

**КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

Кафедра геометрии

Е.Н. СОСОВ

ВВЕДЕНИЕ В РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ – 2016

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
“Казанский (Приволжский) федеральный университет”

Учебно-методической комиссии Института математики и механики
Протокол No. 9 от 9 июня 2016 г.

заседания кафедры геометрии
Протокол No. 8 от 30 мая 2016 г.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, доцент **А.А. Попов**

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент К(П)ФУ **В.В. Шурыгин (мл.)**

Сосов Е.Н.

Введение в риманову геометрию: учеб.-метод. пособие / Е.Н. Сосов — Казань:
Казан. ун-т, 2016. - 52 с.

Пособие содержит введение в риманову геометрию.
Предназначено для студентов-математиков III-IV курсов.

УДК 515.17

© Сосов Е.Н., 2016
© Казанский университет, 2016

Оглавление

Введение	5
0.1 Связность на многообразии. Ковариантное дифференцирование	6
0.2 Параллельный перенос вектора вдоль кривой. Группа голономии	9
0.3 Геодезические линейной связности. Экспоненциальное отображение	11
0.4 Ковариантное дифференцирование тензорных полей	15
0.5 Тензор кручения и симметрические связности. Геометрический смысл тензора кручения. Координаты тензора кручения в голономном и неголономном реперах	17
0.6 Тензор кривизны линейной связности. Координаты тензора кривизны в голономном и неголономном реперах. Тождества Бианки. Геометрический смысл тензора кривизны	20
0.7 Тензор Риччи. Форма объема. Эквивалентная связность	24
0.8 Риманова связность. Тензор кривизны римановой связности	26
0.9 Преобразование связности	31
0.10 Тензоры Бианки, Вейля, Эйнштейна и гауссова кривизна. Римановы тензоры кривизны двумерного и трехмерного многообразий	32
0.11 Секционная кривизна. Пространство постоянной кривизны	36
0.12 Пространство Эйнштейна. Критерий Томаса	37
0.13 Конформные преобразования метрического тензора	40
0.14 Тензор конформной кривизны. Конформно-плоские пространства	42
0.15 Аффинные отображения пространств аффинной связности. Аффиннитеты	44

0.16	Геодезические отображения пространств аффинной связности. Проективно-евклидово пространство аффинной связности	48
	Литература	51

Введение

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса по римановой геометрии. Оно предназначено для студентов-математиков III-IV курсов. Рассматриваются различные классы пространств и их отображений. Например, римановы, конформно-плоские и проективно-евклидовы пространства, пространства Эйнштейна и пространства постоянной кривизны.

Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

В пособии приняты следующие обозначения.

⊙ — символ начала (конца) доказательства.

○ — обозначает определение.

0.1 Связность на многообразии. Ковариантное дифференцирование

Для простоты формулировок предполагаем рассматриваемые функции и многообразия гладкими. Напомним некоторые определения.

О. Тензорное поле валентности (p, q) в области $U \subset M$ гладкого многообразия есть отображение, которое произвольной точке $x \in M$ ставит в соответствие тензор $F_x(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q, \eta^1, \dots, \eta^p)$ с аргументами из касательного и кокасательного пространств.

В координатах тензорное поле задается своими компонентами — набором n^{p+q} ($n = \dim M$) функций, которые в каждой точке являются значениями тензора на базисных векторах и ковекторах касательного и кокасательного пространств

$$F_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) = F_x(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}).$$

Тензорное поле называется гладким, если эти функции гладкие. При переходе от карты (U, x^i) к карте (U', x'^i) компоненты тензорного поля изменяются по линейному закону

$$F_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}(x') = P_{i'_1}^{i_1} \dots P_{i'_p}^{i_p} F_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) P_{j'_1}^{j_1} \dots P_{j'_q}^{j_q}, \quad (1)$$

где матрицей перехода в каждой точке пересечения областей карт является якобиева матрица P с элементами $P_i^{i'} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^i}$ и обратная к ней матрица P^{-1} с элементами $P_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}}$.

Из этой формулы следует, что обращение тензорного поля в нуль не зависит от выбора координат.

Для тензорных полей выполнимы алгебраические операции: сложение тензорных полей одинаковой валентности, умножение, свертывание, симметрирование и альтернирование. Все они выполняются поточечно. Более того, тензорное поле можно умножить на функцию, поскольку в каждой точке эта операция сводится к умножению на число.

Напомним простые примеры тензорных полей.

В каждой карте (U, x^i) векторное поле \mathbf{a} действует на скалярное поле $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ как дифференциальный оператор по формуле

$$\mathbf{a}(F) = a^i \partial_i F,$$

т.е. в результате получим новое скалярное поле.

Ковекторное поле $\alpha : x \mapsto T_x^*M$ задается ковектором в каждой точке многообразия. Рассмотрим в какой-либо точке x множество векторов, которые обращают в нуль линейную форму α_x :

$$\alpha(\mathbf{a}) = \alpha_1 a^1 + \cdots + \alpha_n a^n = 0.$$

Это уравнение гиперплоскости в касательном пространстве этой точки. Следовательно, ковекторное поле в каждой точке многообразия задает гиперплоскость, т.е. получаем на многообразии так называемое *распределение* — поле гиперплоскостей.

О. Ковекторное поле — потенциально, если оно является градиентом некоторого скалярного поля: $\alpha = \text{grad}F$. Функция F — потенциал поля.

Пусть $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии M и \mathbf{h} — заданное векторное поле.

О. Ковариантной производной в направлении векторного поля \mathbf{h} называется отображение $\nabla_{\mathbf{h}} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, удовлетворяющее условиям:

$$1) \nabla_{\mathbf{h}}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{a} + \mu \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{b}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \quad (2)$$

$$2) \nabla_{\mathbf{h}}(f \mathbf{a}) = f \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{a} + (\mathbf{h}f) \mathbf{a}, \quad \forall f \in \mathbf{F}(M); \quad (3)$$

$$3) \nabla_{f\mathbf{h}_1 + g\mathbf{h}_2} \mathbf{a} = f \nabla_{\mathbf{h}_1} \mathbf{a} + g \nabla_{\mathbf{h}_2} \mathbf{a} \quad \forall f, g \in \mathbf{F}(M). \quad (4)$$

Многообразиие, на котором задан оператор ковариантного дифференцирования, обозначается (M, ∇) .

Пусть (U, x^i) — карта на (M, ∇) и $\{\partial_i\}$ — натуральный базис. Обозначим частную ковариантную производную через $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ и положим

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (5)$$

Это *деривационные уравнения поля натуральных реперов*.

Пусть $\mathbf{a} = a^j(x) \partial_j$. Тогда, учитывая свойства (2 – 4), получим

$$\nabla_i \mathbf{a} = \nabla_i(a^j \partial_j) = \partial_i a^j \partial_j + \Gamma_{ij}^k a^j \partial_k = (\partial_i a^k + \Gamma_{ij}^k a^j) \partial_k. \quad (6)$$

Следовательно,

$$\nabla_i \mathbf{a}^k = \partial_i a^k + \Gamma_{ij}^k a^j,$$

$$\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{a} = h^i \nabla_i \mathbf{a} = h^i (\partial_i a^k + \Gamma_{ij}^k a^j) \partial_k.$$

Таким образом, задание операции ковариантного дифференцирования эквивалентно заданию в каждой карте совокупности функций $\Gamma_{ij}^k(x)$. Эти функции называются *компонентами линейной связности* относительно заданной карты, а линейные дифференциальные формы $\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i$ называются *формами связности*.

О. *Линейная связность на многообразии M есть отображение $\mathbf{h} \mapsto \nabla_{\mathbf{h}}$, сопоставляющее каждому векторному полю $\mathbf{h} \in \mathfrak{X}(M)$ оператор ковариантного дифференцирования по \mathbf{h} .*

Более старое название: аффинная связность. Пара (M, ∇) называется *пространством аффинной связности*. Выясним, как компоненты связности преобразуются при замене координат $x^{i'} = f^{i'}(x^i)$ на пересечении $(U, x^i) \cap (U', x^{i'})$ двух карт.

Теорема 1 При переходе от одних координат к другим компоненты линейной связности преобразуются по следующему закону

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = P_k^{k'} (\Gamma_{ij}^k P_{i'}^i P_{j'}^j + P_{i'j'}^k), \text{ где } P_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, P_{i'j'}^k = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}, P_k^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}. \quad (7)$$

В матричной записи этот закон имеет вид

$$\omega' = P(\omega P^{-1} + dP^{-1}),$$

где $\omega = (\omega_j^k)$ — матрица форм связности.

⊙ Используя (5) и свойства ковариантной производной, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{i'j'}^{k'} P_{k'}^k \partial_k &= \Gamma_{i'j'}^{k'}(x') \partial_{k'} = \nabla_{i'} \partial_{j'} = \nabla_{\partial_{i'}} (P_{j'}^j \partial_j) = P_{j'}^j \nabla_{\partial_{i'}} \partial_j + \partial_{i'} P_{j'}^j \partial_j = \\ &= P_{j'}^j \nabla_{(P_{i'}^i \partial_i)} \partial_j + P_{i'j'}^k \partial_k = P_{i'}^i P_{j'}^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + P_{i'j'}^k \partial_k = (P_{i'}^i P_{j'}^j \Gamma_{ij}^k + P_{i'j'}^k) \partial_k, \end{aligned}$$

откуда после свертывания с $P_k^{m'}$ приходим к утверждению теоремы. ⊙

Формула (7) показывает, что компоненты связности не образуют тензорного поля и обращение их в нуль не имеет инвариантного характера.

Положим в декартовых координатах аффинного пространства \mathbb{A}^n все функции $\Gamma_{ij}^k(x)$ равными нулю. Тогда получим на \mathbb{A}^n так называемую *каноническую линейную связность*.

0.2 Параллельный перенос вектора вдоль кривой. Группа голономии

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — гладкий путь на пространстве аффинной связности (M, ∇) , локально имеющий параметрические уравнения $x^i = x^i(t)$ с касательным вектором $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Тогда

$$\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \nabla_i \mathbf{a} = \left(\frac{da^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(x^l(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} a^j(t) \right) \partial_k$$

называется *ковариантной производной векторного поля \mathbf{a} вдоль пути γ* .

О. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ назовем *параллельным вдоль заданного гладкого пути γ* , если его ковариантная производная вдоль этого пути равна нулю:

$$\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = 0,$$

то есть в локальных координатах

$$\nabla_i a^k = \frac{da^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(x^l(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} a^j(t) = 0. \quad (8)$$

Теорема 2 Пусть в начальной точке $x(0)$ гладкого пути $\gamma : x = x(t)$, $t \in [0, 1]$ задан вектор $\mathbf{a}_0 \in T_{x(0)}M$. Тогда существует параллельное векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ вдоль этого пути, такое что $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0$. В этом случае говорят, что во всякой точке этого пути существует единственный вектор, параллельный данному.

⊙ В силу непрерывности γ образ $x([0, 1])$ компактного отрезка компактен в M . Следовательно, компакт $x([0, 1])$ может быть покрыт конечным числом областей карт и путь может разбит на конечное число путей, каждый из которых принадлежит одной карте. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что образ $x([0, 1])$ принадлежит одной карте. Пусть $x^i = x^i(t)$ — уравнение этого пути в локальных координатах. Условие (8) приводит к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которая по теореме Коши имеет единственное гладкое решение при начальных данных $a^k(0) = a^k_0$, продолжаемое до значения $t = 1$. ⊙

О. Для заданного на многообразии M гладкого пути $\gamma : x = x(t)$, $t \in [0, 1]$ отображение $P_\gamma : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(t)}M$, которое сопоставляет вектору

$\mathbf{a}_0 \in T_{x(0)}M$ параллельный вдоль $\gamma|_{[0,t]}$ вектор $\mathbf{a}(t) \in T_{x(t)}M$, называется параллельным переносом вдоль γ .

Теорема 3 Для заданного на многообразии M гладкого пути $\gamma : x = x(t)$, $t \in [0, 1]$ параллельный перенос $P_\gamma : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(1)}M$ есть изоморфизм касательных пространств.

⊙ Из линейности системы дифференциальных уравнений (8) следует, что ее решение линейно зависит от начального вектора. Значит, отображение P_γ — линейно. Параллельный перенос $P_{\gamma^{-1}}$ вдоль пути $\gamma^{-1} : y = x(1 - t)$, $t \in [0, 1]$ обратен исходному. Следовательно, это отображение — изоморфизм. ⊙

Пусть C_x — множество кусочно-гладких петель в точке $x \in M$. Кусочно-гладкая петля — это кусочно-гладкое отображение

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma(0) = \gamma(1) = x.$$

На множестве C_x определим бинарную операцию умножения петель

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \gamma_2(2t) \text{ при } t \in [0, 1/2], \quad \gamma_1\gamma_2(t) = \gamma_1(2t - 1) \text{ при } t \in [1/2, 1].$$

Если мы рассмотрим на (M, ∇) параллельные переносы вдоль этих петель, то с учетом доказательств теорем 2 и 3 получим

$$P_{\gamma_1\gamma_2} = P_{\gamma_1}P_{\gamma_2}.$$

Таким образом, определена бинарная операция умножения на множестве параллельных переносов H_x вдоль петель в точке $x \in M$:

$$H_x = \{P_\gamma : \gamma \in C_x\}.$$

Используя эту операцию и теорему 3, получим следующий результат.

Теорема 4 Множество H_x с рассмотренным умножением является подгруппой в группе всех невырожденных линейных операторов $GL(T_xM)$. H_x называется группой голономии линейной связности ∇ в точке $x \in M$.

Теорема 5 Если гладкое многообразие M связно, то группы голономии в двух произвольных точках изоморфны.

⊙ Известно, что связное гладкое многообразие линейно связно. Более того, любые две его точки x, y можно соединить кусочно-гладким путем γ . Тогда требуемый изоморфизм можно определить так

$$\phi : H_x \rightarrow H_y, \quad \phi(P_\tau) = P_{\gamma\tau\gamma^{-1}}. \odot$$

0.3 Геодезические линейной связности. Экспоненциальное отображение

Касательным полем на гладком пути γ многообразия называется векторное поле, состоящее из касательных векторов $\gamma'(t)$.

О. *Гладкий путь γ на многообразии называется геодезическим, если при некотором каноническом выборе параметра его касательное векторное поле $\mathbf{h} = (\frac{dx^k}{dt})$ параллельно вдоль γ .*

Из (8) сразу вытекает, что функции $x^k = x^k(t)$ должны удовлетворять системе ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (9)$$

Теорема 6 Для всякой точки $x \in M$ и всякого вектора $\mathbf{a} \in T_x M$ в этой точке существует единственный максимальный (не продолжаемый ни на какой бо́льший интервал $I_x(\mathbf{a})$ вещественной оси) геодезический путь $\gamma_{x,\mathbf{a}} : x = x(t)$ такой, что $x(0) = x$, $\frac{dx}{dt}(0) = \mathbf{a}$. Причем, согласно теореме о гладкой зависимости решений системы ОДУ от начальных данных, функции $x^k = x^k(t)$, задающие в локальных координатах геодезический путь, являются гладкими функциями от $2n + 1$ аргументов t, x^k, a^k . В этом смысле геодезический путь $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ гладко зависит от точки x и вектора \mathbf{a} .

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.

В аффинном пространстве с канонической линейной связностью параллельный перенос вдоль гладкого пути осуществляется по обычному закону: его декартовы координаты постоянны. Это сразу следует из (8),

поскольку все компоненты связности нулевые. Геодезические пути в канонической связности — прямые линии, поскольку решения системы ОДУ

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0$$

имеют вид

$$x^k = a^k t + b^k, \quad a^k, b^k = \text{const.}$$

Если $I_x(\mathbf{a}) = \mathbb{R}$ для любой точки $x \in M$ и любого вектора $\mathbf{a} \in T_x M$, то многообразие M с линейной связностью ∇ (а также сама связность) называется *геодезически полным (ой)*.

При замене параметра $t \rightarrow \lambda t$ геодезический путь $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ перейдет в геодезический путь $\gamma_{x,\lambda\mathbf{a}}$. Действительно, поскольку функции $y^k = x^k(\lambda t)$ также удовлетворяют уравнениям (9) и $\frac{dy^i(0)}{dt} = \lambda \frac{dx^i(0)}{dt}$, то

$$\gamma_{x,\mathbf{a}}(\lambda t) = \gamma_{x,\lambda\mathbf{a}}(t). \quad (10)$$

Предполагая для простоты рассуждений многообразие аналитическим, разложим функции, определяющие локальные уравнения геодезического пути в ряды Тейлора

$$x^i(t) = x_0^i + a^i t + c_2^i t^2 + \dots + c_m^i t^m + \dots, \quad (11)$$

где x_0^i — координаты точки x , $a^i = \frac{dx^i(0)}{dt}$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда при любом достаточно малом $|\lambda|$ соотношение (10) равносильно тождествам

$$c_m^i(\lambda\mathbf{a}) = \lambda^m c_m^i(\mathbf{a}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 2 \leq m < \infty.$$

Пусть $x_0 \in (M, \nabla)$ и $(U'_0, \phi) = (U'_0, x^k)$ — центрированная в x_0 карта, для которой $\phi(U'_0)$ — открытый шар с центром в нуле пространства \mathbb{R}^n .

Для каждой точки $x \in U'_0$ считаем касательное пространство $T_x M$ снабженным евклидовой структурой, по отношению к которой натуральный базис ортонормирован.

Теорема 7 Существует такое $\varepsilon > 0$ и такая окрестность $U_0 \subset U'_0$ точки x_0 , что для любой точки $x \in U_0$ и любого вектора $\mathbf{a} \in T_x M$ с $|\mathbf{a}| < \varepsilon$ геодезическая $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ определена при $|t| < 2$ ($(-2, 2) \subset I_x(\mathbf{a})$).

⊙ Из того, что геодезическая $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ гладко зависит от x и \mathbf{a} , следует существование такой окрестности $U_0 \subset U'_0$ точки x_0 и таких чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, что для каждой точки $x \in U_0$ и любого вектора $\mathbf{a} \in T_x M$ с $|\mathbf{a}| < \varepsilon_1$ геодезическая $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ определена при $|t| < 2\varepsilon_2$.

Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_1\varepsilon_2$. Тогда при $|\mathbf{a}| < \varepsilon$ верно неравенство $|\varepsilon_2^{-1}\mathbf{a}| < \varepsilon_1$, и потому геодезическая $\gamma_{x,\varepsilon_2^{-1}\mathbf{a}}$ определена при $|\varepsilon_2^{-1}t| < 2$.

Доказательство следует теперь из импликаций

$$t \in I_x(\mathbf{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_2 t \in I_x(\varepsilon_2^{-1}\mathbf{a}). \quad \odot$$

Уменьшив, если нужно, окрестность U_0 , мы можем считать, что $\phi(U_0)$ — открытый шар с центром в нуле пространства \mathbb{R}^n .

О. Вектор $\mathbf{a} \in T_x M$ называется экспоненцируемым, если геодезическая $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ определена при $t = 1$ (т.е. если $1 \in I_x(\mathbf{a})$). (O_x — множество всех экспоненцируемых векторов в $T_x M$). Для любого экспоненцируемого вектора $\mathbf{a} \in T_x M$ точка

$$\exp_x \mathbf{a} = \gamma_{x,\mathbf{a}}(1)$$

называется экспонентой вектора \mathbf{a} , а \exp_x — экспоненциальным отображением.

Отметим, что $\exp_x 0 = x$, т.е. $0 \in O_x$ и если $\mathbf{a} \in O_x$, то для каждого $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda\mathbf{a} \in O_x$, т.е. O_x обладает свойством звездности.

Равенство $O_x = T_x M$ имеет место тогда и только тогда, когда многообразие геодезически полно. По лемме 1 для каждого $x \in M$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $B(0, \varepsilon) \subset O_x$, т.е. $0 \in \text{Int } O_x$.

Из формулы (11) при $t = 1$ следует, что если координаты точки $\exp_x \mathbf{a}$ определены, то

$$(\exp_x \mathbf{a})^i = x^i + a^i + c_2^i(x, \mathbf{a}) + \dots + c_m^i(x, \mathbf{a}) + \dots, \quad (12)$$

где x^i — координаты точки x в карте

$$(U_0, \phi), \quad a^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

— координаты вектора \mathbf{a} в натуральном базисе, а $c_m^i(x, \mathbf{a})$, $1 \leq i \leq n$, $2 \leq m < \infty$, — гладкие функции от x , \mathbf{a} , являющиеся однородными многочленами степени m от a^1, \dots, a^n .

Поэтому для любых $i, j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial(\exp_x \mathbf{a})^i}{\partial a^j} = \delta_j^i + \frac{\partial c_2^i(x, \mathbf{a})}{\partial a^j} + \dots + \frac{\partial c_m^i(x, \mathbf{a})}{\partial a^j} + \dots,$$

где

$$\frac{\partial c_m^i(x, \mathbf{a})}{\partial a^j}$$

— однородные многочлены положительной степени $m - 1$ от a^1, \dots, a^n (и, значит, при $a^1 = 0, \dots, a^n = 0$ равные нулю).

Таким образом, в точке $0 \in T_x M$ якобиева матрица функций (12) является единичной матрицей и точка 0 обладает в $T_x M$ фундаментальной системой окрестностей, содержащихся в O_x , на каждой из которых отображение \exp_x является диффеоморфизмом на некоторую окрестность точки x .

О. Окрестность U^0 вектора $0 \in T_x M$ и окрестность U точки $x \in M$ называются нормальными окрестностями, если U^0 обладает свойством звездности и отображение \exp_x является ее диффеоморфизмом на U .

Таким образом, нормальные окрестности составляют фундаментальную систему окрестностей (соответственно вектора $0 \in T_x M$ и точки $x \in M$) и каждая нормальная окрестность диффеоморфна открытому шару в $T_x M$.

Координаты x^1, \dots, x^n в нормальной окрестности U называются *нормальными координатами*, если диффеоморфизм \exp_x^{-1} переводит их в линейные координаты на U^0 .

Нормальные координаты характеризуются тем, что проходящие через точку x геодезические имеют в них уравнения вида

$$x^i = a^i t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Имеет место

Теорема 8 (Уайтхеда) Каждая точка x_0 пространства аффинной связности обладает окрестностью U , являющейся нормальной окрестностью любой своей точки, и такой, что для любых точек $x, y \in U$ отрезок геодезической $\gamma_{x,y}$ содержится в U .

0.4 Ковариантное дифференцирование тензорных полей

Для распространения операции ковариантного дифференцирования на тензорные поля любой валентности введем в дополнение к условиям (2–4) еще два условия.

1) Ковариантная производная скалярного поля совпадает с обычной производной этого поля в заданном направлении:

$$\nabla_{\mathbf{h}} F = \mathbf{h}(F);$$

2) Для любой пары тензорных полей F, G

$$\nabla_{\mathbf{h}}(F \otimes G) = \nabla_{\mathbf{h}} F \otimes G + F \otimes \nabla_{\mathbf{h}} G.$$

Пусть (U, x^i) — карта на (M, ∇) и $\{\partial_i\}$ — натуральный базис. Рассмотрим сначала ковекторное поле $\alpha = \alpha_k(x) dx^k$.

Дифференцируя ковариантно условие сопряженности базисов

$$dx^k(\partial_j) = \delta_j^k,$$

получим $\nabla_i dx^k(\partial_j) + dx^k \nabla_i \partial_j = 0$.

Учитывая (5), отсюда найдем

$$\nabla_i dx^k(\partial_j) = -\Gamma_{ij}^k,$$

т. е.

$$\nabla_i dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j. \quad (13)$$

Это *дериwационные уравнения поля натуральных кореперов*, двойственные уравнениям (5).

Принимая во внимание свойства (2) и (3), будем иметь

$$(\nabla_i \alpha) = (\partial_i \alpha_k) dx^k + \alpha_k \nabla_i dx^k = (\partial_i \alpha_k) dx^k - \alpha_k \Gamma_{ij}^k dx^j$$

и, следовательно, имеем следующий аналог формулы (6)

$$\nabla_i \alpha_j = \partial_i \alpha_j - \Gamma_{ij}^k \alpha_k. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь, например, тензорное поле валентности $(1, 1)$. Пусть

$$F = F_j^i(x) \partial_i \otimes dx^j$$

— разложение этого тензора по векторам натуральных репера и корепера. Учитывая деривационные уравнения (5) и (13), получим

$$\begin{aligned} \nabla_k F &= (\partial_k F_j^i) \partial_i \otimes dx^j + F_j^i (\nabla_k \partial_i \otimes dx^j + \partial_i \otimes \nabla_k dx^j) = \\ &= (\partial_k F_j^i) \partial_i \otimes dx^j + F_j^i (\Gamma_{ki}^s \partial_s \otimes dx^j - \partial_i \otimes \Gamma_{ks}^j dx^s). \end{aligned}$$

В итоге имеем тензорное поле с компонентами

$$\nabla_k F_j^i = \partial_k F_j^i + \Gamma_{ks}^i F_j^s - \Gamma_{kj}^s F_s^i. \quad (15)$$

В общем случае координатная формула получается аналогично. Приведем ее еще для тензорных полей валентности $(0, 2)$ — билинейных форм:

$$\nabla_{\mathbf{h}} F_{ij} = h^k \nabla_k F_{ij} = h^k (\partial_k F_{ij} - \Gamma_{ki}^s F_{sj} - \Gamma_{kj}^s F_{is}). \quad (16)$$

Для заданного на многообразии M гладкого пути $\gamma : x = x(t)$, $t \in [0, 1]$ параллельный перенос $P_\gamma : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(1)}M$ есть изоморфизм касательных пространств. Следовательно, определен линейный изоморфизм кокасательных пространств $P_\gamma^* : T_{x(1)}^*M \rightarrow T_{x(0)}^*M$.

Вследствие этого становится возможным параллельное перенесение тензорных полей любой валентности. Условием этого является обращение в нуль ковариантной производной вдоль заданной кривой $x = x(t)$, когда $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Например, для тензорного поля валентности $(0, 2)$

$$\frac{\nabla F_{ij}}{dt} = \frac{dF_{ij}}{dt} - (\Gamma_{ki}^s F_{sj} + \Gamma_{kj}^s F_{is}) \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

0.5 Тензор кручения и симметрические связности. Геометрический смысл тензора кручения. Координаты тензора кручения в голономном и неголономном реперах

О. *Отображение*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \nabla_{\mathbf{b}}\mathbf{a} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

определяет кососимметричное тензорное поле валентности $(1, 2)$, которое называется тензором кручения аффинной связности ∇ . В случае, когда этот тензор равен нулю, т.е. когда для любых векторных полей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \nabla_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

связность ∇ называется симметрической (или симметричной).

\mathbb{R} -билинейность отображения T сразу следует из свойств ковариантной производной и скобки. Установим $\mathbf{F}(M)$ -билинейность этого отображения.

$$\begin{aligned} T(f\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \nabla_{f\mathbf{a}}\mathbf{b} - \nabla_{\mathbf{b}}(f\mathbf{a}) - [f\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \\ &= f\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \mathbf{b}(f)\mathbf{a} - f\nabla_{\mathbf{b}}\mathbf{a} - f[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \mathbf{b}(f)\mathbf{a} = fT(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Найдем координаты тензора кручения в некоторой карте

$$T_{ij}^k = T(\partial_i, \partial_j)^k = (\nabla_i \partial_j)^k - (\nabla_j \partial_i)^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, аффинная связность ∇ тогда и только тогда симметрична, когда в каждой карте

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Теорема 9 Если аффинная связность ∇ на многообразии M симметрична, то для любой точки x_0 в центрированных в этой точке нормальных координатах

$$(\Gamma_{ij}^k)_{x_0} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

⊙ Подставим в уравнения геодезических решение

$$x^i = a^i t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\Gamma_{ij}^k(t\mathbf{a})a^i a^j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Подставив в эти уравнения $t = 0$, с учетом симметричности связности и произвольности чисел a^i , $i = 1, \dots, n$, получим требуемое. ⊙

Пусть $x_0 \in M$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_{x_0}M$. Тогда на многообразии M найдется векторное поле \mathbf{A} , что в карте (U, x^i) его компоненты постоянны и в натуральном базисе в точке x_0 имеют координаты a^i , $i = 1, \dots, n$, совпадающие с координатами вектора \mathbf{a} .

Интегральная кривая $u : t \mapsto u(t)$ этого поля, проходящая при $t = 0$ через точку x_0 , будет задаваться в карте (U, x^i) функциями

$$x^i(t) = x_0^i + a^i t, \quad i = 1, \dots, n,$$

где x_0^i ($i = 1, \dots, n$) — координаты точки x_0 .

Поэтому для координат $b^i(t)$ вектора $\mathbf{b}(t)$, полученного параллельным переносом вектора \mathbf{b} вдоль кривой u в точку $u(t)$, будут иметь равенства

$$b^i(t) = b^i - (\Gamma_{kj}^i)_{x_0} a^k b^j t + o(t).$$

Фиксируем t . Пусть \mathbf{B} — векторное поле на M , координаты которого в карте (U, x^i) постоянны и равны $b^i(t)$.

Тогда интегральная кривая $v : s \rightarrow v(s)$ этого поля, проходящая при $s = 0$ через точку $u(t)$, будет задаваться в карте (U, x^i) функциями

$$s \mapsto x^i(t) + b^i(t)s, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для координат точки $x_t = v(s)|_{s=t}$ получим равенство

$$x_t^i = x_0^i + (a^i + b^i)t - (\Gamma_{kj}^i)_{x_0} a^k b^j t^2 + o(t^2).$$

Точку x_t можно представлять себе как результат сдвига точки x_0 на расстояние t сначала в направлении вектора \mathbf{a} , а затем в направлении вектора \mathbf{b} .

Аналогичные формулы (с перестановкой координат a^i и b^i) будут иметь место и для точки y_t , получающейся сдвигом точки x_0 сначала в направлении вектора \mathbf{b} , а затем в направлении вектора \mathbf{a} . Поэтому

$$\begin{aligned} y_t^i - x_t^i &= [(\Gamma_{kj}^i)_{x_0} a^k b^j - (\Gamma_{kj}^i)_{x_0} a^j b^k] t^2 + o(t^2) = \\ &= [(\Gamma_{kj}^i)_{x_0} - (\Gamma_{jk}^i)_{x_0}] a^k b^j t^2 + o(t^2) = T(\mathbf{a}, \mathbf{b})^i t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

На инфинитезимальном языке это означает, что попытка построить в M на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} бесконечно малый параллелограмм приводит к пятиугольнику, замыкающая сторона которого является бесконечно малой второго порядка, с точностью до бесконечно малых третьего порядка равной $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Это дает геометрическую интерпретацию тензора кручения и, в частности, показывает, что *аффинная связность тогда и только тогда симметрична, когда каждый бесконечно малый параллелограмм замыкается с точностью до бесконечно малых третьего порядка.*

Задача. Пусть аффинная связность ∇ на многообразии M симметрична и для любой точки x_0 с координатами x_0^k , $k = 1, \dots, n$, компоненты связности равны

$$(\Gamma_{ij}^k)_{x_0}, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Тогда нормальные координаты в некоторой окрестности этой точки можно ввести формулами

$$x^{k'} = \delta_s^{k'} \{ (x^s - x_0^s) + \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^s)_{x_0} (x^i - x_0^i) (x^j - x_0^j) \}, \quad i, j, k', s = 1, \dots, n.$$

Произвольный базис

$$X_i, \quad i = 1, \dots, n$$

модуля $\mathfrak{X}(M)$ над областью U карты (U, x^i) называется *неголономным базисом* в отличие от натурального (голономного) базиса.

Сопряженный базис (кобазис), то есть базис модуля 1-форм $\Omega^1 M$ над U , обозначим так

$$\theta^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

По определению

$$\theta^j(X_i) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Компоненты

$$\Gamma_{ij}^k = \theta^k(\nabla_{X_i} X_j), \quad \omega_j^k = \Gamma_{ij}^k \theta^i, \quad T_{ij}^k = \theta^k(T(X_i, X_j)), \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

называются *компонентами линейной связности, форм связности и тензора кручения соответственно в неголономном базисе* $\{\theta^j\}$.

Найдем компоненты тензора кручения в неголономном базисе

$$T_{ij}^k = \theta^k(T(X_i, X_j)) = \theta^k(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j]) = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - C_{ij}^k,$$

где коэффициенты C_{ij}^k находятся из разложений

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k.$$

0.6 Тензор кривизны линейной связности. Координаты тензора кривизны в голономном и неголономном реперах. Тождества Бианки. Геометрический смысл тензора кривизны

О. *Отображение*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad R(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c} = \nabla_{\mathbf{a}}\nabla_{\mathbf{b}}\mathbf{c} - \nabla_{\mathbf{b}}\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{c} - \nabla_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}\mathbf{c},$$

определяет тензорное поле валентности (1, 3), которое называется тензором кривизны линейной связности ∇ .

Найдем координаты тензора кривизны в некоторой карте

$$R_{ijl}^k = (R(\partial_i, \partial_j)\partial_l)^k = (\nabla_i \nabla_j \partial_l)^k - (\nabla_j \nabla_i \partial_l)^k =$$

$$(\nabla_i(\Gamma_{jl}^s \partial_s))^k - (\nabla_j(\Gamma_{il}^s \partial_s))^k =$$

$$(\partial_i \Gamma_{jl}^s \partial_s)^k - (\partial_j \Gamma_{il}^s \partial_s)^k + (\Gamma_{jl}^s \Gamma_{is}^m \partial_m)^k - (\Gamma_{il}^s \Gamma_{js}^m \partial_m)^k =$$

$$\partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{is}^k - \Gamma_{il}^s \Gamma_{js}^k = 2\{\partial_{[i} \Gamma_{j]l}^k + \Gamma_{[j|l}^s \Gamma_{i]s}^k\}, \quad i, j, k, l, m, s = 1, \dots, n.$$

При замене координат эти компоненты изменяются по тензорному закону

$$R_{i'j'l'}^{k'} = P_{i'}^i P_{j'}^j P_{l'}^l P_k^{k'} R_{ijl}^k.$$

Найдем компоненты тензора кривизны в неголономном базисе

$$R_{ijl}^k = \theta^k(R(X_i, X_j)X_l) = \theta^k(\nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_l - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_l - \nabla_{[X_i, X_j]} X_l) =$$

$$\theta^k(\nabla_{X_i}(\Gamma_{jl}^s X_s) - \nabla_{X_j}(\Gamma_{il}^s X_s) - C_{ij}^s \nabla_{X_s} X_l) =$$

$$\theta^k(X_i(\Gamma_{jl}^s)X_s - X_j(\Gamma_{il}^s)X_s + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{is}^m X_m - \Gamma_{il}^s \Gamma_{js}^m X_m - C_{ij}^s \Gamma_{sl}^m X_m) =$$

$$X_i(\Gamma_{jl}^k) - X_j(\Gamma_{il}^k) + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{is}^k - \Gamma_{il}^s \Gamma_{js}^k - C_{ij}^s \Gamma_{sl}^k.$$

Задача. Пусть $c^k, F_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ — координаты векторного поля и тензорного поля в карте (U, x^i) , где индексы изменяются от 1 до n . Тогда имеют место формулы (тождества Риччи)

$$2\nabla_{[i} \nabla_{j]} c^k = R_{ijl}^k c^l - T_{ij}^l \nabla_l c^k,$$

$$2\nabla_{[k} \nabla_{m]} F_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum_{a=1}^p R_{kml}^{i_a} F_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{b=1}^q R_{kmb}^l F_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - T_{km}^l \nabla_l F_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},$$

Теорема 10 Пусть линейная связность ∇ на многообразии M симметрична. Тогда ее тензор кривизны удовлетворяет тождеству Бианки

$$R_{ijl}^k + R_{jli}^k + R_{lij}^k = 0$$

и дифференциальному тождеству Бианки

$$\nabla_q R_{ijl}^k + \nabla_i R_{jql}^k + \nabla_j R_{qil}^k = 0.$$

⊙ Для любой точки $x_0 \in M$ в центрированных в этой точке нормальных координатах

$$(\Gamma_{ij}^k)_{x_0} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Тогда в точке x_0

$$R_{ijl}^k = \partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k.$$

Непосредственное вычисление приводит к тождеству Бианки. Далее

$$\nabla_q R_{ijl}^k = \partial_q \partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_q \partial_j \Gamma_{il}^k.$$

Снова непосредственное вычисление приводит к дифференциальному тождеству Бианки. ⊙

Лемма. Компоненты оператора параллельного перенесения $P_\gamma : T_x M \rightarrow T_{x(t)} M$ вдоль пути $\gamma : x = x(t)$ с начальной точкой $x(0) = x$ и с начальным касательным вектором $\mathbf{p} = (\frac{dx^i}{dt}(0))$ с точностью до малых более высокого порядка относительно параметра t равны

$$P_j^k(x, t) = \delta_j^k - t \Gamma_{ij}^k(x) p^i. \quad (17)$$

⊙ Условием параллельного перенесения вектора \mathbf{a} вдоль пути $x = x(t)$ с начальной точкой $x = x(0)$ является

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^i}{dt} a^j(t) = 0.$$

Будем искать решение этой системы ОДУ в виде степенного ряда по параметру t с начальным значением $a^k(0) = a^k$

$$a^k(t) = a^k + t \frac{da^k(t)}{dt}(0) + \dots$$

Значение производной в начальной точке из условия параллельного перенесения равно $\frac{da^k(t)}{dt}(0) = -\Gamma_{ij}^k(x) p^i a^j$, откуда

$$a^k(t) = (\delta_j^k - t \Gamma_{ij}^k(x) p^i) a^j,$$

что доказывает лемму. ⊙

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл тензора кривизны, рассмотрим проходящую через точку $x \in M$ 2-мерную поверхность с параметрическими уравнениями $x^k = x^k(u, v)$.

Векторы с координатами $p^i = \partial_u x^i(0)$ и $q^i = \partial_v x^i(0)$ образуют в этой точке натуральный базис этой поверхности и определяют ее касательную 2-плоскость $L \subset T_x M$.

Рассмотрим на этой поверхности петлю $\gamma : x = x(t)$, $0 \leq t \leq 1$ с началом и концом в точке x . Параллельное перенесение произвольного вектора \mathbf{a} вдоль этой петли порождает изоморфизм касательного пространства $T_x M$ на себя, которое в главной своей части определяется тензором кривизны и выбранной петлей.

В качестве петли рассмотрим принадлежащий поверхности малый криволинейный параллелограмм, образованный координатными линиями с вершинами

$$x(u, v), \quad x_1(u + t, v), \quad x_2(u, v + t), \quad x_3(u + t, v + t).$$

Параллельный перенос вдоль пути $\gamma_1 = xx_1x_3$ есть изоморфизм касательных пространств $P_{\gamma_1} : T_x M \rightarrow T_{x_3} M$.

Аналогичный изоморфизм P_{γ_2} получается при параллельном перенесении вдоль пути $\gamma_2 = xx_2x_3$. Пусть $\Delta \mathbf{a} = P_{\gamma_2}(\mathbf{a}) - P_{\gamma_1}(\mathbf{a})$. Тогда

$$\Delta \mathbf{a}^k = t^2 R_{ijl}{}^k(x) p^i q^j a^l + o(t^2).$$

Согласно лемме, в точке x_1 получим вектор $P(x, t)\mathbf{a}$, а в точке x_2 вектор $Q(x, t)\mathbf{a}$, где оператор параллельного переноса вдоль второй координатной линии $Q(x, t)\mathbf{a}$ определен аналогично $P(x, t)$ с помощью вектора \mathbf{q}

$$Q_j^k(x, t) = \delta_j^k - t \Gamma_{ij}^k(x) q^i.$$

Аналогично получим векторы $Q(x_1, t)P(x, t)\mathbf{a}$, $P(x_2, t)Q(x, t)\mathbf{a}$. Следовательно, необходимо вычислить

$$\Delta \mathbf{a} = \{P(x_2, t)Q(x, t) - Q(x_1, t)P(x, t)\}\mathbf{a} = \{P(x, t)Q(x, t) - Q(x, t)P(x, t) +$$

$$t(q^i(x)\partial_i P(x, t)Q(x, t) - p^i(x)\partial_i Q(x, t)P(x, t))\}\mathbf{a} + o(t^2).$$

в координатах

$$\Delta \mathbf{a}^k = \{(\delta_s^k - t \Gamma_{is}^k p^i)(\delta_m^s - t \Gamma_{jm}^s q^j) - (\delta_s^k - t \Gamma_{is}^k q^i)(\delta_m^s - t \Gamma_{jm}^s p^j) +$$

$$t^2(-q^i(\partial_i\Gamma_{jm}^k p^j + \Gamma_{jm}^k \partial_i p^j) + p^i(\partial_i\Gamma_{jm}^k q^j + \Gamma_{jm}^k \partial_i q^j))a^m + o(t^2) =$$

$$t^2\{(\Gamma_{is}^k \Gamma_{jm}^s - \Gamma_{js}^k \Gamma_{im}^s + \partial_i \Gamma_{jm}^k - \partial_j \Gamma_{im}^k)p^i q^j\}a^m + o(t^2) = t^2 R_{ijl}{}^k p^i q^j a^l + o(t^2),$$

поскольку векторные поля \mathbf{p} , \mathbf{q} , являясь операторами частных производных, коммутируют

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}]^j = p^i \partial_i q^j - q^i \partial_i p^j = 0.$$

0.7 Тензор Риччи. Форма объема. Эквиаффинная связность

О. Тензор валентности $(0, 2)$ с компонентами

$$R_{ij} = R_{kij}{}^k = 2\{\partial_{[k} \Gamma_{i]j}^k + \Gamma_{[i|j]}^s \Gamma_{k|s}^k\}, \quad i, j, k, s = 1, \dots, n,$$

называется тензором Риччи пространства аффинной связности. Обозначается

$$Ric(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = R_{ij} a^i b^j.$$

Задача 1 Доказать, что если линейная связность симметрична, то для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{X}(M)$

$$Ric(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - Ric(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = Tr R(\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

где

$$Tr R_{ij} = R_{ijk}{}^k = 2\partial_{[i} \Gamma_{j]k}^k$$

— компоненты следа оператора кривизны.

Задача 2 Доказать, что $Tr R$ является внешним дифференциалом $d\gamma$ дифференциальной формы

$$\gamma = \Gamma_{jk}^k dx^j,$$

которая при замене координат изменяется на слагаемое, равное определителю матрицы перехода.

Следствие. Тензор Риччи симметрической линейной связности тогда и только тогда симметричен, когда тензор TrR тождественно равен нулю, т.е. когда

$$d\gamma = 0$$

(дифференциальная форма замкнута).

О. Пусть M — ориентируемое многообразие, на котором задана нигде не обращающаяся в нуль форма ω степени n . Такая n -форма называется формой объема.

Форма объема задает ориентацию на M и для любой карты (U, x^i) имеет вид

$$\omega|_U = f_U(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Значение этой формы на векторах в фиксированной точке определяет объем ориентированного параллелепипеда, построенного на этих векторах в касательном пространстве.

О. Пространство аффинной связности без кручения называется эквиваффинным, если оно допускает существование формы объема, сохраняющейся при параллельном перенесении.

В локальных координатах это условие сводится к следующим

$$\nabla_k \omega_{i_1 \dots i_n} = 0,$$

которые в силу косой симметрии $\omega_{i_1 \dots i_n}$ равносильны таким

$$\partial_k \omega_{1 \dots n} - \Gamma_{ks}^s \omega_{1 \dots n} = 0.$$

Вводя основную плотность $e = \omega_{1 \dots n}$, получим второй вид условия, характеризующего эквиваффинную связность

$$\Gamma_{ks}^s = \partial_k \ln e.$$

Из этого условия следует, что основная плотность определяется по компонентам связности с точностью до постоянного множителя.

Для связности без кручения симметрия тензора Риччи является необходимым и достаточным условием, чтобы существовала плотность с вышеуказанным свойством.

Таким образом, эквивалентная связность характеризуется симметрией тензора Риччи или обращением в нуль тензора $\text{Tr}R$.

0.8 Риманова связность. Тензор кривизны римановой связности

О. Римановой (псевдоримановой) метрикой на многообразии M называется симметричное тензорное поле g валентности $(0,2)$ такое, что для каждого $x \in M$ тензор g_x задает в касательном пространстве T_xM скалярное (псевдоскалярное) произведение. Многообразие, снабженное римановой (псевдоримановой) метрикой называется римановым (псевдоримановым) и обозначается (M,g) . Тензорное поле g называется также римановым (псевдоримановым) метрическим тензором.

Для римановой метрики для каждого $x \in M$ и для любого $\mathbf{a} \in T_xM \setminus \{0\}$

$$g_x(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0,$$

т.е. квадратичная форма для скалярного произведения положительно определена, а для псевдоримановой метрики для каждого $x \in M$ из того, что для любого $\mathbf{a} \in T_xM$

$$g_x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0,$$

следует, что $\mathbf{b} = 0$, т.е. квадратичная форма для псевдоскалярного произведения лишь невырождена.

Итак, мы определили полную аналогию первой фундаментальной формы поверхности и многие понятия римановой геометрии представляют собой просто многомерное обобщение ее внутренней геометрии.

Отметим, что если многообразие риманово (псевдориманово), то касательное векторное пространство в каждой его точке является евклидовым (псевдоевклидовым).

Интерес к псевдоримановым многообразиям возник в связи с общей теорией относительности: физическое пространство-время этой теории четырехмерно и имеет псевдориманову метрику сигнатуры $(-+++)$.

Пусть (U, x^i) — некоторая карта на многообразии и $\{\partial_i\}$ — соответствующее поле натуральных реперов.

Тогда метрический тензор имеет компоненты

$$g_{ij}(x) = g_x(\partial_i, \partial_j),$$

а скалярное произведение имеет вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_x = g_{ij}(x)a^i(x)b^j(x).$$

Отметим, что в силу условия положительной определенности определитель матрицы метрического тензора

$$\det(g_{ij}) > 0.$$

Так как метрический тензор невырожденный, то в каждой точке определен линейный изоморфизм $\psi_x : T_x M \rightarrow T_x^* M$ касательного пространства на кокасательное.

С помощью таких изоморфизмов векторному полю $\mathbf{a}(x)$ можно поставить в соответствие ковекторное поле

$$\psi_x(\mathbf{a}) = \alpha_{\mathbf{a}}(x), \quad \text{где} \quad \alpha_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

При координатной записи вектор и соответствующий ему ковектор обозначают одной и той же буквой, различая их лишь положением индекса.

Тогда в координатах это отображение выражается формулой

$$a_i = g_{ij}a^j$$

и называется *опусканием индекса*.

Более того, изоморфизм ψ_x является линейной изометрией, если определить скалярное произведение ковекторов формулой

$$(\alpha_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Обратное отображение называется *поднятием индекса* и имеет вид

$$a^i = g^{ij}a_j,$$

где взаимный тензор g^{ij} к метрическому тензору определен из соотношений

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i.$$

Это позволяет в римановой геометрии вместо ковекторного поля говорить о векторном поле с ковариантными компонентами.

Имея метрический тензор, мы можем в некоторой карте также, как в теории поверхностей, определить угол между векторными полями, модуль векторного поля, а также ориентированную длину дуги пути $x = x(t)$ формулой

$$l = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}} dt.$$

Теорема 11 *На римановом многообразии существует единственная симметричная линейная связность такая, что при параллельном перенесении векторов по любому пути сохраняется их скалярное произведение.*

Это условие означает, что линейный изоморфизм касательных пространств при параллельном перенесении является *изометрией*. Такая линейная связность называется *римановой*.

Отметим, что риманова связность может быть также охарактеризована, как единственная симметричная линейная связность, относительно которой метрический тензор ковариантно постоянен.

⊙ Пусть при параллельном перенесении векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} вдоль любого пути $x = x(t)$, т. е. локально при условиях

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^i}{dt} a^j(t) = 0, \quad \frac{db^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^i}{dt} b^j(t) = 0,$$

сохраняется скалярное произведение

$$f(t) = g_{ij}(t) a^i(t) b^j(t)$$

этих векторов. Следовательно, $f'(t) = 0$.

Дифференцируя это тождество и учитывая условие параллельного перенесения, после несложных выкладок получим

$$f'(t) = (\partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^s g_{sj} - \Gamma_{kj}^s g_{is}) a^i b^j \frac{dx^k(t)}{dt} = 0.$$

Заметим, что выражения в скобках есть ковариантные производные метрического тензора. Принимая во внимание произвольность в выборе векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и пути, получим систему алгебраических уравнений

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^s g_{sj} - \Gamma_{kj}^s g_{is} = 0$$

для компонент связности.

Перепишем эти уравнения дважды, сделав циклическую перестановку нижних индексов $kij \rightarrow ijk \rightarrow jki$.

$$\partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^s g_{sk} - \Gamma_{ik}^s g_{js} = 0,$$

$$\partial_j g_{ki} - \Gamma_{jk}^s g_{si} - \Gamma_{ji}^s g_{ks} = 0.$$

Сложив эти уравнения с знаками $(- + +)$, получим

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} = 2\Gamma_{ij}^s g_{sk}.$$

Свернув обе части этого равенства с g^{lk} , получим единственное решение — символы Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (18)$$

⊙

Следствие Если связность риманова, то при параллельном перенесении сохраняется угол между векторами и длина вектора.

Отметим также, что тензор кривизны риманова пространства полностью определяется его метрическим тензором.

Опустив верхний индекс с помощью метрического тензора, можно рассмотреть также ковариантные компоненты тензора кривизны

$$R_{ijmk} = g_{ks} R_{ijm}{}^s.$$

Лемма (i) Компоненты тензора кривизны римановой связности обладают следующими свойствами симметрии

$$R_{kmi j} = -R_{k m j i}, \quad R_{kmi j} = R_{i j k m}, \quad R_{kmi j} = -R_{m k i j},$$

$$R_{kmi j} + R_{m i k j} + R_{i k m j} = 0.$$

(ii) Тензор Риччи римановой связности симметричен.

⊙ (i) Первое тождество следует из тождества

$$2\nabla_{[k} \nabla_{m]} g_{ij} = -R_{kmi}{}^l g_{lj} - R_{kmj}{}^l g_{il}.$$

Третье — следствие тождества Бианки.

Второе следует из тождества

$$\frac{1}{2}(R_{kijl} + R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{ljik} + R_{iljk} + R_{jilk} -$$

$$R_{lkji} - R_{jlki} - R_{kjli} - R_{kl ij} - R_{likj} - R_{iklj}) = 0.$$

(ii) Используя первое тождество, получим

$$R_{ijs}{}^s = R_{ijmk} g^{mk} = 0.$$

Утверждение следует теперь из следствия предыдущей лекции. ⊙

Скалярной кривизной риманова (псевдориманова) многообразия называется функция

$$R = g^{ij} R_{ij}.$$

Псевдориманово многообразие, для которого

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}$$

называется *пространством Эйнштейна*.

Для пространства Эйнштейна

$$\lambda = \frac{R}{n}.$$

0.9 Преобразование связности

Пусть в некотором пространстве аффинной связности (M, ∇) задана еще одна связность $\hat{\nabla}$.

Тогда в некоторой карте разность ковариантных производных векторного поля имеет \mathbf{v} вид

$$\hat{\nabla}_i v^k - \nabla_i v^k = S_{is}^k v^s,$$

где

$$S_{is}^k = \hat{\Gamma}_{is}^k - \Gamma_{is}^k.$$

Разность ковариантных производных есть тензор и \mathbf{v} — произвольный вектор. Следовательно, S — тензор валентности $(1, 2)$, называемый *тензором аффинной деформации*.

Заметим, что *всякая система функций*

$$\hat{\Gamma}_{is}^k = \Gamma_{is}^k + S_{is}^k,$$

где S — тензор валентности $(1, 2)$, определяет аффинную связность.

⊙ Это следует из законов преобразований

$$\hat{\Gamma}_{i's'}^{k'} - S_{i's'}^{k'} = P_k^{k'} P_{i'}^i P_{s'}^s (\hat{\Gamma}_{is}^k - S_{is}^k) + P_k^{k'} P_{i's'}^k = P_k^{k'} P_{i'}^i P_{s'}^s \hat{\Gamma}_{is}^k - S_{i's'}^{k'} + P_k^{k'} P_{i's'}^k.$$

⊙

Этот результат имеет многочисленные приложения. Например, для аффинных связностей ∇ , $\hat{\nabla}$ и $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ система функций

$$\tilde{\Gamma}_{is}^k = \frac{\Gamma_{is}^k + t\hat{\Gamma}_{is}^k}{1+t} = \Gamma_{is}^k + \frac{t}{1+t}(\hat{\Gamma}_{is}^k - \Gamma_{is}^k),$$

определяет аффинную связность $\tilde{\nabla}$.

При $t = 1$ эта аффинная связность называется *средней* по отношению к связностям ∇ , $\hat{\nabla}$.

Соотношения

$$\tilde{\Gamma}_{is}^k = \Gamma_{si}^k = \Gamma_{is}^k + T_{si}^k,$$

где T — тензор кручения, определяют *взаимную* связность для связности ∇ .

Используя коэффициенты взаимных связностей, можно построить среднюю связность взаимной пары

$$\tilde{\Gamma}_{is}^k = \frac{\Gamma_{is}^k + \Gamma_{si}^k}{2}.$$

Выясним закон преобразования тензора кривизны при преобразовании связности, подставляя коэффициенты связности в выражение для компонент тензора кривизны

$$\tilde{R}_{ijl}{}^k = R_{ijl}{}^k + 2(\partial_{[i}S_{j]l}^k + \Gamma_{[i|s|}^k S_{j]l}^s + S_{[i|s|}^k \Gamma_{j]l}^s + S_{[i|s|}^k S_{j]l}^s).$$

Но

$$\partial_{[i}S_{j]l}^k = \nabla_{[i}S_{j]l}^k - \Gamma_{[i|s|}^k S_{j]l}^s + \frac{1}{2}T_{ij}^s S_{sl}^k + \Gamma_{[i|l|}^s S_{j]s}^k.$$

Таким образом,

$$\tilde{R}_{ijl}{}^k = R_{ijl}{}^k + 2(\nabla_{[i}S_{j]l}^k + S_{[i|s|}^k S_{j]l}^s) + T_{ij}^s S_{sl}^k.$$

0.10 Тензоры Бианки, Вейля, Эйнштейна и гауссова кривизна. Римановы тензоры кривизны двумерного и трехмерного многообразий

Тензорное поле S валентности $(0, 4)$ на (псевдо)римановом пространстве, удовлетворяющее в каждой карте тождествам

$$S_{kmij} = -S_{kmji}, \quad S_{kmij} = S_{ijkm}, \quad S_{kmij} = -S_{mkij},$$

$$S_{kmij} + S_{mikj} + S_{ikmj} = 0,$$

называется *виртуальным тензором кривизны* или *тензором Бианки*.

Все тензоры Бианки на (псевдо)римановом пространстве M образуют $\mathbf{F}(M)$ -модуль BM .

Тензором Риччи $Ric S$ тензора Бианки S называется тензор, имеющий в произвольной карте компоненты

$$Ric S_{ij} = S_{kijm} g^{km}.$$

Задача 1 Доказать, что тензор Риччи $Ric S$ тензора Бианки S симметричен.

Отображение

$$Ric : BM \rightarrow S^2 M, \quad (19)$$

где $S^2 M$ — $\mathbf{F}(M)$ -модуль всех симметрических $\mathbf{F}(M)$ -билинейных функционалов из $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ в $\mathbf{F}(M)$, является $\mathbf{F}(M)$ -линейным.

Если S — тензор Бианки, то обычно вводят следующее обозначение

$$K = \frac{Ric S_{ij} g^{ij}}{n(n-1)}.$$

В случае, когда $S = R$ — тензор кривизны (псевдо)риманова пространства, функция K называется *гауссовой кривизной* этого пространства.

Тензоры Бианки, тензоры Риччи которых равны нулю, называются *тензорами Вейля* или *безриччиевыми тензорами*.

Задача 2 Тензор E с компонентами

$$g_{ijkl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} = 2g_{k[i}g_{j]l}.$$

в произвольной карте (псевдо)риманова пространства является тензором Бианки. Его след равен $n(1-n)$, т.е. для него $K = -1$.

Задача 3 Произвольный тензор Бианки S единственным образом представляется в виде

$$S = -KE + S_0,$$

где S_0 — бесследный тензор (для которого $K = 0$).

Лемма 1 При $n = 2$ любой тензор Бианки S имеет вид KE , т.е. его компоненты выражаются формулой

$$S_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 2Kg_{k[i}g_{j]l}.$$

Кроме того,

$$R_{ij} = \frac{R}{2}g_{ij}.$$

⊙ Это следует из того, что тензор S имеет единственную существенную компоненту, т.е. $\dim BM = 1$ и $S_0 = 0$. ⊙

Поэтому при $n = 2$ отображение (19) заведомо не сюръективно.

Таким образом, тензор кривизны поверхности полностью характеризуется его гауссовой кривизной (проверить, что K действительно гауссова кривизна поверхности) и

$$R_{2112} = Kg = h.$$

Теорема 12 При $n \geq 3$ отображение (19) сюръективно и, более того, обладает сечением, т.е. для него существует обратное справа $\mathbf{F}(M)$ -линейное отображение

$$Q : S^2M \rightarrow \mathbf{F}M. \quad (20)$$

⊙ Нетрудно проверить, что для произвольного тензора $t \in S^2M$ тензор P с компонентами

$$P_{ijkl} = g_{ik}t_{jl} - g_{il}t_{jk} + g_{jl}t_{ik} - g_{jk}t_{il} = 2g_{k[i}t_{j]l} - 2g_{l[i}t_{j]k}$$

является тензором Бианки, тензор Риччи которого имеет компоненты

$$g^{ik}P_{ijkl} = nt_{jl} - t_{jl} + g_{jl}(Tr t) - t_{jl} = (Tr t)g_{jl} + (n - 2)t_{jl},$$

т.е. выражается формулой

$$Ric P = (Tr t)g + (n - 2)t,$$

где

$$Tr t = g^{pq}t_{pq}$$

— след тензора t . С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что при $t = g$ тензор $P = -2E$ является тензором Бианки.

Следовательно, во-первых

$$Ric E = (1 - n)g$$

и, во-вторых,

$$Ric \left(P + \frac{Tr t}{n - 1} E \right) = (n - 2)t.$$

Тогда формула

$$Q(t) = \frac{P}{n-2} + \frac{Tr t}{(n-1)(n-2)} E \quad (21)$$

определяет $\mathbf{F}(M)$ -линейное отображение (20), для которого

$$Ric \circ Q = id.$$

⊙

Следствие 1 При $n \geq 3$ подмодуль $Im Q$ модуля BM изоморфен модулю S^2M и выделяется в BM прямым слагаемым.

⊙ Дополнительное слагаемое состоит из тензоров Вейля. ⊙

Тензоры вида $Q(t)$ называются *тензорами Эйнштейна*.

Таким образом, любой тензор Бианки единственным образом разлагается в сумму некоторого тензора Эйнштейна и некоторого тензора Вейля.

Следствие 2 При $n = 3$ подмодуль $Im Q$ исчерпывает весь модуль BM , т.е. любой тензор Бианки является тензором Эйнштейна $Q(Ric R)$.

⊙ Размерность $\mathbf{F}(M)$ -модуля тензоров Вейля равна

$$\dim BM - \dim S^2M = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2}$$

и при $n = 3$ это число равно нулю. Подсчет $\dim BM$. Если у существенной компоненты тензора Бианки имеется только два различных индекса, то она одна: R_{ijij} . Если три различных индекса, то таких компонент три:

$$R_{ijik}, \quad R_{ijjk}, \quad R_{ikjk}.$$

Если все четыре различных индекса, то достаточно рассмотреть компоненты:

$$R_{ijkl}, \quad R_{ikjl}, \quad R_{iljk}.$$

В силу тождества Бианки одна из компонент выражается через две другие, поэтому существенных компонент две и

$$\dim BM = C_n^2 + 3C_n^3 + 2C_n^4 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

⊙

Теорема 13 При $n = 3$ тензор кривизны выражается через тензор Риччи и гауссову кривизну

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} + 3K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) = \\ &= 2g_{k[i}R_{j]l} - 2g_{l[i}R_{j]k} + 6Kg_{l[i}g_{j]k}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$3K = \frac{R}{2}.$$

⊙ Рассмотрим тензор $S = Ric R$. Тогда

$$Q(Ric R) = P + \frac{Tr Ric R}{2}E = P + 3KE. \odot$$

0.11 Секционная кривизна. Пространство постоянной кривизны

Секционной (римановой) кривизной пространства (M, g) в точке $x \in M$ в двумерном направлении $L \subset T_x M$, определяемым парой линейно независимых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x M$, называется величина

$$K = K_x(L) = -\frac{R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v})} = -\frac{R_{ijkl}u^i v^j u^k v^l}{g_{ijkl}u^i v^j u^k v^l}.$$

Она не зависит от базиса пространства L , а лишь от самого этого двумерного пространства (проверить).

Если векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x M$ образуют ортонормированный базис в римановом случае, то формула упрощается (проверить)

$$K = -R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Псевдориманово (риманово) многообразие (M, g) называется *пространством постоянной кривизны*, если его секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от двумерного направления.

Теорема 14 Тензор кривизны и риманов тензор кривизны пространства постоянной кривизны K имеют вид для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathfrak{X}(M)$

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \cdot) \mathbf{w} = K(g(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{u} - g(\mathbf{u}, \mathbf{w})\mathbf{v}),$$

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = K(g(\mathbf{u}, \mathbf{z})g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - g(\mathbf{u}, \mathbf{w})g(\mathbf{v}, \mathbf{z})) \text{ или } R = -KE.$$

В координатах

$$R_{ijl}{}^k = K(g_{jl}\delta_i^k - g_{il}\delta_j^k) = 2K g_{l[j}\delta_{i]}^k,$$

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 2K g_{k[i}g_{j]l}.$$

⊙ Из определения пространства постоянной кривизны следует, что для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{X}(M)$

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -K(g(\mathbf{u}, \mathbf{u})g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - g^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = -KE(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Заметим, что

$$\hat{R} = R + KE$$

является тензором Бианки. Необходимо доказать, что он равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) + \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \\ &\quad \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) + \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 2\hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{R}(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{u} + \mathbf{w}) = \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \\ &\quad \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Переставив $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}$, получим

$$\hat{R}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{R}(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Теперь в силу тождества Бианки

$$0 = \hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = 3\hat{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}). \odot$$

0.12 Пространство Эйнштейна. Критерий Томаса

Нами было доказано, что любое двумерное риманово пространство является пространством Эйнштейна.

Лемма 1 В произвольном (псевдо)римановом пространстве M в каждой карте имеет место равенство

$$\partial_k R = 2\nabla_l R_k^l,$$

где $R_k^l = g^{ls} R_{sk}$.

⊙ Свернем дифференциальное тождество Бианки

$$\nabla_q R_{ijl}{}^k + \nabla_i R_{jq}{}^k + \nabla_j R_{qil}{}^k = 0$$

по индексам q, k

$$\nabla_q R_{ijl}{}^q - \nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} = 0. \quad (23)$$

С другой стороны, учитывая ковариантное постоянство метрического тензора, получим

$$\partial_k R = \partial_k (g^{ls} R_{ls}) = g^{ls} \nabla_k R_{ls},$$

$$g^{jl} \nabla_l R_{jk} = \nabla_l R_k^l,$$

$$g^{jl} \nabla_q R_{ijl}{}^q = g^{jl} g^{qs} \nabla_q R_{ijls} = g^{jl} g^{qs} \nabla_q R_{jis} = g^{qs} \nabla_q R_{is} = \nabla_q R_i^q.$$

Свернув (23) с g^{jl} получим

$$2\nabla_q R_i^q = \partial_i R. \odot$$

Теорема 15 При $n \geq 3$ скалярная кривизна пространства Эйнштейна постоянна.

⊙ Если M — пространство Эйнштейна, то

$$R_k^l = \frac{R}{n} \delta_k^l.$$

Учитывая лемму 1, получим

$$\nabla_l R_k^l = \frac{\partial_k R}{n} = \frac{\partial_k R}{2}.$$

При $n \geq 3$ это возможно только, если $\partial_k R = 0$. ⊙

Задача 1 Формула из леммы 1 равносильна соотношениям

$$\nabla_l T^{lk} = 0,$$

где

$$T^{lk} = g^{lp} g^{kq} (R_{pq} - \frac{R}{2} g_{pq}).$$

Следствие 1 При $n \geq 3$ в каждом пространстве Эйнштейна тензор Риччи ковариантно постоянен

$$\nabla_k R_{ij} = 0$$

и либо тождественно равен нулю, либо является всюду невырожденным симметрическим тензором.

Предложение 1 Если в пространстве аффинной связности M тензор Риччи ковариантно постоянен, симметричен и невырожден, то связность на M является метрической связностью и индуцируется метрическим тензором, по отношению к которой M является пространством Эйнштейна.

⊙ Примем тензор Риччи за метрический тензор, который будучи ковариантно постоянным индуцирует на M данную связность. По отношению к этой связности M — пространство Эйнштейна, поскольку $Ric = g$. ⊙

Задача 2 Симметрический тензор S в римановом пространстве тогда и только тогда тождественно равен нулю, когда равна нулю функция

$$g^{ik} g^{jl} S_{ij} S_{kl}.$$

(Указание. Эта функция равна сумме квадратов компонент $S_j^k = g^{ik} S_{ij}$.)

Для тензора $R_{pq} - \lambda g_{pq}$ эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} g^{ik} g^{jl} (R_{ij} - \lambda g_{ij})(R_{kl} - \lambda g_{kl}) &= \\ g^{ik} g^{jl} (R_{ij} R_{kl} - 2\lambda g_{ij} R_{kl} + \lambda^2 g_{ij} g_{kl}) &= \\ R_{ij} R^{ij} - 2\lambda R + \lambda^2 n. \end{aligned}$$

Она равна

$$R_{ij} R^{ij} - \frac{R^2}{n} \text{ при } \lambda = \frac{R}{n}.$$

Критерий Томаса. Риманово пространство тогда и только тогда является пространством Эйнштейна, когда

$$R^2 = n R_{ij} R^{ij}.$$

0.13 Конформные преобразования метрического тензора

Согласно следствию 1 лекции 9 при $n \geq 3$ тензор кривизны R (псевдо)риманова пространства имеет разложение

$$R = Q(Ric) + W,$$

где W — тензор Бианки с компонентами

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il}) - \\ &\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) = R_{ijkl} - \frac{2}{n-2}(g_{k[i}R_{j]l} - g_{l[i}R_{j]k}) - \\ &\frac{2R}{(n-1)(n-2)}g_{l[i}g_{j]k}, \\ W_{ijl}{}^k - R_{ijl}{}^k &= -\frac{2}{n-2}(\delta_{[i}^k R_{j]l} - g_{l[i}R_{j]}^k) - \frac{2R}{(n-1)(n-2)}g_{l[i}\delta_{j]}^k. \end{aligned}$$

Это вейлевская компонента тензора кривизны.

Говорят, что метрический тензор \tilde{g} на многообразии M получен конформным преобразованием метрического тензора g , если

$$\tilde{g} = e^{2\sigma}g,$$

где σ — некоторая функция на M .

Очевидно, что при нетождественном конформном преобразовании длины кривых меняются, но углы между кривыми остаются прежними.

Если $\sigma = \text{const}$, то метрическая связность при конформном преобразовании не меняется, а потому не меняется и тензор кривизны.

Риманов тензор кривизны изменяется при этом так

$$\tilde{R}_{ijkl} = e^{2\sigma}R_{ijkl}, \text{ т.е. } e^{-2\sigma}\tilde{R}_{ijkl} - R_{ijkl} = 0.$$

Вычислим эту разность в общем случае.

$$\partial_l \tilde{g}_{ij} = 2e^{2\sigma}\sigma_l g_{ij} + e^{2\sigma}\partial_l g_{ij}, \quad \sigma_l = \partial_l \sigma.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}g^{ks}(\partial_i\tilde{g}_{js} + \partial_j\tilde{g}_{is} - \partial_s\tilde{g}_{ij}) = \Gamma_{ij}^k + S_{ij}^k,$$

где тензор деформации имеет вид

$$S_{ij}^k = \sigma_i\delta_j^k + \sigma_j\delta_i^k - g_{ij}g^{ks}\sigma_s.$$

Используя ранее полученную формулу для преобразования тензора кривизны, получим

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ijl}^k &= R_{ijl}^k + 2(\nabla_{[i}S_{j]l}^k + S_{[i|m}^kS_{j]l}^m) = \\ &R_{ijl}^k + 2\{\nabla_{[i}(\sigma_{j]}\delta_l^k + \delta_{j]}^k\sigma_l - g_{j]l}g^{ks}\sigma_s) + \\ &(\delta_m^k\sigma_{[i} + \sigma_m\delta_{[i}^k - g^{ks}\sigma_s g_{m[i}](\sigma_{j]}\delta_l^m + \delta_{j]}^m\sigma_l - g_{j]l}g^{ms}\sigma_s)\} = \\ &R_{ijl}^k + 2\{(\delta_{[j}^k\nabla_{i]}\sigma_l - g^{ks}g_{l[j}\nabla_{i]}\sigma_s) + \sigma_{[i}(\delta_{j]}^k\sigma_l - g_{j]l}g^{ks}\sigma_s) + \\ &\delta_{[i}^k(\sigma_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ms}\sigma_m\sigma_s) - g^{ks}\sigma_s(\sigma_{[j}g_{i]l} - g_{l[j}\sigma_{i]})\} = \\ &R_{ijl}^k + 2\{(\delta_{[j}^k\nabla_{i]}\sigma_l - g^{ks}g_{l[j}\nabla_{i]}\sigma_s) + \\ &\delta_{[i}^k(\sigma_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ms}\sigma_m\sigma_s) - g^{ks}\sigma_s\sigma_{[j}g_{i]l}\}.\end{aligned}$$

Тогда свернув обе части с g_{kq} , получим

$$\begin{aligned}e^{-2\sigma}\tilde{R}_{ijlq} - R_{ijlq} &= 2\{(g_{q[j}\nabla_{i]}\sigma_l - g_{l[j}\nabla_{i]}\sigma_q) + \\ &g_{q[i}(\sigma_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ms}\sigma_m\sigma_s) - \sigma_q\sigma_{[j}g_{i]l}\} = 2\{g_{q[j}S_{i]l} - g_{l[j}S_{i]q}\},\end{aligned}$$

где

$$S_{il} = \nabla_i\sigma_l - \sigma_i\sigma_l + \frac{1}{2}g_{il}g^{ms}\sigma_m\sigma_s$$

симметричный тензор. Свертка наденного соотношения с тензором

$$g^{iq} = e^{2\sigma}\tilde{g}^{iq}$$

дает для тензоров Риччи формулу

$$\tilde{R}_{jl} - R_{jl} = -Sg_{jl} - (n-2)S_{jl}, \quad S = g^{iq}S_{iq},$$

а для скалярных кривизн формулу

$$e^{2\sigma}\tilde{R} - R = -2(n-1)S.$$

0.14 Тензор конформной кривизны. Конформно-плоские пространства

Из последних двух формул при $n > 2$ получим

$$S_{jl} = -\frac{\tilde{R}_{jl} - R_{jl}}{n-2} + \frac{e^{2\sigma}\tilde{R} - R}{2(n-1)(n-2)}g^{jl},$$

и потому

$$\begin{aligned} e^{-2\sigma}\tilde{R}_{ijlq} - R_{ijlq} &= 2\{g_{q[j}S_{i]l} - g_{l[j}S_{i]q}\} = \\ &= -\frac{2g_{q[j}(\tilde{R}_{i]l} - R_{i]l})}{n-2} + \frac{e^{2\sigma}\tilde{R} - R}{2(n-1)(n-2)}2g_{q[j}g_{i]l} + \frac{2g_{l[j}(\tilde{R}_{i]q} - R_{i]q})}{n-2} \\ &\quad - \frac{e^{2\sigma}\tilde{R} - R}{2(n-1)(n-2)}2g_{l[j}g_{i]q} = -2e^{-2\sigma}\frac{\tilde{g}_{q[j}\tilde{R}_{i]l} - \tilde{g}_{l[j}\tilde{R}_{i]q}}{n-2} + \\ &\quad \frac{2e^{-2\sigma}\tilde{R}}{(n-1)(n-2)}\tilde{g}_{q[j}\tilde{g}_{i]l} + 2\frac{g_{q[j}R_{i]l} - g_{l[j}R_{i]q}}{n-2} - \frac{2R}{(n-1)(n-2)}g_{q[j}g_{i]l} = \\ &= e^{-2\sigma}(\tilde{R}_{ijlq} - \tilde{W}_{ijlq}) + W_{ijlq} - R_{ijlq}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e^{-2\sigma}\tilde{W}_{ijlq} = W_{ijlq}, \quad \tilde{W}_{ijl}{}^k = W_{ijl}{}^k.$$

Последний тензор называется *тензором конформной кривизны Вейля*.

Следовательно, *при конформном преобразовании метрического тензора тензор конформной кривизны Вейля не изменяется*.

Для пространства Эйнштейна

$$W_{ijl}{}^k - R_{ijl}{}^k = -\frac{2R}{n(n-1)}\delta_{[i}^k g_{j]l}.$$

Диффеоморфизм (псевдо)римановых пространств

$$f : (M, g_M) \rightarrow (\hat{M}, g_{\hat{M}})$$

называется *конформной эквивалентностью*, если метрический тензор $f^*g_{\hat{M}}$ на M получается из метрического тензора g_M конформным преобразованием, т.е. если на M существует такая всюду положительная функция φ , что

$$f^*g_{\hat{M}} = \varphi g_M.$$

На этом языке конформная инвариантность тензора Вейля означает, что для любой конформной эквивалентности

$$f : (M, g_M) \rightarrow (\hat{M}, g_{\hat{M}})$$

имеет место равенство

$$f^*W_{\hat{M}} = W_M,$$

где $W_{\hat{M}}$ и W_M — тензоры Вейля пространств (M, g_M) и $(\hat{M}, g_{\hat{M}})$ соответственно.

Риманово пространство называется *конформно-плоским*, если его метрический тензор может быть конформно преобразован в метрический тензор евклидова пространства (с тождественно равным нулю тензором кривизны.)

Для такого пространства тензор Вейля тождественно равен нулю.

Тензор Вейля равен нулю и в случае, когда каждая точка пространства M обладает окрестностью, на которой метрический тензор может быть конформно преобразован в метрический тензор евклидова пространства, т.е. когда пространство M локально конформно-плоское.

Оказывается, при $n \geq 4$ верно и обратное утверждение: если $W = 0$, то пространство M локально конформно плоское (без доказательства).

Согласно следствию 2 лекции 9 при $n = 3$ тензор Вейля тождественно равен нулю.

Существуют трехмерные римановы пространства, не являющиеся локально конформно-плоскими.

При $n = 3$ роль тензора Вейля играет тензор V с компонентами

$$V_{ijk} = \frac{2\nabla_{[i}R_{j]k}}{n-2} - \frac{\partial_{[i}Rg_{j]k}}{(n-1)(n-2)}.$$

Задача 1. Покажите, что

(i) если трехмерное риманово пространство локально конформно-плоское, то $V = 0$;

(ii) при $n \geq 4$ из равенства $W = 0$ следует равенство $V = 0$.

При $n = 3$ равенство $V = 0$ не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы риманово пространство было локально конформно-плоским.

Задача 2 Найдите и разберите доказательство утверждения. Всякое двумерное риманово пространство является локально конформно-плоским.

Однако утверждение о том, что любая поверхность является глобально конформно-плоским неверно. Справедливо лишь следующее более слабое утверждение.

Теорема 16 Любое двумерное риманово пространство конформно эквивалентно геодезически полной поверхности постоянной гауссовой кривизны.

Следствие 1 На любом двумерном хаусдорфовом паракомпактном гладком многообразии существует геодезически полная метрика постоянной гауссовой кривизны.

0.15 Аффинные отображения пространств аффинной связности. Аффиннитеты

Пусть (M, ∇) , $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ — пространства аффинной связности.

В каждой карте (U, x^1, \dots, x^n) ((V, y^1, \dots, y^m)) линейная связность ∇ ($\hat{\nabla}$) задается матрицей ω ($\hat{\omega}$) форм связности.

Пусть $f : M \rightarrow \hat{M}$ — гладкое отображение. Карты (U, x^1, \dots, x^n) , (V, y^1, \dots, y^m) назовем f -связанными, если $f(U) = V$.

В таких картах отображение f в координатах задается функциями

$$y^b = f^b(x^1, \dots, x^n), \quad b = 1, \dots, m.$$

Якобиева матрица

$$J_f = (\partial_i f^b), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq b \leq m,$$

этих функций называется *якобиевой матрицей отображения f* в картах (U, x^1, \dots, x^n) , (V, y^1, \dots, y^m) .

Напомним, что векторные поля $\mathbf{a} \in \mathfrak{X}(M)$ и $\hat{\mathbf{a}} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$ называются f -связанными, если

$$df_x \mathbf{a}_x = \hat{\mathbf{a}}_{f(x)}$$

для любой точки $x \in M$, т.е. если для любой пары f -связанных карт (U, x^1, \dots, x^n) , (V, y^1, \dots, y^m) имеют место равенства

$$\partial_i f^b a^i = \hat{a}^b \circ f, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq b \leq m,$$

где a^i , \hat{a}^b — компоненты векторных полей \mathbf{a} и $\hat{\mathbf{a}}$ в соответствующих картах.

Теорема 17 Следующие свойства гладкого отображения $f : M \rightarrow \hat{M}$ равносильны

(A) Если поля $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{X}(M)$ f -связаны с полями $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$, то поле

$$\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b} \quad f\text{-связано с полем} \quad \hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}} \hat{\mathbf{b}}.$$

(B) Для любых f -связанных карт (U, x^1, \dots, x^n) , (V, y^1, \dots, y^m)

$$J_f \omega = f^* \hat{\omega} J_f + dJ_f \quad \text{на } U.$$

(C) Для любой кривой $\gamma : I \rightarrow M$ и любого векторного поля $\mathbf{a} : t \mapsto \mathbf{a}(t)$ на γ

$$\hat{\nabla}_{\frac{d}{dt}} [df_{\gamma(t)} \mathbf{a}(t)] = df_{\gamma(t)} \frac{\nabla}{dt} \mathbf{a}(t), \quad t \in I.$$

(D) Для любой кривой $\gamma : I \rightarrow M$

$$df_y \circ P_\gamma = \hat{P}_{f \circ \gamma} \circ df_x,$$

где x — начальная и y — конечная точки кривой γ , P_γ и $\hat{P}_{f \circ \gamma}$ — параллельные переносы вдоль кривых γ и $f \circ \gamma$.

⊙ Если поля $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{X}(M)$ f -связаны с полями $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$, то для любых f -связанных карт (U, x^1, \dots, x^n) , (V, y^1, \dots, y^m)

$$\partial_i f^b a^i = \hat{a}^b \circ f, \quad \partial_i f^b b^i = \hat{b}^b \circ f \quad \text{на } U.$$

С другой стороны

$$(\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b})^k = (\partial_i b^k + \Gamma_{ij}^k b^j) a^i, \quad (\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}} \hat{\mathbf{b}})^c = (\partial_a \hat{b}^c + \hat{\Gamma}_{ab}^c \hat{b}^b) \hat{a}^a.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
(\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{b}})^c \circ f &= (\partial_a \hat{b}^c \circ f + (\hat{\Gamma}_{ab}^c \circ f) \hat{b}^b \circ f) \hat{a}^a \circ f = \\
&= ((\partial_a \hat{b}^c \circ f) \partial_i f^a + (\hat{\Gamma}_{ab}^c \circ f) \partial_j f^b b^j \partial_i f^a) a^i = \\
&= (\partial_i (\hat{b}^c \circ f) + (\hat{\Gamma}_{ab}^c \circ f) \partial_j f^b \partial_i f^a b^j) a^i = \\
&= (\partial_i (\partial_j f^c b^j) + (\hat{\Gamma}_{ab}^c \circ f) \partial_j f^b \partial_i f^a b^j) a^i = \\
(\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b})^j \partial_j f^c + (-\partial_k f^c \Gamma_{ij}^k + \partial_i \partial_j f^c + (\hat{\Gamma}_{ab}^c \circ f) \partial_j f^b \partial_i f^a) a^i b^j.
\end{aligned}$$

Поскольку равенство

$$(\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b})^j \partial_j f^c = (\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{b}})^c \circ f$$

означает, что поля $\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ и $\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{b}} f$ -связаны, а равенство

$$\partial_k f^c \Gamma_{ij}^k = \partial_i \partial_j f^c + (\hat{\Gamma}_{ab}^c \circ f) \partial_j f^b \partial_i f^a$$

после умножения на dx^i перейдет в равенство (B), то это доказывает равносильность (A) и (B). \odot

Задача 1 Завершите доказательство теоремы 1.

Гладкое отображение $f : M \rightarrow \hat{M}$ обладающее свойствами (A – D) называется *аффинным отображением*.

Задача 2 Каждый интервал $I \subset \mathbb{R}$ является пространством аффинной связности относительно канонической связности $\nabla_{\partial_t} = \partial_t$. Поэтому имеет смысл говорить о кривых $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, являющихся аффинными отображениями. Покажите, что это в точности геодезические кривые пространства M .

Ясно, что свойство отображения быть аффинным является локальным свойством, т.е. *отображение $f : M \rightarrow \hat{M}$ аффинно, если оно аффинно на некоторой окрестности любой точки $x \in M$.*

Кроме того, из свойства (D) аффинных отображений непосредственно следует, что *каждое аффинное отображение переводит геодезические в геодезические, и поэтому в нормальных координатах записывается линейными функциями.*

Теорема 18 (*О единственности аффинного отображения*) Пусть аффинные отображения $f, g : M \rightarrow \hat{M}$ обладают свойствами

$$f(x) = g(x), \quad df_x = dg_x.$$

Тогда $f = g$ на компоненте связности многообразия M , содержащей точку $x \in M$.

⊙ Пусть

$$C = \{y \in M : f(y) = g(y), \quad df_y = dg_y\}.$$

Отображения f и g непрерывны, а многообразие M хаусдорфово. Следовательно, множество C замкнуто.

С другой стороны, из того, что каждое аффинное отображение в нормальных координатах записывается линейными функциями, непосредственно следует, что для любой точки $x \in C$ каждая ее нормальная окрестность содержится в C .

Тогда множество C открыто. Являясь открыто-замкнутым множеством содержащим точку x , множество C содержит компоненту связности этой точки.

Значит, $f = g$ на компоненте связности многообразия M , содержащей точку x . ⊙

Ясно, что композиция аффинных отображений является аффинным отображением.

Аффинное отображение, являющееся диффеоморфизмом, называется аффинным диффеоморфизмом, аффинным изоморфизмом или аффиннитетом.

Для аффиннитета f условие (B) можно переписать в виде

$$\omega = J_f^{-1}(f^*\hat{\omega})J_f + J_f^{-1}dJ_f.$$

В частном случае, когда аффиннитет f действует по равенству координат, (т.е. каждую точку $x \in (U, x^1, \dots, x^n)$ переводит в точку $y \in (V, y^1, \dots, y^m)$ с теми же координатами), это условие приобретает вид

$$\omega = f^*\hat{\omega},$$

означающий, что $\hat{\omega}$ переходит в ω при подстановке $y^i = x^i$, $1 \leq i \leq n$ (формы $\hat{\omega}$, в ω отличаются лишь обозначениями переменных).

Каждый диффеоморфизм $f : M \rightarrow \hat{M}$ определяет по формуле

$$(f_*\mathbf{a})_y = df_x\mathbf{a}_x, \quad x = f^{-1}(y),$$

биекцию $f_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\hat{M})$, обладающую тем свойством, что поля \mathbf{a} и $f_*\mathbf{a}$ f -связаны.

Поэтому в силу свойства (A) теоремы 1, *диффеоморфизм $f : M \rightarrow \hat{M}$ тогда и только тогда является аффиннитетом, когда для любого поля $\mathbf{a} \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\hat{\nabla}_{f_*\mathbf{a}} \circ f_* = f_* \circ \nabla_{\mathbf{a}}.$$

Отсюда непосредственно следует, что *каждый аффиннитет сохраняет тензоры кручения и кривизны*, точнее, для любого аффиннитета $f : M \rightarrow \hat{M}$ имеют место равенства

$$T = f^*\hat{T}, \quad R = f^*\hat{R}.$$

Эти равенства необходимы, но вообще говоря недостаточны для того, чтобы диффеоморфизм $f : M \rightarrow \hat{M}$ был аффиннитетом.

0.16 Геодезические отображения пространств аффинной связности. Проективно-евклидово пространство аффинной связности

Из уравнений геодезических пространства аффинной связности следует, что у линейных связностей с компонентами

$$\Gamma_{ij}^k, \quad \hat{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k)$$

геодезические общие.

Следовательно, *для исследования геодезических достаточно ограничиться линейными связностями без кручения.*

Диффеоморфизм пространств аффинной связности, при котором геодезические кривые отображаются на геодезические кривые называется

геодезическим или проективным диффеоморфизмом, а о пространствах говорят, что они *проективны друг другу*.

Отнесем соответствующие области карт к системе координат, общей по отоношению к геодезическому диффеоморфизму.

Можно даже считать, что у нас одно многообразие с различными симметричными линейными связностями.

Пусть

$$\mathbf{a} = \left(\frac{dx^k}{dt} \right), \quad \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$$

касательные векторы к общей геодезической переносимые параллельно в связностях ∇ и $\hat{\nabla}$ соответственно.

Тогда условия параллельного перенесения примут вид

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad \frac{d(\lambda dx^k)}{dt^2} + \hat{\Gamma}_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{\lambda dx^j}{dt} = 0.$$

Откуда найдем

$$S_{ij}^k dx^i dx^j = -d \ln \lambda dx^k,$$

где $S_{ij}^k = \hat{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ — тензор аффинной деформации.

Перейдем к равносильным соотношениям

$$dx^{[l} S_{ij}^{k]} dx^i dx^j = 0, \tag{24}$$

которые должны удовлетворяться тождественно, т.е. при любых значениях dx^i . Поэтому

$$\delta_{(m}^{[l} S_{ij}^{k]} = 0,$$

что в силу симметричности тензора деформации по нижним индексам эквивалентно соотношениям

$$\delta_m^{[l} S_{ij}^{k]} + \delta_i^{[l} S_{jm}^{k]} + \delta_j^{[l} S_{mi}^{k]} = 0.$$

Свертывая по индексам l и m , получим

$$(n+1)S_{ij}^k - \delta_i^k S_{sj}^s - \delta_m^k S_{si}^s = 0.$$

Следовательно, тензор аффинной деформации, соответствующей проективному отображению, имеет вид

$$S_{ij}^k = \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i,$$

где

$$p_i = \frac{1}{n+1} S_{si}^s.$$

Обратно, если это уравнение выполнено, то подстановка S_{ij}^k в уравнение (24) обращает его в тождество.

Ковектор p_i называется *ковектором проективного преобразования линейной связности*.

Если оба пространства эквиаффинны, то

$$p_i = \frac{1}{n+1} \partial_i \ln \frac{\hat{e}}{e},$$

где e и \hat{e} — основные плотности.

Следовательно, для того, чтобы проективное отображение сохраняло эквиаффинность необходимо и достаточно, чтобы ковектор преобразования был градиентен.

Учитывая закон преобразования тензора кривизны при преобразовании линейной связности, получим

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijl}{}^k &= R_{ijl}{}^k + 2(\nabla_{[i} S_{j]l}^k + S_{[i|m}^k S_{j]l}^m) = \\ &= R_{ijl}{}^k + 2\{\nabla_{[i}(p_{j]}\delta_l^k + \delta_{j]}^k p_l) + (\delta_m^k p_{[i} + p_m \delta_{[i}^k)(p_{j]}\delta_l^m + \delta_{j]}^m p_l)\} = \\ &= R_{ijl}{}^k + 2\{\nabla_{[i} p_{j]}\delta_l^k + \delta_{[j}^k \nabla_{i]} p_l + \delta_{[i}^k p_{j]}\delta_l^k\} = R_{ijl}{}^k + 2\{p_{[ij]}\delta_l^k + \delta_{[j}^k p_{i]l}\}, \end{aligned}$$

где $p_{ij} = \nabla_i p_j - p_i p_j$.

Заметим, что если конформное соответствие двух пространств является в проективным, то линейные связности этих пространств совпадают.

Действительно, свертывая равенство

$$\sigma_i \delta_j^k + \sigma_j \delta_i^k - g_{ij} g^{kl} \sigma_l = \delta_j^k p_i + \delta_i^k p_j$$

сначала по индексам k и j , а потом свертывая с тензором g^{ij} , получим два уравнения:

$$n\sigma_i = (n+1)p_i, \quad (2-n)\sigma_i = 2p_i,$$

которые удовлетворяются при целом n только нулевыми значениями ко-векторов σ_i и p_i .

Пространство аффинной связности, проективное евклидову пространству, называется *проективно-евклидовым пространством*.

Таким образом, тензор кривизны проективно-евклидова пространства имеет вид

$$R_{ijl}{}^k = 2\{p_{[ji]}\delta_l^k + \delta_{[i}^k p_{j]l}\} \quad (25)$$

и существует ковектор p_i , удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla_i p_j = p_{ij} + p_i p_j.$$

Задача 1 Показать, что условие интегрируемости последних уравнений имеют вид

$$\nabla_{[i} p_{j]k} = 0. \quad (26)$$

Итак, доказана

Теорема 19 *Пространство аффинной связности без кручения является проективно-евклидовым тогда и только тогда, когда существует тензор p_{ij} , удовлетворяющий (25) и (26).*

Задача 2 Показать, что при $n > 2$ условие (26) является следствием условия (25) (применить тождество Бианки).

Используя (25), выразим тензор p_{ij} через тензор Риччи.

$$R_{jl} = np_{jl} - p_{lj}, \quad R_{lj} = np_{lj} - p_{jl}.$$

Следовательно,

$$p_{jl} = \frac{nR_{jl} + R_{lj}}{n^2 - 1}.$$

Эквипроективным пространством называется эквиаффинное проективно-евклидово пространство.

Его тензоры Риччи и p_{ij} симметричны, поэтому для эквипроективного пространства

$$R_{ijl}{}^k = 2\delta_{[i}^k p_{j]l}, \quad R_{jl} = (n-1)p_{jl}, \quad (27)$$

а тензор Риччи удовлетворяет условию (уравнению) Кодацци

$$\nabla_{[i} R_{j]k} = 0. \quad (28)$$

В эквипроективном пространстве можно указать общее решение уравнения Кодацци.

Рассмотрим для этого систему дифференциальных уравнений

$$b_{jk} = \nabla_j \nabla_k \varphi + \frac{\varphi}{n-1} R_{jk}, \quad (29)$$

где b_{jk} — симметричный тензор. Найдем условия ее интегрируемости, предполагая, что пространство эквипроективно.

$$\nabla_{[i} b_{j]k} = -\frac{1}{2} R_{ijk}{}^l \nabla_l \varphi + \frac{\nabla_{[i} \varphi R_{j]k}}{n-1} + \frac{\varphi}{n-1} \nabla_{[i} R_{j]k},$$

но в силу (25), (27) и (28) получим

$$\nabla_{[i} b_{j]k} = 0. \quad (30)$$

Таким образом, *общее решение уравнения (30) в эквипроективном пространстве имеет (29), где φ — произвольная гладкая функция.*

В частности, в евклидовом пространстве общее решение уравнения (30) имеет вид

$$b_{jk} = \nabla_j \nabla_k \varphi. \quad (31)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. - М.: Изд-во Факториал, 1998.
- [2] Норден. А. П. Пространства аффинной связности. - М.: Наука, 1976.
- [3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Том I. - М.: УРСС, 1998.
- [4] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Наука, 1981.