двуполостным гиперболоидом вращения***.



Для трехмерного изображения двуполостного гиперболоида вращения вокруг оси OX зеленого цвета используем команды

load(draw);

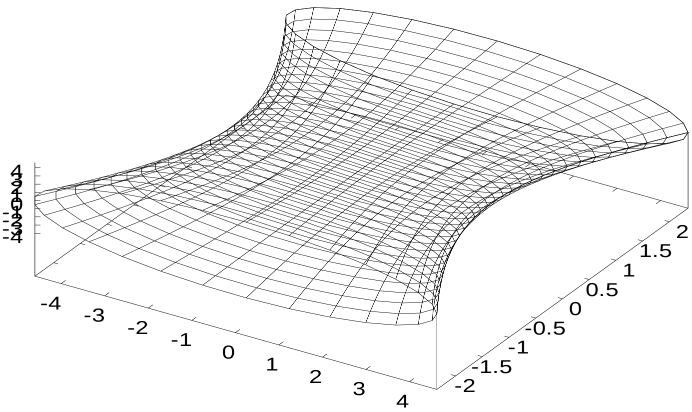
draw3d(color = green, parametric_surface(cosh(u),sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v),u,0,2,v,0,2*%pi), parametric_surface(-cosh(u),sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v),u,0,2,v,0,2*%pi)).

Это поверхность вращения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$.

Будем вращать ту же гиперболу вокруг оси OY. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

и называемую ***однополостным гиперболоидом вращения***.



Для трехмерного изображения однополостного гиперболоида вращения вокруг оси OY темно-зеленого цвета используем команды

load(draw);

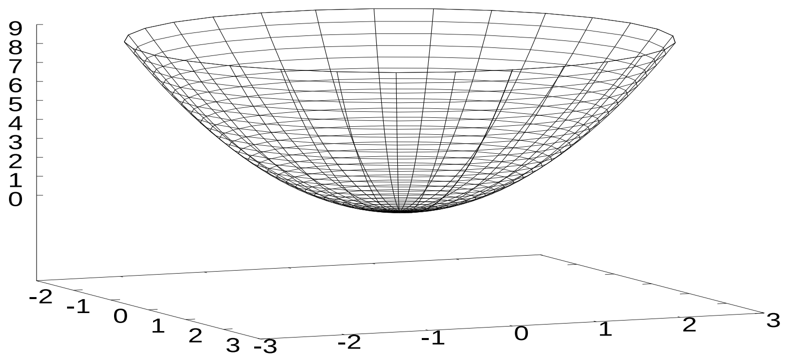
draw3d(color = dark_green, parametric_surface(3*cosh(t)*cos(s),2*sinh(t),3*cosh(t)*sin(s),t,-1,1,s,0,2*%pi)).

Это поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$**.**

Параболоидом вращения называется поверхность вида

$$z = A\cdot(x^2+y^2).$$

Эта поверхность получается вращением лежащей в плоскости XOZ параболы $z = A\cdot x^2$ вокруг своей оси.



Для трехмерного изображения параболоида вращения $z=x^2+y^2$ используем команды **plot3d([r*cos(t),r*sin(t),r^2],[r,0,2],[t,0,2*%pi]).**

4. Поверхности с эллиптическими сечениями

Очевидно, что сечения поверхностей вращения плоскостями, перпендикулярными осям вращения, являются окружностями. В том случае, когда сечениями являются эллипсы, мы имеем поверхности более общего вида, для которых, помимо канонических представлений, приведем параметрические задания поверхностей. Заметим, что в отличие от кривых на плоскости поверхности в пространстве задаются при помощи **двух** параметров.

Эллипсоид задается каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos u \cdot \sin v, \\ y = b \cdot \sin u \cdot \sin v, \; u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]. \\ z = c \cdot \cos v, \end{cases}$$

Двуполостный гиперболоид задается каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot \operatorname{ch} u, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} u \cdot \cos v, \; u \in (-\infty, +\infty), \; v \in [0, 2\pi]. \\ z = c \cdot \operatorname{sh} u \cdot \sin v, \end{cases}$$

Однополостный гиперболоид задается каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} u \cdot \cos v, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} u, \quad u \in (-\infty, +\infty), \; v \in [0, 2\pi]. \\ z = c \cdot \operatorname{ch} u \cdot \sin v, \end{cases}$$

Эллиптический параболоид задается каноническим уравнением:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

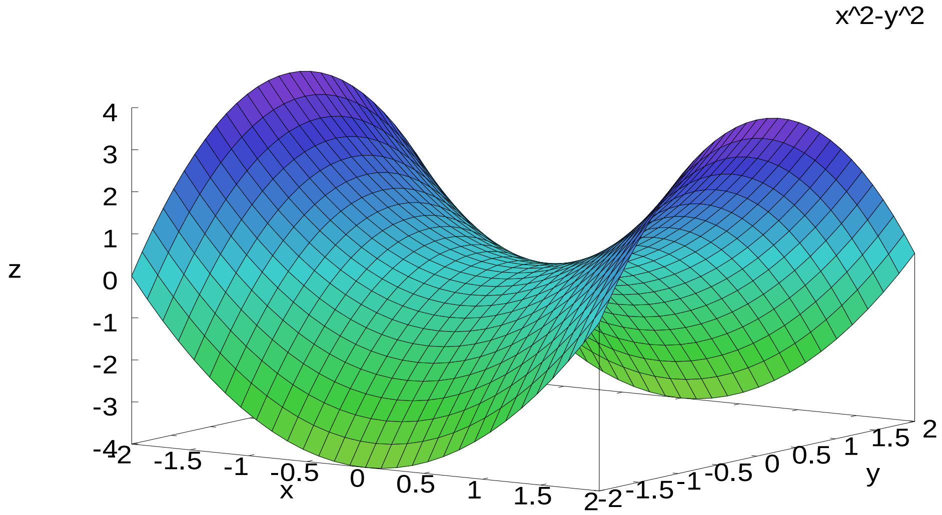
Параметрическое задание либо с использованием переменных x и y в качестве параметров, либо

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos t, \\ y = b \cdot r \cdot \sin t, \; r \in [0, +\infty), \; t \in [0, 2\pi]. \\ z = r^2, \end{cases}$$

Гиперболический параболоид (седло) задается каноническим уравнением:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Параметрическое задание с использованием переменных x и y в качестве параметров.



Для трехмерного изображения параболоида вращения $z = x^2 - y^2$ используем команды **plot3d(x^2-y^2,[x,-2,2],[y,-2,2])** .

Упражнения. Самостоятельно постройте примеры поверхностей второго порядка с эллиптическими сечениями в трехмерном изображении.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие ***множества*** или ***совокупности*** принадлежит к числу простейших математических понятий. Оно не имеет точного определения. Любое множество задается своими элементами. Примерами являются множество книг в библиотеке или множество студентов, присутствующих на занятии. Обычно множество обозначают заглавными латинскими буквами (A), а его элементы строчными латинскими буквами (a). То, что элемент принадлежит множеству, обозначают так: $a \in A$. Если a не принадлежит A, то этот факт обозначают так: $a \notin A$.

Чтобы задать множество, следует или перечислить его элементы, или указать характеристическое свойство его элементов, то есть такое свойство, которым обладают все элементы множества и только они. Мы уже знакомы со следующими примерами подмножеств вещественных чисел.

Примеры:

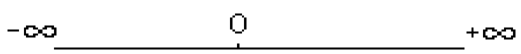
1. Множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$. Из записи следует, что все натуральные числа, начиная с двойки, получаются прибавлением единицы к предыдущему числу.

2. Множество целых чисел: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots\}$.

3. Множество рациональных чисел: $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N \}$.

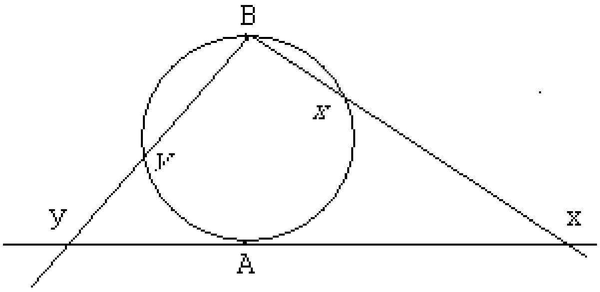
4. Множество всех действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$.

Известной еще древним грекам является интерпретация множества R в виде бесконечной прямой, на которую нанесена точка (O), являющаяся началом отсчета как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Действительные числа – это точки прямой с расстояниями от точки отсчета, равными величинам чисел. Такой интерпретацией мы активно пользуемся со школы, называя положительной бесконечностью ($+\infty$) условный предел при удалении точки по прямой вправо и отрицательной бесконечностью ($-\infty$) условный предел при удалении точки по прямой влево.



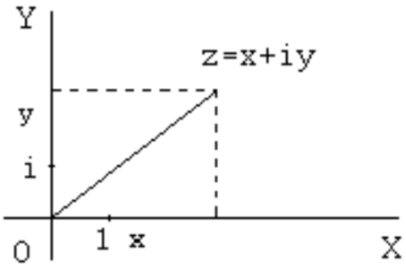
Другой моделью множества R является окружность. Характерной особенностью такой интерпретации является то, что аналогом бесконечности является одна из точек окружности. Покажем, что между точками бесконечной прямой и конечной окружности существует взаимнооднозначное соответствие, позволяющее заменять одну модель на другую.

Представим окружность, касающуюся прямой в точку А, которую мы назовем полюсом. Другим полюсом (В) назовем точку, диаметрально противоположную А. Проводя из В лучи, пересекающие окружность и данную прямую, мы получим взаимнооднозначное соответствие точек окружности и прямой. Полюс А будут соответствовать самому себе. Полюс В будет соответствовать бесконечности. При этом понятия и $-\infty$ будут означать только направление движения к одной и той же точке В, соответствующей бесконечно удаленной точке.

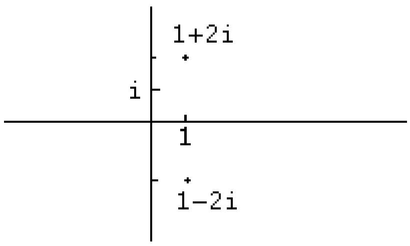


5. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}=\left\{z=x+iy \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$, где i - число, удовлетворяющее свойству $i^2=-1$.

Число i называют ***мнимой единицей***. Очевидно, что такого числа не существует на действительной прямой. Поэтому для интерпретации комплексных чисел используют точки плоскости, на которой введены две координатные оси. Одна совпадает с действительной прямой, и на нее проецируют действительную часть комплексного числа (x). Другая – мнимая ось – перпендикулярна действительной оси, и на нее проецируют коэффициент при i (мнимую часть числа).



Множество действительных чисел R является подмножеством множества C (в случае, когда $y = 0$). Необходимость в комплексных числах возникает уже тогда, когда мы решаем квадратное уравнение и сталкиваемся со случаем отрицательного дискриминанта. Например, решая уравнение $t^2 - 2t + 5 = 0$ с отрицательным дискриминантом. Применяя формулу для получения корней этого уравнения, мы получим $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-4}$. Обозначая, следуя Эйлеру, $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$, имеем $t_{1,2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$. В комплексной плоскости два этих комплексных числа выглядят так:



Два множества равны тогда и только тогда, когда состоят из одних и тех же элементов. Если все элементы множества A содержатся в множестве B, то говорят, что A является **подмножеством** множества B и обозначают $A \subset B$. Поэтому $A = B$ означает, что $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$.

Очевидно, что $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Аксиоматика множества действительных чисел $\mathbb{R}$

1. Аксиомы сложения.

1) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ справедливо $x + y = y + x$.

2) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3) $\exists 0 \in \mathrm{R}$ (нейтральный элемент сложения) такой, что $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x + 0 = x$.

4) $\forall x \in \mathrm{R} \, \exists (-x) \in \mathrm{R}$ такой, что $x + (-x) = 0$.

2. Аксиомы умножения.

1) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ справедливо $x \cdot y = y \cdot x$.

2) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

3) $\exists 1 \in \mathrm{R}$ (нейтральный элемент умножения) такой, что $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x \cdot 1 = x$.

4) $\forall x \in \mathrm{R} \setminus \{0\} \; \exists \dfrac{1}{x} \in \mathrm{R}$ такой, что $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$.

3. Аксиома сложения и умножения.

1) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$.

4. Аксиомы порядка.

1) $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x \le x$.

2) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ таких, что $x \ne y$, справедливо одно из двух соотношений: $x \le y$ или $y \le x$.

3) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le z$, то справедливо соотношение $x \le z$.

4) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$.

5. Аксиомы порядка, связанные с операциями.

1) Если $x \le y$, то для $\forall z \in \mathrm{R}$ справедливо $x+z \le y+z$.

2) Если выполняются одновременно соотношения $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le x \cdot y$.

6. Аксиома непрерывности.

Пусть X и Y – подмножества множества R, причем для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$ справедливо $x \le y$. Тогда $\exists z \in \mathrm{R}$ такое, что $x \le z$ и $z \le y$ для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$.

Все перечисленные аксиомы обеспечивают те свойства вещественных чисел, которыми мы привычно пользуемся.

Последняя аксиома кажется лишней в перечне аксиом. Однако именно эта последняя аксиома позволяет ввести иррациональные числа в множество действительных чисел. Действительно, первые пять аксиом справедливы и для множества рациональных чисел Q, то есть, чисел, представимых в виде отношения $\frac{p}{q}$, где p – целое число, а q – натуральное число. Однако еще древние греки знали, например, что число, квадрат которого равен 2, не является рациональным. Существование иррациональных чисел во множестве R доказывается именно применением аксиомы непрерывности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Функции действительного переменного

Числовые величины могут быть ***переменными*** *и* ***постоянными***, то есть меняющимися или не меняющимися в процессе исследования. Переменные величины могут быть ***независимыми*** и ***зависимыми*** – меняющимися в зависимости от каких-то других величин.

Эти понятия также условны. Если рассмотреть уравнение окружности $x^2 + y^2 = 9$, в нем участвует две переменные величины x и y. Одной из них можно придавать в некоторой области любые значения, другая находится из приведенного уравнения. Следовательно, одну из них можно считать независимой, другую – зависимой переменной. При этом независимой переменной может считаться любая из них, тогда вторая будет зависимой.

Определение: ***Функция*** – это закон, по которому каждому элементу некоторого множества (область определения) ставится в соответствие элемент другого множества (область значений).

Способы задания функции одной переменной

Вернемся к независимым и зависимым переменным. Независимую переменную часто называют ***аргументом***, зависимую – ***функцией***.

Определение: Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathrm{R}$ ставится в соответствие элемент множества $Y \subset \mathrm{R}$, говорят, что на множестве X задана ***функция*** $y = f(x)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Примеры:

1. Показательная функция $y = 2^x,\ x \in \mathrm{R}$.
2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x,\ x > 0$.
3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathrm{R}$.

Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание).

Аналитически функцию можно задать в ***явном виде***

$$y = f(x)$$

(***явное задание функции***), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее ***неявно***

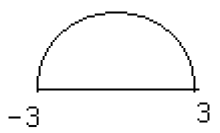
$$F(x, y) = 0,$$

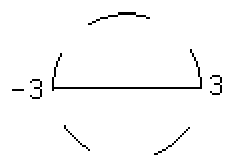
когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией.

Пример:

Уравнение окружности радиуса 3, заданное неявно имеет вид: $x^2 + y^2 = 9$.

Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$ и $y = -\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$. График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй – нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2 + y^2 = 9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке $x \in [-3, 3]$.





Кроме того, возможно ***параметрическое задание функции***

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

когда вводится дополнительный параметр $t \in [t_0, T]$.

Пример:

Параметрическое уравнение окружности с радиусом 3 имеет вид:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Определение: Множество X называется ***областью существования функции***, или областью ее определения.

Определение: Множество Y называется ***областью значений функции***.

Определение: Любое связное подмножество R (то есть такое, что от одной произвольной его точки можно дойти до второй произвольной его точки, оставаясь внутри подмножества) числовой оси называется ***промежутком***.

Определение: Открытый промежуток, не включающий граничных точек, называется ***интервалом*** и обозначается (a, b) или $a < x < b$. **Определение:** Замкнутый промежуток, содержащий все внутренние и граничные точки, называется ***отрезком*** и обозначается $[a, b]$ или $a \leq x \leq b$.

Существуют также ***полуинтервалы*** $[a, b)$ и $(a, b]$. В первом случае в полуинтервал входит только левая граничная точка, во втором – только правая.

Примеры:

1. У функции $y = \sin x$ область существования вся числовая ось то есть $-\infty < x < \infty$, область значений $[-1, 1]$.

2. У функции $y = \sqrt{x}$ область существования $[0, \infty)$ или $x \geq 0$, область значений также $[0, \infty)$.

3. У функции $y = \log_a x$ область существования $(0, \infty)$, область значений $(-\infty, \infty)$.

Функции можно задавать не только на подмножествах R, но и на подмножествах R^2 (функция двух переменных), R^3 (функция трех переменных) и т.д.

Функции на множестве натуральных чисел в комбинаторике

В школьном курсе изучается много функций, задаваемых на вещественной оси или ее подмножествах. Подмножества эти являются отрезками, интервалами, полуинтервалами. В настоящем параграфе мы определим те функции, которые можно рассматривать только на множестве N, и найдем их приложения в ***комбинаторике*** – разделе математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств.

Основой для всех таких функций можно считать ***факториал***:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$$

1. Попробуем решить такую задачу: сколькими способами можно рассадить на n пронумерованных стульях n гостей? На первый стул можно посадить любого из n гостей. Выбрав одного из них, на второй стул можно усадить уже одного из оставшихся (n – 1) претендентов. Выбрав и этого, на третий стул выбираем одного из (n – 2) гостей и т.д.. На последний стул претендент будет только один. Таким образом, если двигаться от конца процесса, мы получим $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n = n!$ вариантов.

Взаимно однозначное отображение конечного упорядоченного множества на себя называется ***подстановкой*** элементов множества. Каждая последовательность элементов конечного множества с учетом порядка называется ***перестановкой*** этих элементов и обозначается P_n. Перестановки не меняют элементов множества или их количества, они меняют порядок элементов. Таким образом, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов P_n = n!.

2. Представим теперь, что, как в предыдущей задаче, у нас n пронумерованных стульев, но мы рассаживаем на них m претендентов, причем m > n. Конечно, всех усадить мы не сможем, но хотим выяснить, сколько имеется вариантов рассаживания. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, видим, что на 1-й стул имеется m претендентов, на второй (m – 1), на третий (m – 2),…., на n-й стул остается (m – n + 1) претендент. Итак, число вариантов

$$(m-n+1) \times (m-n+2) \times ... \times (m-1) \times m = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Любой упорядоченный набор n различных элементов множества, состоящего из m элементов, называется ***размещением из m по n***, число таких размещений обозначается $A_m{}^n$. Таким образом,

$$A_m{}^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. Рассмотрим теперь несколько другую задачу, где мы «раздаем» не сидячие места на пронумерованных стульях (как известно, человек не может сидеть одновременно более, чем на одном стуле), а, например, n раритетных книг группе страстных библиофилов,

состоящей из m человек. Сколько вариантов раздачи n книг m претендентам? На первую книгу у нас m претендентов, на вторую – тоже m претендентов, и так далее. Следовательно, мы имеем m^n вариантов распределения книг между претендентами.

Любой упорядоченный набор n элементов множества, состоящего из m элементов, называется ***размещением с повторением*** из m по n и равен m^n.

4. Вернемся ко второй задаче, где мы рассаживали m человек на n стульях, только теперь у нас стулья не пронумерованы, не отличаются друг от друга, и нас не интересует, где кто сидит, а интересует, сидит человек или стоит. Значит, число вариантов рассаживания совпадает с числом вариантов отбора из m гостей группы счастливчиков, состоящей из n человек, которые смогут сесть на стулья. Решение этой задачи можно связать с решением задачи 2. Представим, что мы решили бы задачу 2 таким образом: отбирали бы группы по n человек, а затем делали бы внутри группы отобранных для сидения n человек всевозможные перестановки, чтобы учесть все варианты рассаживания на пронумерованных стульях. Мы должны были бы получить тот же результат: A_m^n. Следовательно, количество вариантов выбора групп по n человек из m человек равно A_m^n, деленное на число перестановок в группе из n человек, то есть на $n!$.

Любое подмножество из n элементов множества, состоящего из m элементов, называется ***сочетанием из m по n***, и число сочетаний обозначается C_m^n. В соответствии с рассуждениями при решении задачи, $C_m^n = \frac{A_m^n}{n!}$ или $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Последовательности

Определение: Функция одного переменного, заданная на множестве N, называется ***последовательностью***. Значение функции при n=1, называется первым членом последовательности (x_1), значение при n=2 – вторым членом последовательности (x_2), ….

Последовательности бывают числовыми, если все ее элементы – числа и функциональными, когда ее элементы – функции.

Примеры:

1. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ..., \frac{1}{n^2}, ...$ – числовая последовательность.

2. $x, x^2, x^3, ..., x^n, ...$ при $x \in [1,5]$ – функциональная последовательность.

Предел числовой последовательности

Определение: Число a называется ***пределом числовой последовательности*** x_n ($a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$. Произвольность положительного числа ε обеспечивает возможность для членов последовательности x_n с большими номерами n подойти сколь угодно близко к пределу a.

Последовательность, имеющая ***конечный предел,*** называется ***сходящейся последовательностью***. В противном случае последовательность называют расходящейся.

Примеры:

1. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Величина $|\frac{1}{n^2} - 0| = \frac{1}{n^2}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших значениях n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

2. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Величина $|\frac{n}{n+1}-1|=\frac{1}{n+1}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших значениях n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

3. Последовательность $1, 8, 27, ..., n^3, ...$ возрастает с ростом n, стремясь к бесконечности. Конечного предела эта последовательность не имеет. Говорят, что такая последовательность расходится.

4. Последовательность $1, -1, 1, -1, ..., (-1)^{n+1}, ...$ не имеет предела, и значит, расходится.

5. Последовательность $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ...$ является сходящейся, ее предел называется ***числом Непера*** и обозначается буквой e, причем $e \approx 2{,}7182818...$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Определение: Последовательность x_n, $n \in \mathrm{N}$, называется ***бесконечно малой***, если ее предел равен нулю, т.е для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n| < \varepsilon$.

Определение: Расходящаяся последовательность x_n, $n \in \mathrm{N}$, называется ***бесконечно большой***, если для $\forall M > 0$ $\exists N = N(M) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(M)$ справедливо неравенство: $|x_n| > M$. Произвольность числа M позволяет значениям членов последовательности с большими номерами быть сколь угодно большими по абсолютной величине.

Последовательность x_n, $n \in \mathrm{N}$, является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ является бесконечно большой.

Определение: ***Подпоследовательностью*** данной последовательности x_n, $n \in \mathrm{N}$, называется последовательность x_{n_k}, где

$n_k, k \in \mathrm{N}$, – возрастающая с ростом k последовательность натуральных чисел.

Утверждение. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ для любой подпоследовательности $x_{n_k}, k \in \mathrm{N}$.

Последнее свойство и свойство бесконечно малых и бесконечно больших величин используются при вычислении пределов последовательностей.

Примеры:

1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{3n})^n$.

Воспользуемся свойством подпоследовательности сходящейся последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^n = \lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{3n})^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+3n-1}{3n^3+12}$.

Вынося наибольшую степень из числителя и знаменателя, сокращая и пользуясь тем, что отрицательная степень n – бесконечно малая величина при стремлении n к бесконечности, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+3n-1}{3n^3+12} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(5+3n^{-2}-n^{-3})}{n^3(3+12n^{-3})} = \lim_{n\to\infty}\frac{(5+3n^{-2}-n^{-3})}{(3+12n^{-3})} = \frac{5}{3}.$$

Предел функции. Свойства пределов

Последовательность – частный случай функции действительного переменного, так как это функция натурального аргумента. Единственная возможность для натуральных чисел к чему-то стремиться – это уходить в бесконечность. В случае, когда функция $f(x)$ задана на интервале вещественной оси, ее аргумент может неограниченно приближаться к любой определенной точке этого интервала, причем как слева от этой точки или справа от этой точки, так и переходя с одной стороны от точки на другую сторону от нее. Кроме того, даже если аргумент функции действительного переменного уходит в $+\infty$, при этом движении он может принимать любые значения, а не только натуральные.

Определение 1: Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности значений аргумента x_k, стремящейся к a, соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_k)$ сходится к b.

Приведенное определение предела функции в точке, связанное с рассмотрением числовых последовательностей, неудобно тем, что реально невозможно изучить все числовые последовательности, сходящиеся к числу a. Поэтому для исследования существования предела пользуются вторым определением, равносильным первому.

Определение 2: Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, |x-a| < \delta(\varepsilon), \left(\left|f(x)-b\right| < \varepsilon\right)$.

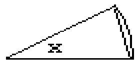
Словесная формулировка приведенной фразы такова: число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного ε существует такое положительное $\delta(\varepsilon)$, что для любого x, для которого выполняется неравенство $|x-a| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $\left|f(x)-b\right| < \varepsilon$.

Пример:

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ в соответствии со вторым определением предела.

Рассмотрим $|\cos x - 1| = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Сравним площади сектора радиуса 1 раствора x и вписанного в него равнобедренного треугольника с той же вершиной, представленных на рисунке.

Площадь треугольника равна $\dfrac{\sin x}{2}$, площадь сектора равна $\dfrac{x}{2}$. Треугольник вписан в сектор, значит площадь треугольника меньше площади сектора. Следовательно, $\sin x < x$ для любого $x > 0$. Отсюда при положительных значениях x имеем неравенство:



$$|\cos x - 1| < \frac{x^2}{2}.$$

При отрицательных значениях x, очевидно, справедливо то же неравенство в силу четности $\cos x$ и x^2. Пусть теперь x стремится к нулю, то есть может принимать сколь угодно малые по абсолютной величине значения. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$. Очевидно, что если $|x| < \delta(\varepsilon)$, то $|\cos x - 1| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Определение 2а: Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, M(\varepsilon) > 0 : \forall x, |x| > M, \left(\left|f(x) - b\right| < \varepsilon\right).$$

Определение: Число называется ***левым пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$ (пределом слева), если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x,\ 0 < a - x < \delta(\varepsilon),\ \left(\left|f(x) - b\right| < \varepsilon\right).$$

Обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Определение: Число b называется ***правым пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$ (пределом справа), если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x,\ 0 < x - a < \delta(\varepsilon),\ \left(\left|f(x) - b\right| < \varepsilon\right).$$

Обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Функция имеет предел в точке, если левый и правый пределы в этой точке совпадают.

Пример: $y = 2^{1/(x-1)}$ Вычислить $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{1/(x-1)}$.

Поскольку $x < 1$, показатель степени отрицательный, следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{2^{-\frac{1}{(x-1)}}} = 0.$$

Теперь показатель степени положительный и при $x \to 1$ стремится к $+\infty$, ясно, что левый предел исходной функции при $x \to 1$ равен нулю. В то же время правый предел

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{1/(x-1)} = +\infty,$$

так как показатель степени положителен и стремится к $+\infty$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 1} 2^{1/(x-1)}$ не существует, так как при подходе к предельному значению аргумента слева и справа получаем разные значения, одно из которых – бесконечность.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение: Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией*** (бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Определение: Функция $A(x)$ называется ***бесконечно большой функцией*** (бесконечно большой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \infty$.

При введенных обозначениях функция $\dfrac{1}{A(x)}$ при $x \to x_0$ бесконечно малая, а $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая.

Определение: Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка малости*** при $x \to x_0$, если:

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, причем $0 < |K| < \infty$.

Определение: Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Определение: Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Известны следующие **свойства** бесконечно малых:

1) Сумма конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.

2) Произведение бесконечно малой и конечной величины – величина бесконечно малая.

3) Произведение бесконечно малых – бесконечно малая.

Свойства пределов функций

1) Предел постоянной равен самой постоянной.
(Это свойство следует из определения предела)

2) Постоянную можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to x_0} Kf(x) = Kb = K\lim_{x\to x_0} f(x).$$

3) Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций, если они существуют.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) .$$

4) Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если они существуют.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

5) Предел отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ равен отношению пределов каждой функции, если оба предела существуют и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

6) Если $f(x)\le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

7) Если $h(x)\le f(x)\le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$. (Теорема о двух полицейских).

Первый замечательный предел

Первым замечательным пределом называют предел:

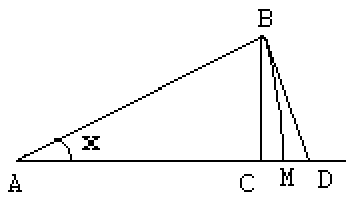
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Докажем его справедливость:

Прежде всего, заметим, что вследствие нечетности функции $\sin x$ отношение

$\dfrac{\sin x}{x} > 0$ при $|x| \to 0$.

Достаточно предположить, что x приближается к 0, оставаясь положительным. В противном случае мы сменим знак x, что не повлияет на результат. Приведем геометрическое доказательство. Рассмотрим сектор круга радиуса 1 с углом при вершине, равным x. BM – дуга граничной окружности сектора, A – его вершина, AB = AM = 1. BD – отрезок касательной к дуге BM в точке B. BC – перпендикуляр, опущенный из точки B на отрезок AM.



Очевидно, что сравнивая площади треугольника ABM, сектора ABM и треугольника ABD, получим соответствующие соотношения между площадями этих фигур:

$$S_{\Delta ABM} < S_{сектABM} < S_{\Delta ABD}.$$

Поскольку

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}\sin x,\ S_{сектABM} = \frac{1}{2}x,\ S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то справедливо неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Если мы поделим все части этого неравенства на $\sin x$, то в силу предположения о знаке x знаки неравенства не изменятся. Поэтому:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Теперь устремим x к нулю и применим теорему о двух полицейских, откуда:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Осталось применить свойство 5) пределов для получения предела обратной величины: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Упражнения.

1. Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

2. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

Второй замечательный предел и его следствия

Справедливы следующие формулы, называемые вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \quad \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e, \; e\approx 2,71...$$

Равносильность этих формул следует из связи переменных: $\alpha=\dfrac{1}{x}$.

Мы получали число Непера e из подобной формулы, где была последовательность, а не функция. Заметим, что здесь в первой из приведенных формул переменная x может стремиться как к $+\infty$, так и к $-\infty$, а также может просто расти по абсолютной величине, меняя знак произвольно.

Следствия 2-го замечательного предела

1. Если мы формально прологарифмируем вторую из приведенных формул, получим:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

2. Другим следствием является предел, получаемый из предыдущего заменой $z=\ln(1+t)$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}=1.$$

3. Другим следствием является предел, получаемый из предыдущего заменой $(1+x)^{\alpha}=e^{z}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

Док-во: Сделаем замену $(1+x)^{\alpha}=e^{z}$. При такой замене $x\to 0$ тогда и только тогда, когда $z\to 0$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{e^{z/\alpha}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z/\alpha}{e^{z/\alpha}-1}\cdot\alpha=\alpha.$$

Ч.Т.Д.

Упражнения. В следующих примерах свести вычисление пределов к первому замечательному пределу или следствиям из второго замечательного предела, умножая и деля на соответствующие выражения.

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{2x^2}-1}$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(1+x^3)}-1}{\sin^2 x}$.

Непрерывность функции

Определение 1: ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если предел этой функции при $x\to a$ равен значению функции в предельной точке, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Применяя второе определение предела функции в точке, получим

Определение 2: ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если $\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta(\varepsilon)>0:\forall x,|x-a|<\delta(\varepsilon),\left(\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon\right)$.

Определение 3: Ф***ункция*** $y=f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, где $\Delta x-$приращение аргумента функции ($x=a+\Delta x$), а $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ – приращение функции, соответствующее приращению ее аргумента Δx.

Доказательство: Из первого определения непрерывной функции

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(a+\Delta x)-f(a)\right)=\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to 0} f(a)=$$
$$=f(a)-f(a)=0.$$

Здесь первый из пределов вычисляется с помощью определения 1, второй – как предел постоянной, поскольку $f(a)$ не зависит от Δx. Ч.Т.Д.

Определение 4: ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$$

Определение 5: ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в некоторой области***, если она непрерывна во всех точках этой области.

Все степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции непрерывны в областях существования.

Свойства непрерывных функций

Из свойств предела функции в точке следуют свойства функций:

1) Сумма непрерывных функций есть непрерывная функция.

2) Произведение непрерывных функций есть функция непрерывная.

3) Частное непрерывных функций – функция непрерывная, если знаменатель в предельной точке не равен нулю.

4) Свойство непрерывности суперпозиции функций:

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, пусть функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда функция $z = h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Доказательство:

Очевидно, что $\Delta z = h(a+\Delta x) - h(a) = g(f(a+\Delta x)) - g(f(a)) =$

$= g(f(a) + f(a+\Delta x) - f(a)) - g(f(a)) = g(b+\Delta y) - g(b)$.

Так как согласно определению 3 непрерывности $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta z \to 0$ при $\Delta y \to 0$, получим: $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$.Ч.Т.Д.

Пример:

Функция $z = \sin\left(x^2\right)$ непрерывна во всех точках числовой оси, так как функция $y = x^2$ непрерывна на R, а функция $z = \sin y$ непрерывна на множестве неотрицательных чисел.

Точки разрыва функции

Определение: ***Точкой разрыва функции*** называется внутренняя точка области задания функции, в которой нарушается непрерывность функции.

Если в точке разрыва функция, к тому же, не существует, ее часто называют ***особой точкой***.

Например, функция $y = \dfrac{x}{x+1}$ существует на всей числовой оси, кроме точки $x = -1$. Эта точка – особая, и в ней функция терпит разрыв.

Определение: ***Точкой разрыва первого рода*** называется точка разрыва функции $y = f(x)$, в которой $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$

принимают конечные, но не равные значения, то есть функция терпит конечный разрыв.

Определение: Разность между этими значениями $h=\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right)-\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right)$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва первого рода.

Пример: Функция $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0-0} y=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y=1$. Функция имеет разрыв первого рода в точке $x=0$, скачок $h=2$.

Определение: ***Точкой разрыва второго рода*** называется точка разрыва функции $y=f(x)$, в которой разрыв бесконечный, если левый, правый или оба предела в точке бесконечны.

Пример:

Функция $y=\left(x-2\right)^{-1}$ имеет разрыв второго рода в точке $x=2$: $y\underset{x\to 2-0}{\to}-\infty$, $y\underset{x\to 2+0}{\to}+\infty$.

Определение: Разрыв называется ***устранимым***, если $\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right)$ и эти пределы конечны, но функция в точке a не задана.

Пример:

Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ не может быть задана при $x=0$ (деление на ноль), однако и левый и правый ее пределы равны 1, что следует из первого замечательного предела.

Устранить этот недостаток можно введением другой функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

Эта функция совпадает с заданной во всех точках, кроме 0, но она существует и непрерывна на всей числовой оси, что следует из свойств непрерывной функции.

Неопределенности

Уточним проблемы, с которыми мы можем столкнуться при вычислении пределов. В точках, где функция $f(x)$ определена и непрерывна, соответствующий предел можно получить, вычислив ее значение. Особый подход к вычислению предела необходим, когда простая подстановка предельного значения приводит к **неопределенности,** вида:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 1^{\infty}.$$

Наша задача – избавиться от неопределенности, сведя заданное выражение к такому, где можно применить свойства бесконечно малых величин, замечательные пределы или их следствия.

Правила вычисления предела

Чтобы вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо следующее.

1. Попробовать подставить в функцию, стоящую под знаком предела, $x=a$. Если функция в этой точке непрерывна, в соответствии формулой $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ предел равен числу $f(a)$.

2. Если точка a не входит в область определения функции, то конечный предел может не существовать, и если абсолютная величина функции неограниченно увеличивается при стремлении переменной к a, то пределом является бесконечность.

3. Если в результате подстановки получается неопределенность, то есть выражение вида

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},$$

следует раскрыть эту неопределенность, сделав сокращения, или привести получаемое выражение к замечательному пределу или его следствию.

Примеры:

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x+3)}=\frac{3}{4}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{1-\cos 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=2\,.$$

Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ показывает, что в числителе и знаменателе присутствуют бесконечно большие функции. Чтобы избавиться от неопределенности следует вынести самую большую величину в числителе и знаменателе за скобки, произвести сокращение, после чего еще раз применить пункт 1 правил.

Примеры:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+x-1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=1.$$

Сокращение на x^2 законно, поскольку $x\neq\infty$, а только стремится к ∞, то есть принимает сколь угодно большие по абсолютной величине, но конечные, значения.

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=0.$$

Неопределенности $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ приводятся вначале к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а затем раскрываются одним из перечисленных выше способов.

Примеры:

1. $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{6}$$

2. $$\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}x = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to 3}\frac{x}{\mathrm{tg}x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to 3}\cos x = 1$$

Неопределенность вида 1^{∞} раскрывается приведением ко второму замечательному пределу.

Примеры:

1. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x^{-1}}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{x^{-2}}{\sin^2 x^{-1}}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{\sin x^{-1}}\right)^2} = e^1 = e$$

2. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Производная. Дифференциал функции

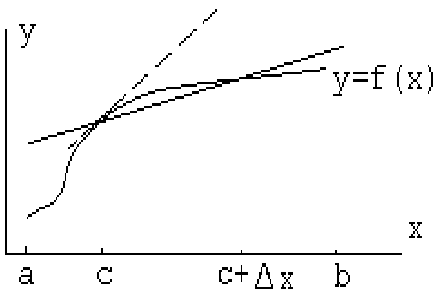
Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$, и требуется провести касательную к этой кривой в точке $c \in (a,b)$. Заметим, что ***касательная*** – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c, f(c))$ и $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$, когда $\Delta x \to 0$. Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид:

$$\frac{x-c}{(c+\Delta x)-c} = \frac{y-f(c)}{f(c+\Delta x)-f(c)} \text{ или } y = f(c) + \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}(x-c).$$

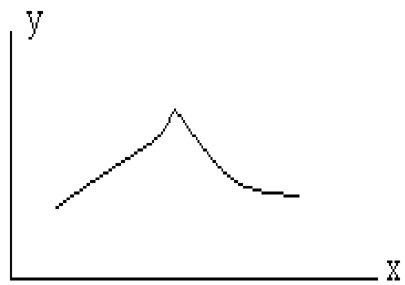
Делая предельный переход при $\Delta x \to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

На рисунке касательная представлена пунктиром. Итак, $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX.



Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции.

Определение 1: Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ представимо в виде $\Delta f = A\Delta x + \beta$, причем A – константа, $\beta = o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости, чем Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\beta}{\Delta x} = 0$.

Установим значение A, для чего вычислим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{\beta}{\Delta x} \right] = A.$$

Назовем число A ***производной функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначим ее $f'(x_0)$, в результате получаем определение производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и, кроме того, $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$.

Как было сказано выше, второе слагаемое в выражении приращения функции – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а, следовательно, и чем величина $f'(x_0)\Delta x$. Другими словами, ***первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции***. Называют его ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда

$$df = f'(x)dx,$$

откуда следует второе обозначение производной

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке 1.

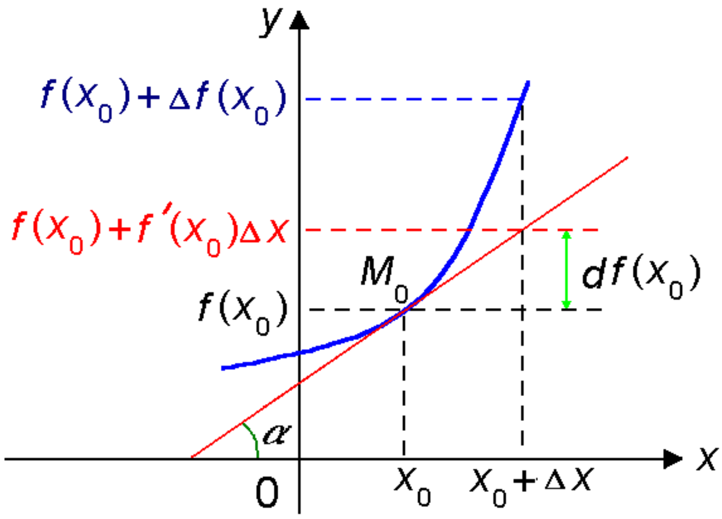


Рис. 1

Замечание. ***Геометрическим смыслом производной*** $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Поэтому ***уравнение касательной*** к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x = x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y = f(x)$.

Теорема: Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

Доказательство:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\right) = 0$. Следовательно, функция непрерывна в точке x_0 по определению 3.

Если из условия непрерывности функции следует, что приращение функции Δy бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то из условия дифференцируемости получается, что Δy – бесконечно малая одного порядка малости с Δx.

Вычисление производной называют ***дифференцированием функции***.

Правила дифференцирования

1) Производная суммы функций есть сумма производных этих функций: $(u+v)' = u'(x) + v'(x)$.

Доказательство:

Пусть $\Phi(x)=u(x)+v(x)$, тогда

$$\Delta\Phi(x)=\underline{u(x+\Delta x)}+v(x+\Delta x)-\left(\underline{u(x)}+v(x)\right)=\Delta u+\Delta v.$$

Очевидно, $(u+v)'=\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta u+\Delta v)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x)$. Ч.Т.Д.

2) $(uv)'=u'v+uv'$.

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Свойства 2) и 3) доказываются аналогично свойству 1).

4) Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x_0)=y_0$. Пусть функция $z=g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда сложная функция $z=g(f(x))=\Phi(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $\Phi'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

Действительно,

$$\Phi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=g'(y_0)\cdot f'(x_0).$$

Производная обратной функции

Даны функция $y=f(x)$ и обратная ей функция $x=g(y)$, т.е. $x=g(f(x))$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$,тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$, при этом:

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Доказательство:

Действительно, если $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\to 0$. Теперь

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{g'(y_0)}=\frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Следовательно, $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(g(y_0))}$. Ч.Т.Д.

На основании рассмотренных свойств пределов функций и производных функций в точке построена следующая таблица производных элементарных функций

Таблица производных

1. $(C)'=0$, если $C-$ постоянная

2. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\, x^{\alpha-1}$

3. $(\sin x)'=\cos x$

4. $(\cos x)'=-\sin x$

5. $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

6. $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

7. $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

8. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$

12. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

Докажем некоторые из этих формул:

1. Если $y=C$, то $\Delta y=0$, и первая формула доказана.

2. Пусть $y=x^{\alpha}$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(x+\Delta x\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\dfrac{\Delta x}{x}\cdot x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и используя 3-е следствие из второго замечательного предела, получим вторую формулу.

3. Пусть $y=\sin x$, тогда

$$\Delta y=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Используя первый замечательный предел, получим

$$\left(\sin x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=.$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

4. Пусть $y=\mathrm{tg}x$, тогда

$$\left(\mathrm{tg}x\right)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x\left(-\sin x\right)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

5. Пусть $y=\log_a x$, тогда

$$\Delta y=\log_a\left(x+\Delta x\right)-\log_a x=\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Теперь применяя первое следствие из второго замечательного предела, получим

$$\left(\log_a x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a\cdot\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a\cdot\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=\frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

6. Пусть $y=a^x$, тогда, $x=\log_a y$, $x'(y)=\dfrac{1}{y\ln a}$, значит

$$y'(x)=\left(a^x\right)'=\frac{1}{x'(y)}=y\ln a=a^x\ln a.$$

7. Пусть $y=\arcsin x\Rightarrow$ $x=\sin y, x'(y)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$.

$$y'(x)=\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Примеры:

1. $y=\sin^3\left(5x+2\right)$

$$y' = 3\sin^2(5x+2)\cos(5x+2)\,5 = 15\sin^2(5x+2)\cos(5x+2),$$

2. $y = 4^{\ln(\mathrm{tg}2x)}$,

$$y' = 4^{\ln(\mathrm{tg}2x)}\ln 4\,\frac{2}{\mathrm{tg}2x\cos^2 2x} = 4^{\ln(\mathrm{tg}2x)}\frac{2\ln 4}{\sin 2x\cos 2x}$$

3. $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^3-1}}\right)$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^3-1}}}\,\frac{\sqrt{x^3-1}-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}x}{x^3-1} = \frac{2x^3-2-3x^3}{2(x^3-1)\sqrt{x^3-1-x^2}} =$$

$$= -\frac{x^3+2}{2(x^3-1)\sqrt{x^3-x^2-1}}.$$

Чтобы вычислить производную функции f(x) с применением MAXIMA, используют команду **diff(f(x),x).**

Упражнение. Вручную вычислите производную функции $\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$ и проверьте результат на компьютере, учитывая то, что в MAXIMA $\ln$ записывается как $\log$, а arctg записывается как atan.

Производная параметрически заданной функции

Пусть функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\ t \in [t_1, t_2],$$

причем обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in (t_1, t_2)$, $\varphi'(t_0) \neq 0,\ \varphi(t_0) = x_0,\ \psi(t_0) = y_0$. Вычислим $\frac{dy}{dx}$ в точке x_0:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Итак, $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Пример:

$$\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right) \\ y=2\left(1-\cos t\right) \end{cases}$$

Вычислим : $x'(t)=2\left(1-\cos t\right)$, $y'(t)=2\sin t$. Тогда по формуле:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Дифференцирование неявно заданных функций

Если функция задана неявно, перед дифференцированием следует определиться, какую переменную считать аргументом. Пусть $x^2+y^2=9$. Считаем x независимой переменной, $y-$функцией. Можно из уравнения определить $y=-\sqrt{9-x^2}$ или $y=\sqrt{9-x^2}$ и после этого взять производную. Но переход к явно заданной функции возможен не всегда. Продифференцируем обе части уравнения $x^2+y^2=9$ по переменной x, используя при этом правило дифференцирования сложных функций $\left(x^2+y^2\right)'_x=\left(9\right)'_x \Rightarrow 2x+2y\,y'=0$, откуда следует $y'=-\dfrac{x}{y}$. Теперь можно найти производную в любой конкретной точке.

«Логарифмическое» дифференцирование

Здесь имеется ввиду дифференцирование с предварительным логарифмированием функции. Пусть $y=x^{tgx}$. При вычислении производной нет возможности использовать таблицу производных, так как эта функция не является ни степенной, ни показательной. Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\ln y=\ln\left(x^{\mathrm{tg}x}\right) \Rightarrow \ln y=\mathrm{tg}x\ln x.$$

В результате от явного задания функции перешли к неявному, при этом функция стала более удобной для дифференцирования.

Учитывая, что y – функция от x, дифференцируя обе части соотношения $(\ln y)=(\operatorname{tg} x \ln x)$, получим:

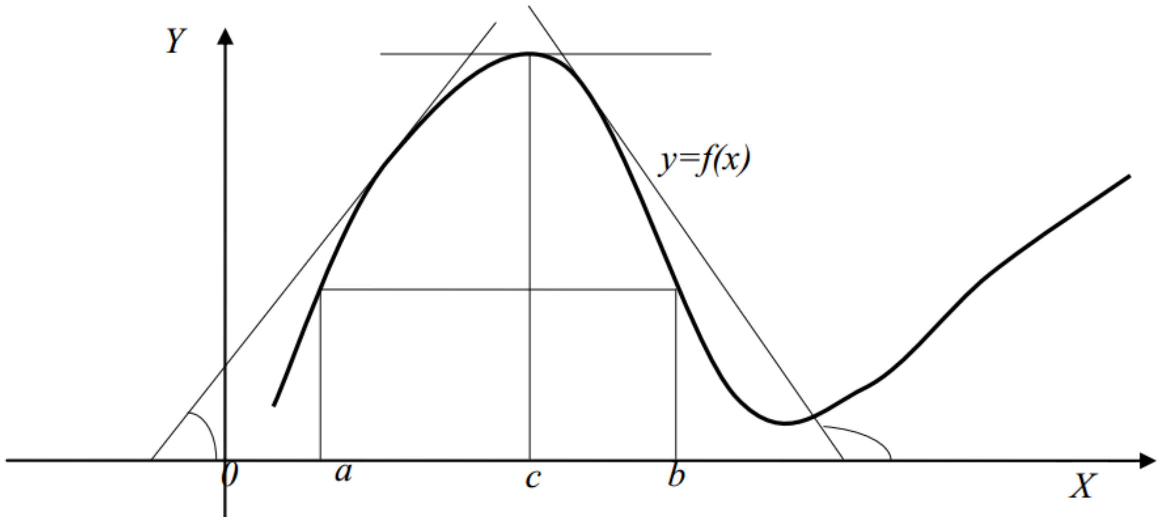
$$\frac{1}{y}y'=\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{tgx}{x}.$$

В результате $y'=\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)y=\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)x^{\operatorname{tg}x}$.

Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля: Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f(a)=f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка c внутри интервала, в которой производная функции обращается в нуль, то есть $f'(c)=0$, $c\in(a,b)$.

Теорема дается без доказательства, приведена геометрическая иллюстрация теоремы.



Теорема Коши: Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и $g(a)\neq g(b)$, то существует такая точка $c\in(a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию

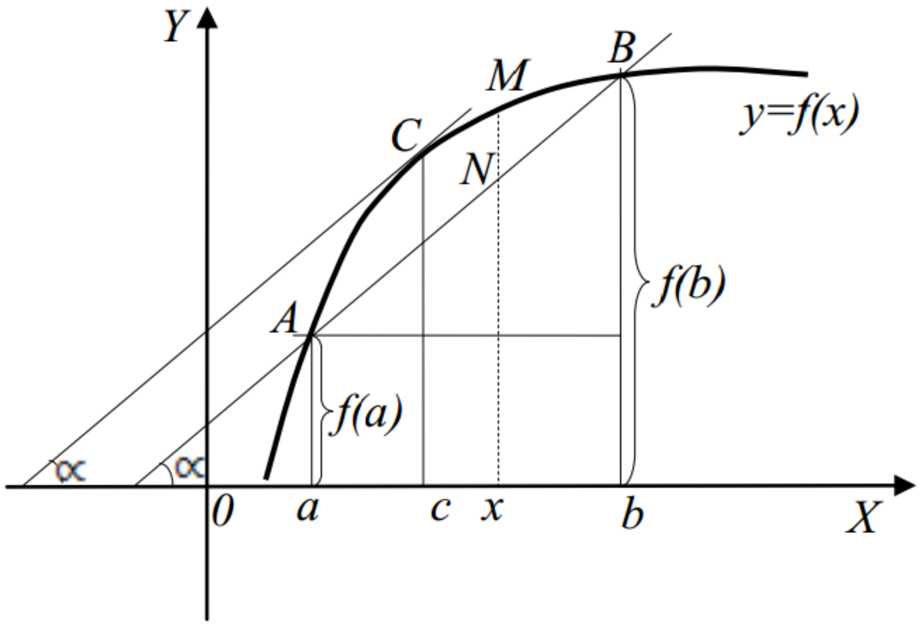
$$\Phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$$

Она дифференцируема, так как кроме функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в нее входят только постоянные, причем, $\Phi(a)=\Phi(b)=f(a)$, то есть удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда

$\Phi'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$, теорема доказана.

Важным частным случаем теоремы Коши при $g(x)=x$ является **Теорема конечных приращений Лагранжа:** Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то существует такая точка $c\in(a,b)$, для которой справедливо:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение: Второй производной функции $y=f(x)$ (или производной второго порядка) называется производная ее первой производной $y''=(y')'$.

Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то вторая производная определяет скорость изменения скорости изменения функции, то есть ускорение. Производные более высоких порядков определяются аналогично:

$$y''' = \left(y''\right)', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Примеры:

1. Если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, ….

2. Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x, \ldots,\ y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} n)$.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала первого порядка.

Поскольку $df(x) = f(x)'dx$, то

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = (df(x))'dx = (f'(x)dx)'dx.$$

Так как dx – бесконечно малое приращение, не зависящее от x, производная от dx считается как от постоянной. Следовательно,

$$d^2 f(x) = (f'(x))'dx^2 = f''(x)\,dx^2,\ d^3 f(x) = f'''(x)dx^3, \ldots,$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Чтобы вычислить n-ю производную функции f(x) с применением MAXIMA, используют команду **diff(f(x),x,n). Например, применение команды diff(2^x,x,3) дает третью производную функции** 2^x**.**

Упражнение. Вычислите на компьютере $(x^2 e^{2x})^{(5)}$, учитывая, что число Непера **e** вводится в виде **%e**.

Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем $f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \beta$, где β – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$ $(\beta = o(\Delta x))$. Поэтому для точек x, близких к точке a справедлива формула

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

обеспечивающая **первое приближение** функции. Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a, где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a.

Пример: $\sqrt[4]{15}=\sqrt[4]{16-1}=2\cdot\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}}\approx 2\cdot\left[1+\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}\cdot(-\frac{1}{16})\right]=\frac{63}{32}$.

Здесь мы использовали формулу первого приближения при $f(x)=\sqrt[4]{1+x}, \quad a=0, \quad x=-\frac{1}{16}$. Поэтому $f(a)=1, \quad f'(a)=\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}$ и $(x-a)=-\frac{1}{16}$.

Возникают вопросы: 1) нельзя ли использовать многочлены более высоких степеней для более точного приближения функции? 2) как оценить ошибку приближения?

Формула Тейлора дает ответы на эти вопросы.

Предположим, что функция $y=f\left(x\right)$ имеет все производные до $n+1$ порядка в некотором промежутке, содержащем точку a. В таком случае для всех значений x из этого промежутка справедлива ***формула Тейлора***:

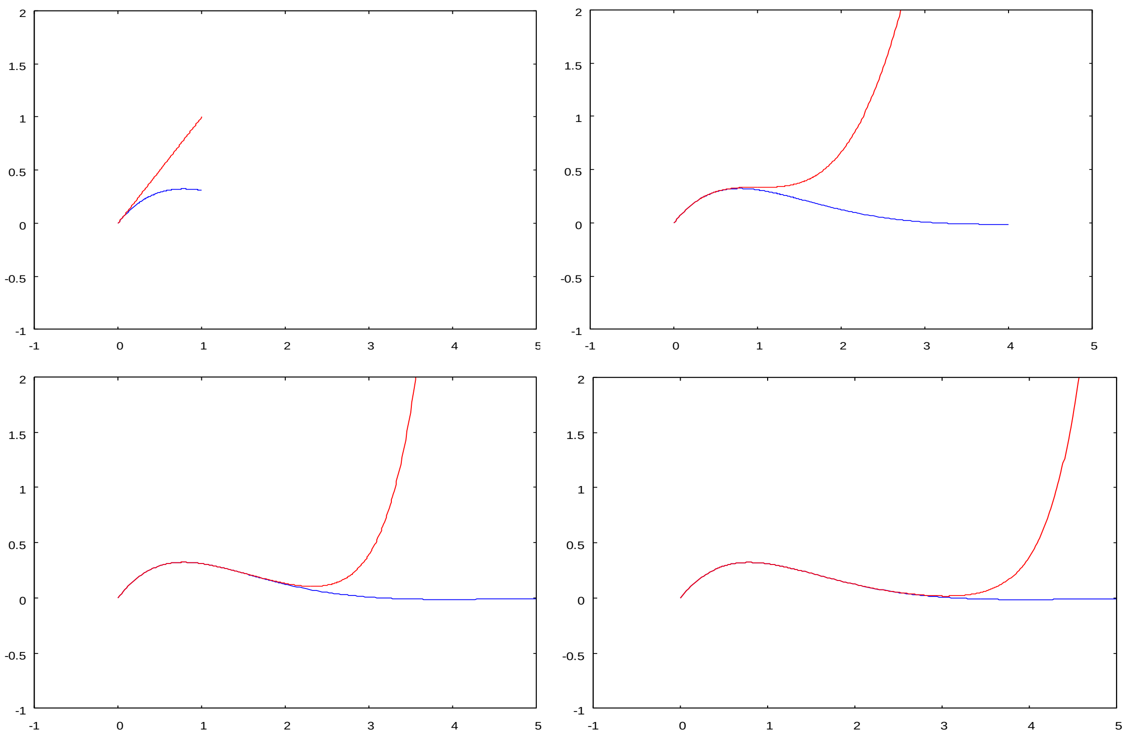
$$f\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f'\left(a\right)}{1!}\left(x-a\right)+\frac{f''\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^2+\frac{f'''\left(a\right)}{3!}\left(x-a\right)^3+$$

$$+\frac{f^{(IV)}\left(a\right)}{4!}\left(x-a\right)^4+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n+r\left(x\right),$$

где остаточный член $r(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ и $\theta\in(0,1)$.

Таким образом, функция приближается многочленом, и ошибка вычислений, обусловленная заменой значения функции значением многочлена, равна остаточному члену. Поскольку точное значение $\theta\in(0,1)$ не может быть найдено, значения функций вычисляются приближенно, и остаточный член служит не для подсчета, а для оценки ошибки. Последняя формула является обобщением формулы конечных приращений Лагранжа.

Следующий пример демонстрирует, как приближается функция $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$ (голубая линия) многочленами по формуле Тейлора (красная линия) в правой части окрестности точки $a=0$ при увеличении степеней многочленов от первой до одиннадцатой.



Формулу Тейлора можно записать через дифференциалы:

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{1!}+\frac{d^2f(a)}{2!}+\frac{d^3f(a)}{3!}+$$
$$+\frac{d^4f(a)}{4!}+\dots+\frac{d^nf(a)}{n!}+r_n(x).$$

Для приложений к вычислению пределов используют ***локальную формулу Тейлора***, имеющую вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$
$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right).$$

Такое представление остаточного члена показывает, что остаточный член есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$.

Локальная формула Тейлора является обобщением формулы связи приращения функции и дифференциала функции в точке.

В частности, при $a=0$ формула Тейлора называется ***формулой Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена

1. $f(x)=e^x$. Нетрудно заметить, что любая производная этой функции равна самой функции, а $f^{(n)}(0)=e^0=1$. В соответствии с формулой Маклорена

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

2. $f(x)=\sin x$. Так как $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{\pi n}{4})$, получим, что коэффициенты при четных степенях в нуле равны нулю, а коэффициенты при нечетных степенях либо +1, либо -1. В результате

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+r_n(x).$$

3. $f(x)=\cos x$. Так как $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{\pi n}{4})$, рассуждая так же как в случае предыдущего разложения, найдем

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+r_n(x).$$

4. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x)=\ln(1+x)$. Поскольку $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $(0!=1)$, имеем $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому получим разложение

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+r_n(x).$$

Это разложение может применяться только для значений x, для которых $|x|<1$.

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\notin \mathrm{N}$. Дифференцируя, найдем

$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

поэтому $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$, и имеем разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+r_{n}(x).$$

Это разложение может применяться только для значений x, для которых$|x|<1$.

Приложения производной и предела

Формула конечных приращений

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда найдется точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$. Эта формула используется для оценки приращения функции на отрезке: $|f(b)-f(a)|\le\max\limits_{c\in[a,b]}f'(c)\cdot|b-a|$.

Правило Лопиталя

(Правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a и при вычислении предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

имеет место одна из неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, тогда если существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

,то справедливо ***правило Лопиталя***:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x}=\frac{1}{4}$. $x\to\infty$

Раньше это пример решался с помощью тождественного преобразования

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{2x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2}=1.$

Раньше этот пример решался сравнением степеней переменного в числителе и в знаменателе, когда мы выносили наибольшую степень из числителя и знаменателя, соответственно.

Чтобы получить предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ с помощью MAXIMA, пользуются командой **limit(f(x),x,a)**.

Теорема о возрастании (убывании) функции на интервале

Теорема (Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале): Если функция $y=f(x)$, имеющая производную на интервале (a,b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная удовлетворяет, соответственно, неравенству $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) на этом отрезке.

Доказательство следует из формулы для производной

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

где знаки числителя и знаменателя дроби в правой части равенства совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

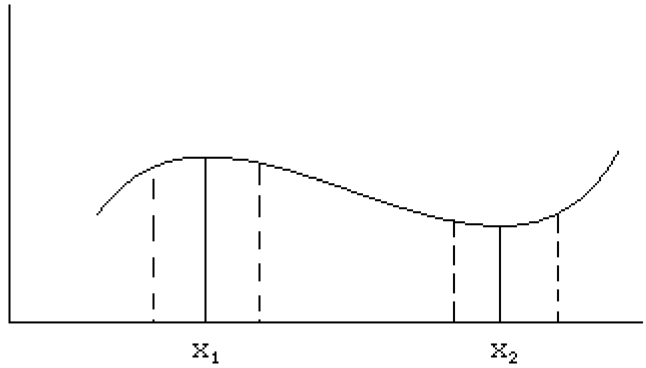
Теорема (Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале): Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для $a<x<b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.

Упражнение. Найти участки возрастания и убывания функции $f(x)=(x+1)(x-2)^2$.

Экстремумы

Определение: Функция $y = f(x)$ в точке x_1 имеет ***максимум***, если для всех x из некоторого интервала, содержащего точку x_1, выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$ при $x \neq x_1$.

Определение: Функция $y = f(x)$ в точке x_2 имеет ***минимум***, если для всех x из некоторого интервала, содержащего точку x_2, выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$.



Определение: Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума***.

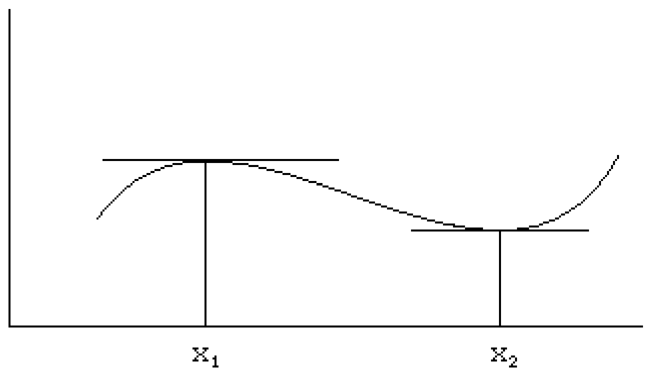
Теорема (Необходимое условие существования экстремума): Необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является $f'(c) = 0$.

Доказательство:

Пусть точка c – точка максимума, тогда

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0 \text{ при } \Delta x > 0 \text{ и } \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0 \text{ при } \Delta x < 0.$$

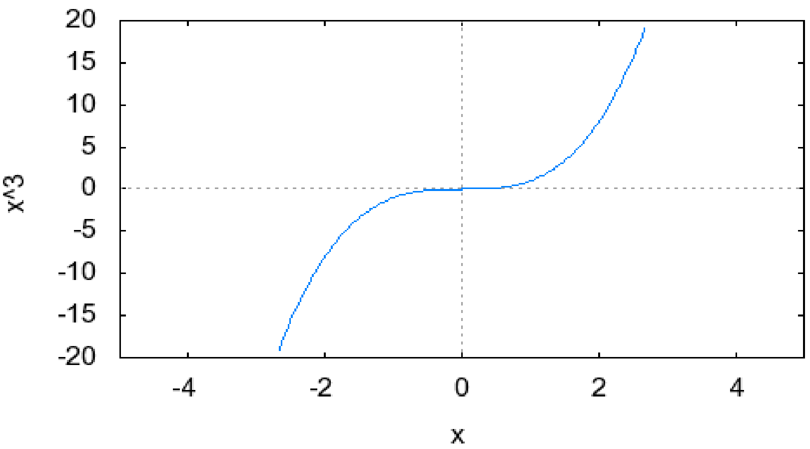
Поскольку при вычислении производной пределы слева и справа должны совпадать, то $f'(c) = 0$. Ч.Т.Д.



Определение: Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются ***критическими точками***.

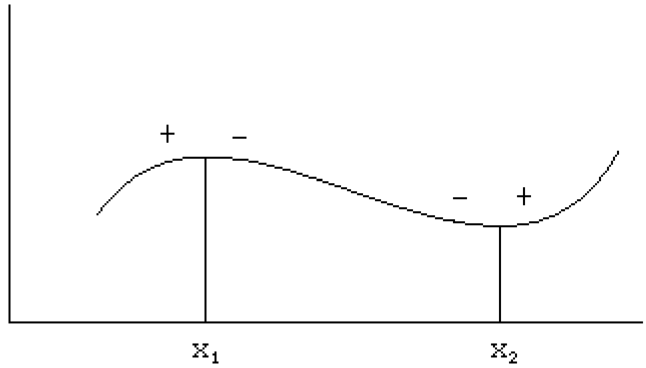
Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума.

Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но точка $x=0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема 1 (Достаточное условие существования максимума и минимума функции): Если производная функции при переходе через точку c меняет знак с «+» на «–», это точка максимума. Если знак производной меняется с «–» на «+», имеем точку минимума.

Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.



Теорема 2 (Достаточное условие существования максимума и минимума функции): Пусть $f'(x_0)=0$, тогда при $x=x_0$ функция имеет максимум, если $f''(x_0)<0$ и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Доказательство:

Из формулы Тейлора в окрестности точки экстремума x_0, в которой удержано три первых члена, имеем

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Поскольку $f'(x_0) = 0$, что следует из условия теоремы, а остаточный член r по определению меньше предыдущего члена формулы, знак приращения функции независимо от того, точка x находится левее, или правее x_0, определяется знаком второй производной. Когда $f''(x_0) > 0$, получаем $f(x) - f(x_0) > 0$, следовательно, x_0 – точка минимума функции, если $f''(x_0) < 0$, значит $f(x) - f(x_0) < 0$, то есть x_0 – точка максимума функции.

Примеры:

1. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$.

Найдем критические точки этой функции. Так как $y' = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Применим первую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y'(x) < 0$ при $x < 0$ и при $0 < x < 3$, следовательно, в точке 0 экстремума нет. $y'(x) > 0$ при $x > 3$, следовательно, в точке 3 минимум функции.

2. $y = \cos^2 x$.

Найдем критические точки этой функции. Так как $y' = -\sin 2x$, то критическими точками этой функции являются точки $x_k = \frac{\pi k}{2}$. Применим вторую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y''(x_k) = -2\cos \pi k$, поэтому $x_k = \frac{\pi k}{2}$ является точкой локального максимума при k четном и локального минимума при k нечетном.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке. Функция может не иметь экстремумов на некотором отрезке, а наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке она имеет всегда.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

Пример: Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[1, 4]$.

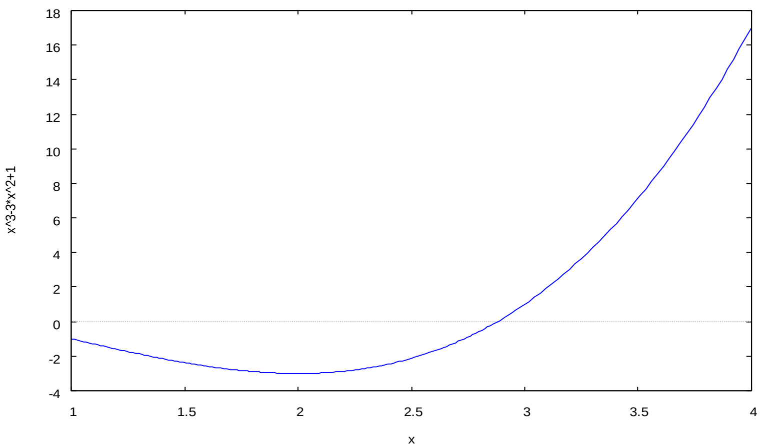
1) Находим критические точки: рассмотрим уравнение $y' = 0$, приводящее к уравнению $3x(x-2) = 0$. Получаем две критические точки, одна из которых ($x = 0$) не входит в исследуемую область.

2) Добавляем к оставшейся критической точке $x = 2$ граничные точки – имеем набор точек $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

3) Определяем в этих точках значения функции $y_1 = -1$, . $y_2 = -3$, $y_3 = 17$.

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x = 2$, наибольшее (17) при $x = 3$.

Задача о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции одного вещественного переменного на отрезке с развитием компьютерных технологий перестает быть очень актуальной. С помощью программ MAXIMA мы можем легко построить график исследуемой функции и найти на нем все интересующие нас точки. Для того, чтобы построить график функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке [1,4], следует ввести команду plot2d(x^3-3*x^2+1,[x,1,4]) и нажать Shift+Enter. Мы получим график

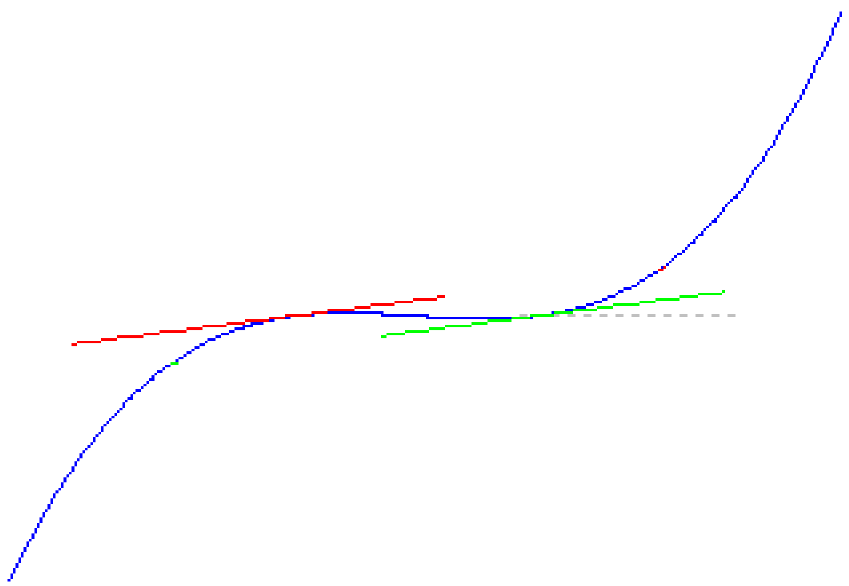


из которого видно, что наименьшее значение на отрезке функция принимает в точке 2. Наибольшее – в точке 4.

Выпуклость и вогнутость кривой

Определение: Кривая называется ***выпуклой*** в точке, если в некоторой окрестности данной точки график касательной к кривой в этой точке находится выше графика самой функции.

Определение: Кривая называется ***вогнутой*** в точке, если в некоторой окрестности данной точки график касательной к кривой в этой точке находится ниже графика самой функции.



Теорема: Если для кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, справедливо $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), то кривая в точке x_0 выпукла (вогнута).

Доказательство:

Уравнение касательной к кривой в точке имеет вид $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим представление заданной функции в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

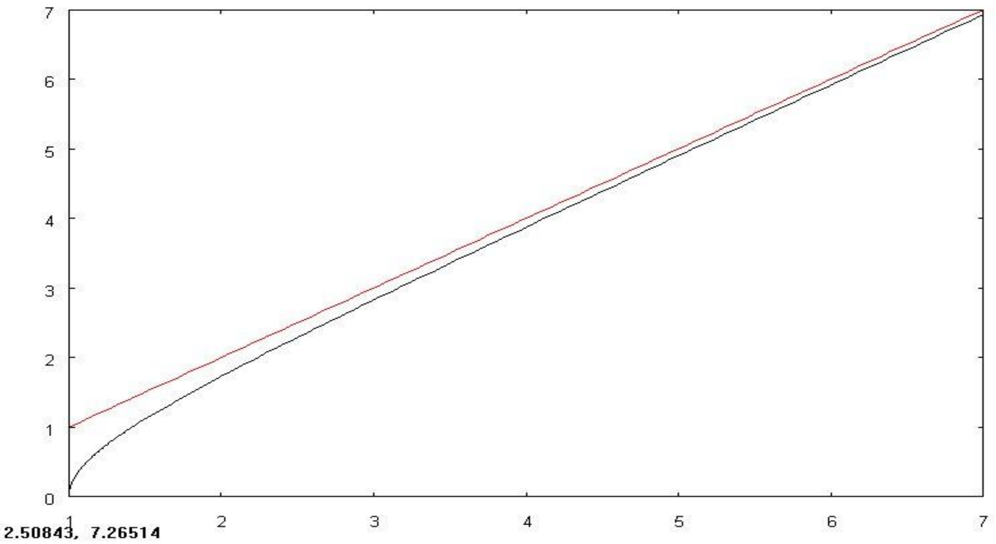
В окрестности точки x_0 (то есть при малых по модулю значениях $(x - x_0)$ знак разности $Y - f(x)$ противоположен знаку $f''(x_0)$. Следовательно, если $f''(x_0) < 0$ знак $Y - f(x)$ положителен, и касательная выше кривой, если $f''(x_0) > 0$ знак $Y - f(x)$ отрицателен, и касательная ниже кривой.

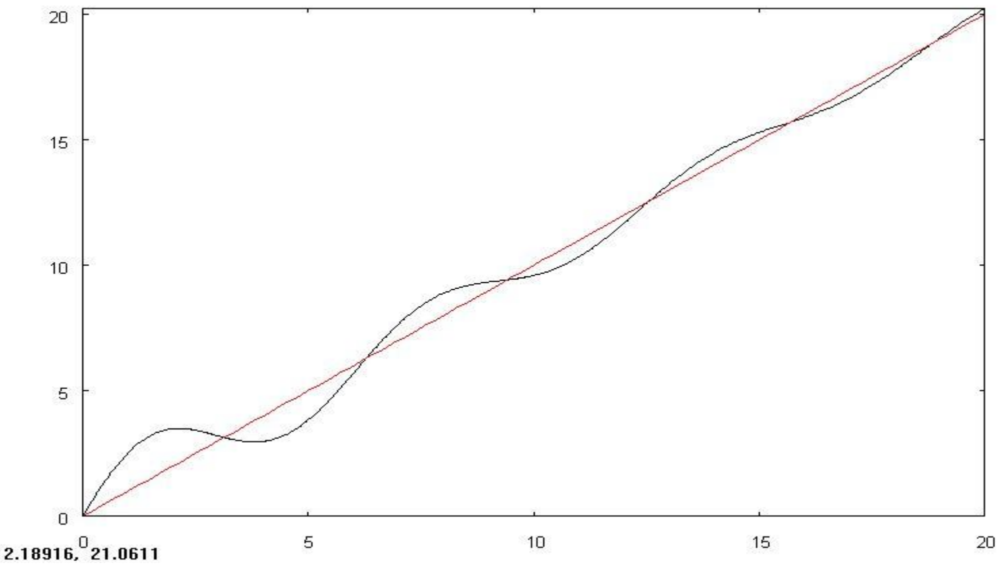
В случае если при переходе с одной стороны от точки x_0 на другую сторону знак разности $Y - f(x)$ меняет знак, такая точка называется ***точкой перегиба***. В случае непрерывности второй производной в точке перегиба она обращается в ноль в этой точке.

Асимптоты кривой

Определение: Прямая называется ***асимптотой кривой***, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

На двух следующих рисунках асимптоты окрашены в красный цвет





Асимптоты бывают ***вертикальными***, они показывают поведение функции в окрестности особой точки, когда $y \to \pm\infty$, и ***наклонными***, дающими представление о поведении функции при $x \to \pm\infty$.

Если x_0 – особая точка, то $x = x_0$ – уравнение вертикальной асимптоты.

Теорема: Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to \infty$, уравнение которой $y = kx + b$, если существуют пределы:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = b.$$

Доказательство. Из определения асимптоты следует $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to \infty$, то есть $\lim_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$. Остается определить параметры уравнения асимптоты. Для этого вычислим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,\ \ \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[b + \alpha(x)\right] = b.$$

Итак, если оба предела существуют и конечны, параметры прямой k и b определены, причем точки этой прямой бесконечно сближаются с точками кривой при $x \to \infty$. Ч.Т.Д.

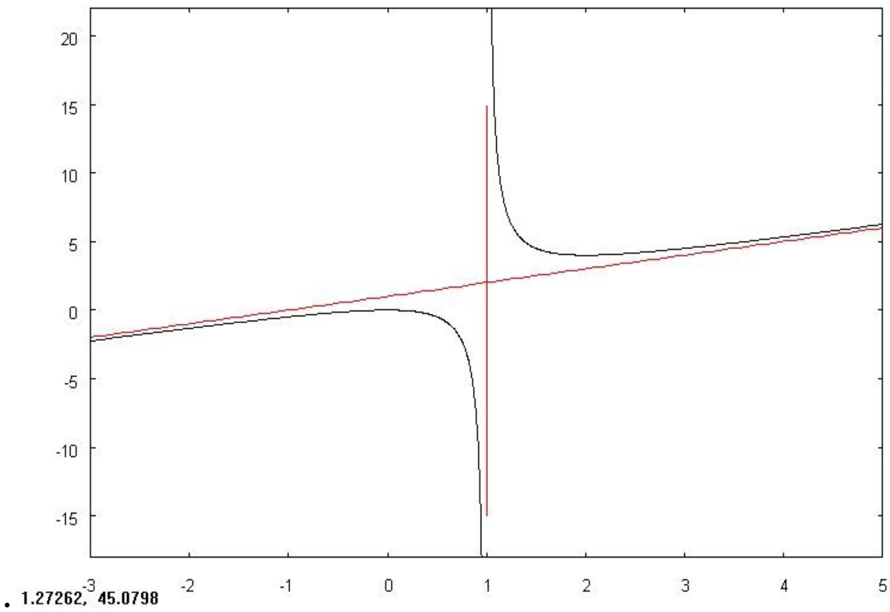
Пример: Найти асимптоты функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Очевидно, $x = 1$ – уравнение вертикальной асимптоты. Определим

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-1)} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1.$$

Итак, наклонная асимптота имеет уравнение $y = x + 1$.



Задачи о нахождении наибольших и наименьших значений функций одного переменного

Задача 1. Владелец грузового судна должен перевезти груз по реке из одного порта в другой. Расходы этого владельца складываются из расходов на содержание экипажа и из затрат на топливо. Следует выяснить, какую скорость движения судна следует выбрать, чтобы плавание было наиболее экономичным, так как увеличение скорости ведет к большим тратам на топливо (расходы на топливо пропорциональны кубу скорости), а уменьшение скорости, а значит, увеличение времени пути приведет к большим тратам на питание команды.

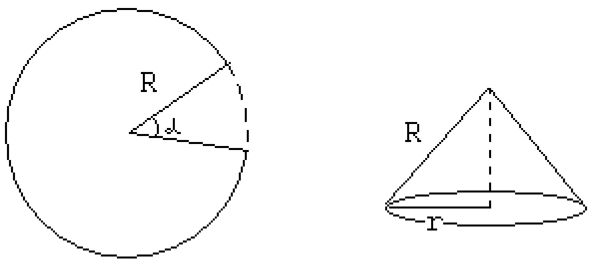
Решение. Обозначим суточные расходы на топливо $k \cdot V^3$, а суточные расходы на питание команды a. Пусть S – расстояние, которое должна пройти баржа. Тогда время в пути равно $\frac{S}{V}$. Следовательно, путевые расходы составляют:

$$F(V) = (k \cdot V^3 + a) \cdot \frac{S}{V}.$$

Нам нужно найти такое положительное значение V_0, которое обеспечит минимум введенной функции. Используя теорему о необходимом условии экстремума, приравняем нулю производную введенной функции: $(2k \cdot V - \frac{a}{V^2}) \cdot S = 0$. Получим точку экстремума

$V_0 = \sqrt[3]{a/(2k)}$. То, что мы получили минимум, а не максимум, следует из поведения функции $F(V)$ при значениях переменной V, близких к 0 и к бесконечности: функция $F(V)$ при таких значениях переменной стремится к положительной бесконечности. Следовательно, единственный экстремум этой функции может быть только минимумом. Таким образом, оптимальная скорость движения баржи по реке $V_0 = \sqrt[3]{a/(2k)}$.

Задача 2. У слесаря есть жестяной диск. Какой сектор следует вырезать из этого диска, чтобы из оставшейся части диска можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?



Решение. Очевидно, что сектор определяется углом при вершине. Обозначим этот угол α. Известно, что объем конуса (воронки), в соответствии с введенными обозначениями, определяется формулой:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}\,.$$

Выразим через α радиус основания конуса r, сравнив площадь оставшейся части диска и площадь боковой поверхности конуса. Площадь оставшейся части диска равна

$$R^2 \frac{2\pi - \alpha}{2}\,.$$

Площадь боковой поверхности конуса равна πRr. Тогда

$$R^2 \frac{2\pi - \alpha}{2} = \pi Rr \;\Rightarrow\; r = R\frac{2\pi - \alpha}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi R^3 (\frac{2\pi - \alpha}{2\pi})^2 \sqrt{1 - (\frac{2\pi - \alpha}{2\pi})^2}\,.$$

Вследствие громоздкости полученного выражения перейдем к новой переменной

$$t=\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\Rightarrow\ V(t)=\frac{1}{3}\pi R^3t^2\sqrt{1-t^2},\ \ 0\le t\le 1.$$

Найдем критическую точку этой функции на отрезке [0,1], именно она является точкой максимума, так как на концах отрезка функция обращается в нуль. Критической точкой является

$$t_0=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

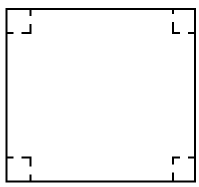
Следовательно, угол при вершине сектора, который нужно вырезать:

$$\alpha_0=2\pi(1-\sqrt{\frac{2}{3}}).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Сеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади.

2. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты, и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

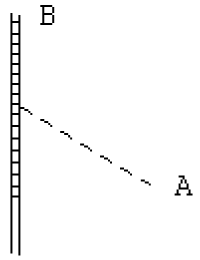


3. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

4. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

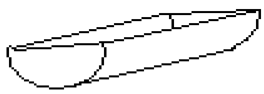
5. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b, высота h. При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность ее пропорциональна $b\cdot h^2$?

6. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, считая по кратчайшему расстоянию, на a км. Под каким углом к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути p руб., а по железной дороге q руб. ($p > q$) и город B расположен на b км севернее завода A?

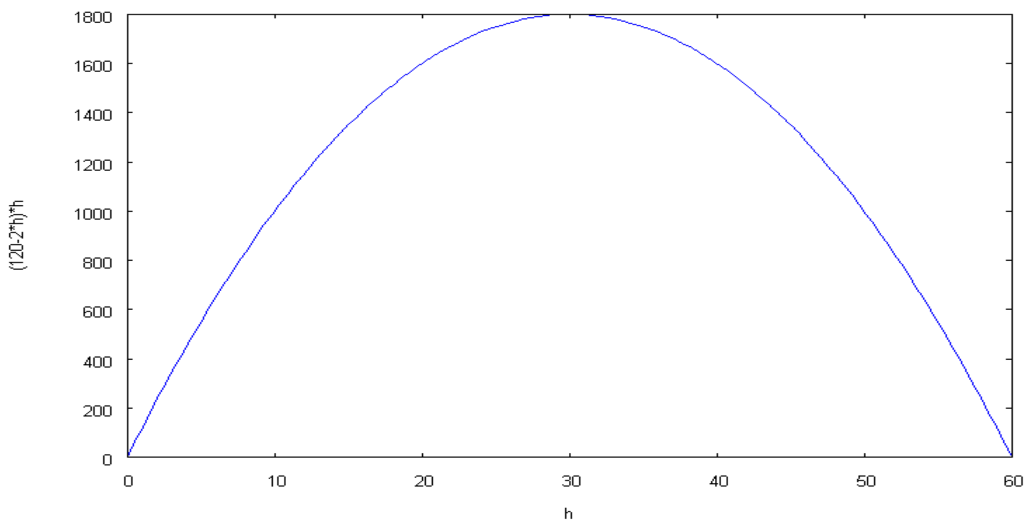


7. К каналу ширины a подходит под прямым углом канал ширины b. Бревна какой наибольшей длины можно сплавлять по этой системе каналов?

8. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна S, имеет наибольшую вместимость?



В предложенных для самостоятельного решения задачах присутствуют параметры. В том случае, когда исследуемая функция не содержит параметров, легко найти наибольшие и наименьшие значения с помощью графика. В настоящее время в связи с наличием пакетов компьютерных программ нет необходимости строить графики вручную. Так, пакет программ MAXIMA мгновенно рисует графики явно заданных функций с помощью команды **plot2d**. Например, при решении задачи 1 следовало найти наибольшее значение функции $S(h) = (120 - 2 \cdot h) \cdot h$. Поскольку $0 < h < 60$, построим график функции $S(h)$ на отрезке $[0, 60]$ с помощью команды **plot2d((120-2*h)*h,[h,0,60])**. Мы получим график вида



В соответствии с этим графиком максимальное значение функции достигается при $h = 30$.

Приложение производных для приближенного решения уравнений

1. Для определения участков нахождения корней многочлена следует найти участки монотонности многочлена. Если на концах отрезка монотонности многочлен имеет разные по знаку значения, то на этом отрезке находится единственный корень.

Пример: Найти отрезки, где находятся различные корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$.

Найдя производную функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, получим участки монотонности этой функции. Действительно, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Очевидно, что функция $f(x)$ возрастает при $x \in (3, +\infty)$ и при $x \in (-\infty, 1)$. На участке $(1, 3)$ функция $f(x)$ убывает. Имеем $f(1) = 1$, $f(3) = -3$, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} -\infty$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$. Следовательно, один корень находится на участке $(-\infty, 1)$, второй – на участке $(1, 3)$, а третий – на участке $(3, +\infty)$.

2. Определив участок, на котором находится корень многочлена, можно для нахождения приближенного значения корня воспользоваться ***методом итераций***. Для применения этого метода уравнение $f(x) = 0$ заменяют на уравнение $x + cf(x) = x$ и подбирают

константу c так, чтобы функция $\varphi(x)=x+cf(x)$ на выбранном участке обладала свойством $|\varphi'(x)|\le q<1$. В соответствии с формулой конечных приращений отсюда следует, что $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le| x_1-x_2|$ для любой пары значений x_1 и x_2 с данного участка. Таким образом, нахождение решения уравнения $f(x)=0$ мы свели к решению уравнения $\varphi(x)=x$. Возьмем за нулевое приближение решения любое число x_0 из выбранного отрезка. Следующим приближением будет $x_1=\varphi(x_0)$. Затем $x_2=\varphi(x_1),\ldots$. Полученную последовательность значений называют итерациями. В соответствии с условием на функцию $\varphi(x)$ итерации будут, не выходя за пределы участка, постепенно приближаться друг к другу. Предел такой последовательности итераций (a) существует и удовлетворяет соотношению $\varphi(a)=a$.

Пример: Найдем приближенное значение корня уравнения $x^3-6x^2+9x-3=0$, находящегося на интервале $(1,3)$.

Сначала подберем константу c так, чтобы функция $\varphi(x)=x+c(x^3-6x^2+9x-3)$ обладала свойством $|\varphi'(x)|\le q<1$ на отрезке $[1+\varepsilon,3-\varepsilon]$, где ε – положительная малая величина. Поскольку $-3\le(x^3-6x^2+9x-3)'<0$ на интервале $(1,3)$, то за c можно взять $1/4$. Итак,

$$\varphi(x)=\frac{x^3}{4}-\frac{3x^2}{2}+\frac{13}{4}x-\frac{3}{4}.$$

Возьмем за начальное приближение $x_0=2$. Теперь

$$x_1=\varphi(x_0)=\frac{7}{4}.$$

Следующая итерация:

$$x_2=\varphi(x_1)=\frac{431}{256}\ \ldots.$$

Компьютер находит корень на указанном ему отрезке значительно быстрее. Достаточно в MAXIMA набрать команду **find_root(x^3-6*x^2+9*x-3,x,1,3)** , и мгновенно получим ответ 1.65270364466614.

Неопределенный интеграл

Первообразная, множество первообразных

Определение: ***Первообразной функции*** $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Поскольку $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$, где C – постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Любые две первообразные функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянную. Другими словами, если $F'(x)=f(x)$ и $\Psi'(x)=f(x)$, то $F(x)-\Psi(x)=C=\text{Const}$.

Определение: Множество всех первообразных одной функции называется ***неопределенным интегралом этой функции*** и обозначается:

$$\int f(x)dx,$$

причем $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ - ***подынтегральным выражением***.

Очевидно, что если $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)dx=\int F'(x)dx=F(x)+C$, где C – произвольная постоянная интегрирования, то есть постоянная может принимать любые значения.

Свойства неопределенного интеграла (НИ)

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

Доказательство: $\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x)$.

2) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

Доказательство: из определения дифференциала функции и первого свойства НИ имеем $d\left(\int f(x)dx\right)=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx$. Ч.Т.Д.

3) $\int dF(x)=F(x)+C$

Доказательство: $\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$ Ч.Т.Д.

Примечание.

Все последующие доказательства проводятся с точностью до постоянной интегрирования, что следует из определения интеграла.

4) $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, если m – постаянная.

Доказательство: Поскольку $\int f(x)dx = F(x)+C$, причем $F'(x)=f(x)$, а

$$\left(mF(x)\right)' = mF'(x) = mf(x),$$

$mF(x)$ – первообразная подынтегральной функции $mf(x)$, а значит

$$\int mf(x)dx = m\left(F(x)+C\right),$$

но $F(x)+C=\int f(x)dx$, следовательно,

$$\int mf(x)dx = m\int f(x)dx. \text{ Ч.Т.Д.}$$

5) $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Доказательство: Пусть

$\int f(x)dx = F(x)+C_1$ и $\int g(x)dx = G(x)+C_2$, где $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$. Поскольку

$$\left(F(x)+G(x)\right)' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x),$$

$F(x)+G(x)$ является первообразной функции $f(x)+g(x)$, следовательно,

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = F(x)+G(x)+C_1+C_2 = \int f(x)dx+\int g(x)dx. \text{ Ч.Т.Д.}$$

Следствия:

1) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$, $a=\text{const}$

Доказательство: Дифференцируем обе части доказываемого равенства

$\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax)$,

$\left(\frac{1}{a}F(ax)+C\right)'_x = \frac{1}{a}\frac{dF(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}\frac{dF(t)}{dt}a = f(t) = f(ax)$,

производные левой и правой частей равенства совпадают, следовательно, сами функции отличаются на постоянную. Ч.Т.Д.

2) $\int f\left(x+b\right)dx = F(x+b)+C$, $b=\text{const}$

Доказательство: Из $\int f\left(t\right)dt = F(t)+C$ при $t=x+b$ имеем $dt=dx$, откуда имеем $\int f\left(x+b\right)dx = F(x+b)+C$.

3) $\int f\left(ax+b\right)dx = F(ax+b)+C$

Доказательство следует из первого и второго следствий.

Таблица интегралов

Приведем таблицу неопределенных интегралов с проверкой того, что действительно производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ (n\neq -1)$	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)' = x^n$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\left(\ln\lvert x\rvert + C\right)' = \frac{1}{x}$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)' = a^x$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\left(-\cos x + C\right)' = \sin x$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\left(\sin x\right)' = \cos x$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\left(\operatorname{tg} x + C\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	$\left(-\operatorname{ctg} x + C\right)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$	$\left(\arcsin x + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C.$	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}.$
10. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$	$\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{1-x^2}$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\| + C$	$\left(\ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\| + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$

При интегрировании функций мы будем проверять результат с помощью пакета математических программ **MAXIMA**. Чтобы сосчитать с помощью компьютера $\int f(x)dx$, мы должны ввести на экран задание в виде **integrate(*f(x)*,x)** и нажать одновременно клавиши **Shift** и **Enter**. Компьютер содержит все известные формулы и приемы интегрирования, в том числе, таблицу интегралов. Ответ компьютер выдает в следующей после задания строке, но без произвольной постоянной С. Следует помнить, что некоторые математические функции имеют отличное от привычного выражение, например, **tg** заменен на **tan**, **ctg** – на **cot**, **arctg** – на **atan**. Функция **ln** имеет представление **log**, а логарифмы по основаниям, отличным от числа **e**, не рассматриваются, либо должны быть приведены к основанию **e**. Замечательные числа, такие как то же **e,** записываются со значком % перед ними. То есть, **e** записывается как **%e,** π – как **%pi.** Все функции записываются с маленькой буквы и переменные в функциях вводятся в скобках. Например, $\sin x$ запишется как **sin(x).** Знак умножения вводится знаком ***.** Степень вводится при помощи знака **^.**

Приемы интегрирования

1. Тождественные преобразования подынтегрального выражения и сведение к табличным интегралам.

Из свойства производной

$$[k \cdot f(x) + l \cdot g(x)]' = k \cdot f'(x) + l \cdot g'(x)$$

следует аналогичное свойство для неопределенных интегралов

$$\int [k \cdot f(x) + l \cdot g(x)]dx = k \cdot \int f(x)dx + l \cdot \int g(x)dx.$$

Примеры:

1. Вычислить $\int \frac{x-2}{x^3}dx$.

Деля почленно числитель на знаменатель, представляя интеграл от разности в виде разности интегралов и вынося постоянный сомножитель за знак интеграла, получим в соответствии с таблицей

$$\int \frac{x-2}{x^3}dx = \int (x^{-2} - 2x^{-3})dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = x^{-2} - x^{-1} + C.$$

Проверим решение. Запишем на экране задание **integrate((x-2)/x^3,x)** и нажмем клавиши Shift+Enter.

2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Воспользуемся тождеством $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Тогда получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= -\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}x + C.$$

2. Замена переменной в интеграле.

Наибольшее число известных интегралов вычисляются с использованием этого приема. Суть его в следующем. Вместо прежней переменной интегрирования вводится новая переменная так, чтобы вновь получившийся интеграл стал более простым, или более удобным для интегрирования.

Если $F(x) + C = \int f(x)dx$, то $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство: $(F(x) + C)' = f(x)$.

Следовательно, согласно правилу дифференцирования сложной функции:

$(F(\varphi(t)) + C)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Ч.Т.Д.

Формулу интегрирования заменой переменной можно записать в виде

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

При подходящей замене переменной мы сводим заданный интеграл к табличному.

Примеры:

1. Найти $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

Здесь $t=\sin x, \cos xdx=dt$. Следовательно, в соответствии с тем, что $\int e^t dt=e^t+C$, имеем $\int e^{\sin x}\cos x\,dx=e^{\sin x}+C$.

2. Найти $\int \mathrm{tg}x\,dx$.

Сделаем замену $t=\cos x, \quad dt=-\sin xdx$. Тогда

$$\int \mathrm{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

3. Найти $\int e^{-x^2}xdx$.

Сделаем замену $-x^2=t$. Тогда $-2xdx=dt$ и

$$\int e^{-x^2}xdx=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

4. Найти $\int\frac{dx}{x^2+2x+17}$.

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+17}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+16}.$$

Вынесем 16 из знаменателя:

$$\frac{1}{16}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{4}\right)^2}$$

Сделаем замену $\frac{x+1}{4}=t$. Теперь мы получили табличный интеграл:

$$\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{4}\mathrm{arctg}t+C.$$

В результате имеем $\int\frac{dx}{x^2+2x+17}=\frac{1}{4}\mathrm{arctg}(\frac{x+1}{4})+C$.

3. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям обычно используется, если подынтегральная функция представляет произведение функций разных типов – степенная и показательная, степенная и тригонометрическая, обратная тригонометрическая функция и степенная, показательная и тригонометрическая и т.д.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx + C$$

$$(\text{или } \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)).$$

Доказательство:

Справедливы соотношения:

$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = u(x)\cdot v(x) + C$ и

$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx + \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$

Сравнивая правые части, получим приведенную выше формулу. Ч.Т.Д.

При применении процедуры интегрирования по частям важен выбор функции u.

Укажем приоритеты выбора этой функции.

1) В первую очередь в качестве выбирается одна из функций $\ln x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arctg} x$.

2) При отсутствии этих функций в подынтегральном выражении в качестве u может быть выбрана находящаяся в числителе степенная функция с целым положительным показателем степени.

Других приоритетов при выборе этой функции нет, задание u в этом случае осуществляется перебором возможных вариантов.

Примеры:

1. Найти $\int e^x x\,dx$.

Обозначим $x = u(x)$, $v'(x) = e^x$. Тогда $v(x) = e^x$, $u'(x) = 1$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$\int e^x x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C$.

2. Найти $\int (\ln x)^2 dx$.

В этом примере мы применим метод интегрирования по частям дважды:

$$\int (\ln x)^2 dx = \left[\begin{array}{c} u = (\ln x)^2, u' = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}, \\ v' = 1, v = x \end{array}\right] = x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln x \frac{x}{x} dx =$$

$$= x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x, u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1, v = x \end{array}\right] = x \cdot (\ln x)^2 - 2(x\ln x - \int \frac{x}{x} dx) =$$

$$= x \cdot (\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$$

3. Найти $\int e^{ax} \cos bx dx$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \cos bx, & du = -b \sin bx dx \\ dv = e^{ax} dx, & v = e^{ax} / a \end{array}\right\} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \sin bx, & du = b \cos bx dx \\ dv = e^{ax} dx, & v = e^{ax} / a \end{array}\right\} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx$$

После повторного интегрирования по частям в решении возник искомый интеграл $I = \int e^{ax} \cos bx dx$. Значение I теперь можно выразить из тождества

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I \ .$$

Получим

$$I \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx .$$

Таким образом,

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a e^{ax} \cos bx + b e^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2} + C .$$

Некоторые классы интегрируемых функций

Далее будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов функций. В первую очередь рассмотрим интегралы от дробно-рациональных функций. Важность этого класса интегралов следует из того, что наибольшее число интегралов других классов сводятся именно к этим интегралам.

Интегрирование простейших дробно-рациональных функций

Рассмотрим 3 простейшие дробно-рациональные функции, интегралы от которых вычисляются следующим образом

1. $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$
2. $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C$
3. $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)}$, $p^2-4q<0$

(при $p^2-4q \geq 0$ этот интеграл можно свести к более простому виду)

Простейшие дроби 3 типа преобразуются одинаково по следующей схеме:

1) Выделяется полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

где

$$a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{4q-p^2}{4} \geq 0$$

2) Делается замена переменной $\{t = x + p/2, dt = dx\}$ и интеграл разбивается на два. Тогда интеграл 3 типа сводится к следующим простым интегралам:

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)} = \int \frac{M(t-p/2)+N}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2t}{t^2+a^2}dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\frac{M}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right)+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C$$

Пример: Вычислить $\int\frac{4x+3}{x^2+4x+5}dx$.

Поскольку $p^2-4q=16-20=-4<0$, данный интеграл является интегралом третьего типа. Решаем его, используя вышеприведенную процедуру

$$\int\frac{4x+3}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{4x+3}{(x+2)^2+1}dx=\begin{Bmatrix}t=x+2\\ dt=dx\end{Bmatrix}=\int\frac{4t-8+3}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\frac{4t}{t^2+1}dt-5\int\frac{dt}{t^2+1}=2\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}-5\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2\ln\left|t^2+1\right|-5\operatorname{arctg}x+C=2\ln\left|x^2+4x+5\right|-5\operatorname{arctg}(x+2)+C$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение*:* ***Дробно-рациональной функцией*** называется выражение вида

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m},$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степеней n и m соответственно.

Определение: Дробь называется ***правильной***, если старшая степень многочлена, находящегося в числителе, меньше старшей степени многочлена в знаменателе, то есть $n<m$, в противном случае дробь неправильная.

При вычислении интегралов от дробно-рациональных функций необходимо руководствоваться следующими правилами:

1) Установить, является ли подынтегральная функция правильной или неправильной дробью. Если дробь неправильная, представить ее в виде суммы целой части и правильной дроби.

2) Выяснить, является ли правильная дробь простейшей, если да, то приступить к ее интегрированию.

3) Если дробь не является простейшей, представить ее в виде суммы простейших дробей и после этого приступить к интегрированию.

Теорема: Правильная несократимая дробно рациональная функция

$$\frac{P_n(x)}{\left(x-a\right)^s\left(x^2+px+q\right)^k},\ (m<s+2k\ )$$

может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{\left(x-a\right)^s\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{A_1}{\left(x-a\right)^s}+\frac{A_2}{\left(x-a\right)^{s-1}}+\frac{A_3}{\left(x-a\right)^{s-2}}+\ldots+\frac{A_s}{\left(x-a\right)}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+px+q\right)^{k-2}}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)}$$

1) После представления правильной дробно-рациональной функции в виде суммы простейших дробей приводим правую часть формулы к общему знаменателю, следя за тем, чтобы общий знаменатель суммы дробей совпадал со знаменателем разлагаемой дроби.

2) Так как знаменатели дробей в левой и правой частях равенства совпадают, приравняем их числители, в результате получаем равенство многочленов, расположенных в левой и правой частях формулы.

3) Из условия, что многочлены равны только тогда, когда совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему уравнений относительно коэффициентов разложения, причем доказано, что она имеет единственное решение.

4) После определения из полученной системы значений коэффициентов разложения интегрируем простейшие дроби.

Пример:

$$\int\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx$$

Подынтыгральная функция является правильной несократимой дробью. Разложим ее на простейшие дроби

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+3)}+\frac{D}{(x+3)^2}.$$

После приведения правой части равенства к общему знаменателю имеем

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2} \equiv \frac{A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + D(x-2)}{(x-2)(x+3)^2}$$

Приравниваем числители дробей

$$3x+2 \equiv A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + D(x-2), \qquad (*)$$

откуда следует: $3x+2 \equiv A(x^2+6x+9) + B(x^2+x-6) + D(x-2)$.

Требуем равенства коэффициентов при одинаковых степенях многочленов, в результате приходим к системе трех уравнений относительно коэффициентов разложения

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B=0 \\ x & 6A+B+D=3 \\ 1 & 9A-6B-2D=2 \end{array}$$

Итак, получена система трех уравнений относительно A, B, D. Известно, что ее решение единственно. Решение может быть получено разными способами.

Представляет особый интерес добавление к этой системе дополнительных, «лишних» уравнений, упрощающих получение решения. Рассуждают при этом следующим образом. Тождество (*) предполагает, что равенство справедливо при любых значениях переменной x, следовательно, его можно использовать и при конкретных значениях переменной. Пусть $x=2$, тогда

$$8 = 25A + B\cdot 0 + D\cdot 0 \Rightarrow A = \frac{8}{25}.$$

Из первых двух уравнений системы получим

$$A+B=0 \quad \Rightarrow B = -\frac{8}{25}$$

$$6A+B+D=3 \quad \Rightarrow D = 3+\frac{8}{25}-\frac{48}{25}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$$

Третье уравнение используем для проверки полученных значений

$$\frac{72}{25}-\frac{70}{25}+\frac{48}{25}=\frac{50}{25}=2.$$

Теперь $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx = \frac{8}{25}\int\frac{dx}{(x-2)} - \frac{8}{25}\int\frac{dx}{(x+3)} + \frac{7}{5}\int\frac{dx}{(x+3)^2} =$

$$= \frac{8}{25}\ln|x-2| - \frac{8}{25}\ln|x+3| - \frac{7}{5(x+3)} + C = \frac{8}{25}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| - \frac{7}{5(x+3)} + C$$

Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы от дробно-рациональных функций, аргументами которых являются тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

заменой переменной сводятся к интегралам $\int \bar{R}(t)dt$, где $\bar{R}$ – дробно-рациональная функция нового аргумента t.

Решение этой задачи осуществляется с помощью универсальной подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Покажем, что функции $\cos x$, $\sin x$ и dx оказываются дробно-рациональными функциями новой переменной t:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Итак,

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int \bar{R}(t)dt.$$

Таким образом, задача приведения рассматриваемого интеграла к интегралу предыдущего класса решена. Однако, как показывает опыт, эта замена приводит к сложным интегралам от дробно-рациональных функций, вычисление которых весьма затруднительно, если вообще возможно. В некоторых случаях с помощью других подстановок удается получить более простые дробно рациональные функции. Эти подстановки, называют иногда специальными, так как применимы они лишь при выполнении некоторых условий.

1) Замена $t = \sin x$ применима, если подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$:

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$$

2) Замена $t=\cos x$ применима, если подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$:

$$R(\cos x,-\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$$

3) Замена $t=\operatorname{tg} x$ применима, если подынтегральная функция четна относительно $\cos x$ и $\sin x$ одновременно:

$$R(-\cos x,-\sin x)=R(\cos x,\sin x)$$

Таким образом, приведение рассматриваемого класса интегралов к предыдущему классу возможно двумя способами. Либо применением универсальной подстановки, приводящей почти всегда к интегралам от сложных дробно рациональных функций, либо использованием, если это возможно, наиболее подходящей специальной подстановки.

Опыт показывает, что применение универсальной подстановки целесообразно, когда не работает ни одна из специальных подстановок. Если допустимы несколько специальных подстановок, желательно осуществить каждую из них, чтобы выбрать ту, которая приводит к интегралу от самой простой дробно рациональной функции.

Примеры:

1. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$

Нетрудно проверить, что можно реализовать все приведенные выше подстановки. В самом деле, подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, нечетна относительно $\sin x$, так же она четна относительно одновременно $\cos x$ и $\sin x$. Универсальная же подстановка осуществима в этих интегралах всегда. Реализуем поочередно все подстановки, начиная с универсальной.

1) $$\int \operatorname{tg}^5 x dx=\int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}dx=\int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5}\frac{2dt}{1+t^2}=-64\int \frac{t^5 dt}{\left(1-t^2\right)^5\left(1+t^2\right)}=$$

$$=-64\int \frac{t^5 dt}{\left(1-t\right)^5\left(1+t\right)^5\left(1+t^2\right)}$$

В результате получен интеграл от дробно-рациональной функции, дробь правильная, несократимая. Ее можно представить в виде суммы одиннадцати простейших дробей. Относительно коэффициентов разложения получается система 12 алгебраических уравнений.

2) $\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} \cos x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\left(1-\sin^2 x\right)^3} \cos x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int \frac{t^5 dt}{\left(1-t^2\right)^3} = -\int \frac{t^5 dt}{(t-1)^3 (t+1)^3}.$$

Подынтегральная функция может быть представлена в виде суммы шести простейших дробей, для отыскания коэффициентов разложения требуется решить систему 6 алгебраических уравнений. Задача значительно проще по сравнению с 1).

3) $\int \mathrm{tg}^5 x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\, x \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{t^5 dt}{1+t^2}$

Итак, необходимо вычислить интеграл от неправильной дробно рациональной функции, что значительно проще вычисления интеграла 2), тем более 1).

4) $\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} \sin x dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^5 x} \sin x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^5} dt = -\int \left(\frac{1}{t^5} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} - \ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$$

Таким образом, последний вариант замены переменной оказался самым удачным, с помощью этой подстановки интеграл вычислен. В ходе решения подтвердилось, что универсальная подстановка в рассмотренном примере приводит к значительно более трудоемким вычислениям.

2. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2}$

В этом случае применима лишь универсальная замена:

$$\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2} = \left\{ \begin{array}{ll} t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} & dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\left(\dfrac{6t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 2 \right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+6t+3} = \int \frac{2dt}{(t+3)^2 - 6} = \left\{ \begin{array}{l} z = t+3 \\ dz = dt \end{array} \right\} = 2\int \frac{dz}{z^2-6} = \frac{2}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{z-\sqrt{6}}{z+\sqrt{6}} \right| + C =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+3-\sqrt{6}}{t+3+\sqrt{6}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{6}}\right|+C.$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n xdx$.

Эти интегралы являются частным случаем интеграла $\int R(\cos x,\sin x)dx$, следовательно, к ним применима теория предыдущего параграфа. Ее и следует использовать, когда один из показателей степеней нечетен. Если m – нечетно, то делается замена $t=\cos x$, если нечетно n, реализуется замена $t=\sin x$. Интересен случай, когда m и n – четные. Теория предлагает в этом случае замену $t=\operatorname{tg} x$, однако удобнее понизить общую степень подынтегральной функции с помощью одной из формул

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример:

$$\int\sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int\left(1-\cos 4x\right)dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

3. Интегралы вида $\int\sin ax\cos bxdx$, $\int\sin ax\sin bxdx$, $\int\cos ax\cos bxdx$.

Они решаются с помощью формул

$$\int\sin ax\cos bxdx=\frac{1}{2}\left[\int\sin\left(\left(a+b\right)x\right)dx+\int\sin\left(\left(a-b\right)x\right)dx\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((a+b)x)}{a+b}+\frac{\cos((a-b)x)}{a-b}\right]+C,$$

$$\int\sin ax\sin bxdx=\frac{1}{2}\left[\int\cos\left(\left(a-b\right)x\right)dx-\int\cos\left(\left(a+b\right)x\right)dx\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a-b)x)}{a-b}-\frac{\sin((a+b)x)}{a+b}\right]+C,$$

$$\int\cos ax\cos bxdx=\frac{1}{2}\left[\int\cos\left(\left(a-b\right)x\right)dx+\int\cos\left(\left(a+b\right)x\right)dx\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a-b)x)}{a-b}+\frac{\sin((a+b)x)}{a+b}\right]+C.$$

Интегрирование иррациональных выражений

Этот класс интегралов является наиболее сложным, так как включает в себя множество подклассов интегралов, в каждом из которых свои приемы вычислений. Более того, кажущаяся очевидной замена переменной чаще всего не приводит к положительному результату. Основная идея, реализуемая в этом классе интегралов, избавление от радикалов в подынтегральном выражении.

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[p]{ax+b}, \sqrt[q]{ax+b}\right)dx$, где R – дробно-рациональная функция. В этом случае работает замена $ax+b=z^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел $m,\ n,\ p,\ q$, т. е. s – наименьшее из чисел, делящихся нацело на $m,\ n,\ p,\ q$.

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}} = \left\{\begin{aligned} x &= z^6 \\ dx &= 6z^5dz \end{aligned}\right\} = \int \frac{6z^5dz}{z^3-2z^2} = 6\int \frac{z^3dz}{z-2} = 6\int \frac{(z^3-8+8)dz}{z-2} =$$

$$= 6\left[\int\left(z^2+2z+4\right)dz + 8\int\frac{dz}{z-2}\right] = 2z^3+6z^2+24z+48\ln\left|z-2\right|+C =$$

$$= 2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}+48\ln\left|\sqrt[6]{x}-2\right|+C.$$

2. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$.

Для этих интегралов имеются замены переменных, напрямую приводящие их к классу дробно-рациональных функций. Однако предпочтительнее в этом случае замена, переводящая интеграл в класс тригонометрических функций:

$$\left\{\begin{aligned} & x = a\sin t, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t \\ & dx = a\cos t dt \end{aligned}\right\}$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \int R\left(a\sin t, a\cos t\right)a\cos t dt$.

Преобразование полученного в результате замены переменной интеграла происходит по правилам, установленным в классе тригонометрических функций.

Пример:

$$\int \frac{(1-x)}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 2\sin t, \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2 t)} = 2\cos t \\ dx = a\cos t dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{(1-2\sin t)2\cos t}{2\cos t}dt = \int (1-2\sin t)dt = t + 2\cos t + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + 2\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)} + C = \arcsin\frac{x}{2} + 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + C.$$

3. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$.

Подынтегральная функция приводится к дробно-рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t, \quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,t} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt,$$

откуда следует

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \int R\left(a\,\mathrm{tg}\,t, \frac{a}{\cos t}\right)\frac{a}{\cos^2 t}dt = \int \bar{R}(\cos t, \sin t)dt.$$

Для преобразований полученного интеграла используем теорию, относящуюся к интегралам от тригонометрических функций.

Пример:

$$\int \frac{(2+5x)}{\sqrt{(9+x^2)^3}}dx = \left\{ x = 3\,\mathrm{tg}\,t, \sqrt{9+x^2} = \frac{3}{\cos t}, dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \right\} = \int \frac{2+15\,\mathrm{tg}\,t}{\frac{27}{\cos^3 t}}\frac{3}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int (2\cos t + 15\sin t)dt = \frac{2}{9}\sin t - \frac{5}{3}\cos t + C =$$

$$= \frac{2}{9}\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right) - \frac{5}{3}\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right) + C$$

Если учесть формулы

$$\cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,x}}, \quad \sin x = \mathrm{tg}\,x\cos x = \mathrm{tg}\,x\sqrt{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,x}},$$

$$\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+x^2}},$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Очевидно,

$$\int\frac{(2+5x)}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}dx=\frac{2x}{9\sqrt{9+x^2}}-\frac{5}{\sqrt{9+x^2}}+C.$$

4. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$.

Подынтегральная функция приводится к дробно-рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$x=\frac{a}{\sin t},\quad \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}=a\frac{\cos t}{\sin t},\quad dx=\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt,$$

Откуда следует

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=-\int R\left(\frac{a}{\sin t},a\frac{\cos t}{\sin t}\right)\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt=\int \bar{R}\left(\cos t,\sin t\right)dt$$

Пример:

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left\{x=\frac{1}{\sin t},\sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t},dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt\right\}=$$

$$=\int\frac{\cos t}{\sin t}\sin t\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=-\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=\operatorname{ctg} t+t+C=$$

$$=\operatorname{ctg}\arcsin\frac{1}{x}+\arcsin\frac{1}{x}+C=\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}+C$$

Здесь учитывались формулы:

$$\operatorname{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}-1,\quad \operatorname{ctg}\arcsin\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}-1}=\sqrt{x^2-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Секаева Л.Р. Курс лекций по математике для бакалавров-геологов: Учебное пособие/ Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева, Е.А. Широкова. – Казань: Казанский федеральный университет, 2014. – 251 с.

2. Гусак А.А. Высшая математика / А.А. Гусак. В двух томах. – Минск. ТетраСистемс, 2009.

3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев.– М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003 – 654 с.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

Загрузка программы MAXIMA

http://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows/5.28.0-Windows/maxima-5.28.0-2.exe/down

Практикум по работе в программе MAXIMA

http://www.pmtf.msiu.ru/chair31/students/spichkov/maxima2.pdf